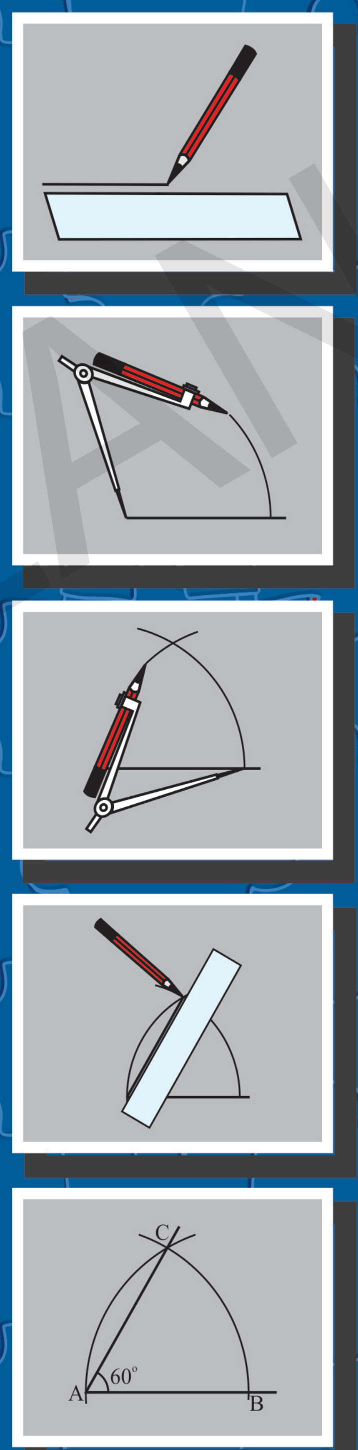
FREE

గణితం

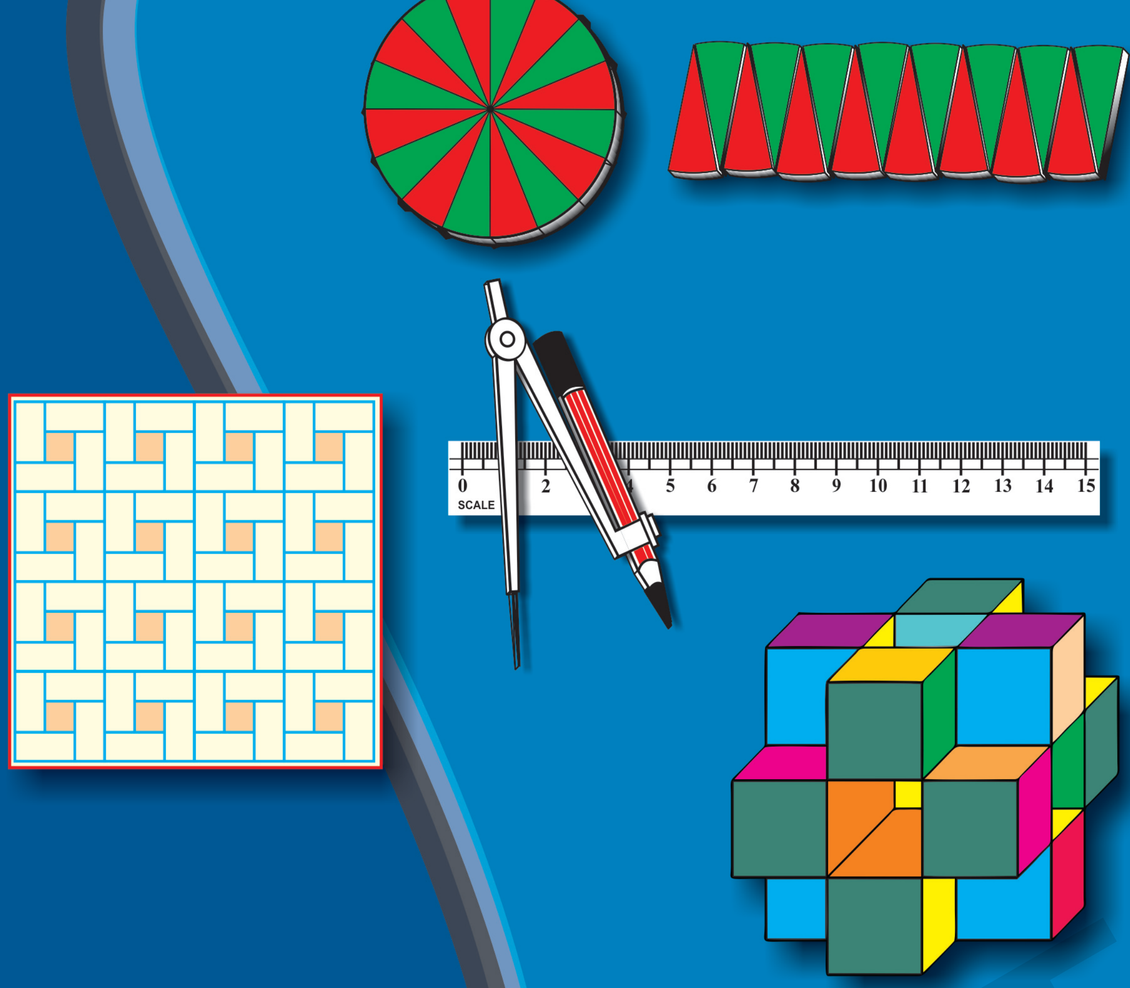
8వ తరగతి



తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వ ప్రచురణ,
హైదరాబాదు

తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

గణితం 8వ తరగతి



తెలంగాణ ప్రభుత్వం

మహిళాభివృద్ధి మరియు శిశుసంక్షేమ శాఖ - చైల్డ్ లైన్ ఫౌండేషన్

బడిలోగానీ, బడి బయటగానీ వేధింపులకు గురవుతున్నా

ఆపదలో, కష్టాలలో ఉన్న పిల్లలను రక్షించడానికి

CHILD LINE 1098 NIGHT & DAY

24 HOUR NATIONAL HELPLINE

పిల్లలతో పనిచేయిస్తున్నా, వారిని బడికి పంపకుండా వేరే కార్యక్రమాలకు ఉపయోగిస్తున్నా

కుటుంబ సభ్యులు గానీ, బంధువులు గానీ ఇబ్బందికరంగా, అసభ్యంగా ప్రవర్తిస్తున్నా

1098 (పది-తొమ్మిది-ఎనిమిది) ఉచిత టెలిఫోన్ సేవా సౌకర్యానికి ఫోన్ చేయండి

రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ,
తెలంగాణ రాష్ట్రం, హైదరాబాదు

పిల్లలూ! మీ కోసమే ఈ సూచనలు...

- పాఠ్యపుస్తకంలో ప్రతి భావన అవగాహన కోసం సందర్భం లేదా ఉదాహరణలు లేదా సమస్యలు లేదా ఆటలు మొదలగునవి దానికి సంబంధించిన బొమ్మలు/పటాలు ఇవ్వబడినవి. సందర్భాన్ని పటంతో/బొమ్మతో పాటుచదివి భావనను అవగాహన చేసుకొనుటకు ప్రయత్నించాలి.
- భావనలు అవగాహన చేసుకోవడానికి నిర్వహిస్తున్న కృత్యాలలో పాల్గొంటున్న సందర్భంలో మీకు వచ్చే అనుమానాలను వెంటనే మీ ఉపాధ్యాయులను అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- భావన అవగహన అయినది అని తెలుసుకొనుటకు "ఇవి చేయండి"లోని సమస్యలను మీరు స్వంతంగా సాధించాలి. ఒకవేల సాధించలేకపోతే మాదిరి సమస్యను పరిశీలించి అవగాహన పొందాలి. లేదా ఉపాధ్యాయున్ని అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- "ప్రయత్నించండి" శీర్షిక కింద ఉన్న సమస్యలు మీ ఆలోచనలను పదునుపెట్టడానికి ఉపయోగపడతాయి. అనగా మీకు ఆలోచన నైపుణ్యాలను పెంపొందిస్తాయి. వీటిని స్వయంగా సాధించలేనపుడు తోటివిద్యార్థులతో కలిసి జట్లలో సాధించడానికి ప్రయత్నించాలి. లేదా ఉపాధ్యాయులతో చర్చించి సాధనను తెలుసుకోవాలి.
- "ఆలోచించండి-చర్చించండి"లోని కృత్యాలు మీరు భావనను మరింత లోతుగా విస్తృతంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. కావున వీటిని మీ మిత్రులతో కలిసి చర్చిస్తూ, ప్రశ్నిస్తూ అవగాహన పొందండి.
- అధ్యాయం చివరన ఇచ్చిన అభ్యాసంలోని సమస్యలు మీరు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న అన్ని భావనలకు సంబంధించినవి. ఈ సమస్యలన్ని ఒకే విధంగా ఉండవు. వీటిని మీరు స్వయంగా ఇంటిపనిగా గాని లేదా విరామ సమయంలో గాని సాధించవచ్చు.
- "ఇవి చేయండి" "ప్రయత్నించండి"లోని సమస్యలు మాత్రం పాఠశాలలోనే ఉపాధ్యాయుల సమక్షంలో తప్పక సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో ఎక్కడైతే ప్రాజెక్టులు ఇవ్వబడినవో వాటిని మీరు జట్లలో చేయవలసి ఉంటుంది. అయితే వీటి నివేదికలు మీరు వ్యక్తిగతంగా రాసివ్వవలసి ఉంటుంది.
- భావన అవగాహన కోసం నిర్వహించే కృత్యాలు, అభ్యాసాలలో ఉండే సమస్యలలో మీ ప్రతిస్పందనలను పాఠ్యపుస్తకంలోనే రాయవలసి ఉంటే వాటిని అక్కడే రాయాలి.
- మీరు ఏరోజు సాధించవలసిన సమస్యలను ఆ రోజే పూర్తిచేసి మీ ఉపాధ్యాయునితో తప్పక సరిచేయించుకోవాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో మీరు నేర్చుకున్న భావనలకు సంబంధించిన సమస్యలను మరికొన్నింటిని సేకరించి లేదా మీరు స్వయంగా తయారుచేసి గాని మీ ఉపాధ్యాయునికి, తోటి విద్యార్థులకు చూపించండి. అందరు కలిసి వాటిని సాధించండి.
- గణిత భావనలకు సంబంధించి పాఠ్యపుస్తకంలో ఇచ్చిన ఆటలు, పజిల్స్, ఆసక్తికరమైన విషయాలు అవగాహన చేసుకొని అలాంటివి మరికొన్ని సేకరించి సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా తరగతిగదిలో నేర్చుకున్న భావనలను తరగతిగదికే పరిమితం చేయకుండా జీవితంలో (తరగతి బయట) వివిధ సందర్భాలకు వాటిని జోడించడం, ఉపయోగించడం వంటివి చేయాలి.
- గణితంలో మీరు ముఖ్యంగా సమస్యసాధన, కారణాలు చెప్పడం-నిరూపణలు చేయడం, గణితభాషలో వ్యక్తపరచడం, గణిత భావనలను, అవగహనను వివిధ సందర్భంలో, విషయాలలో, నిత్య జీవితంలో అనుసందానం చేయడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం వంటి సామర్థ్యాలను సాధించాలి.
- పై గణిత సామర్థ్యాలను సాధించడంలో భావనల అవగాహన పరంగా ఏవైనా ఇబ్బందులు ఎదురైతే ఎప్పటికప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహకారం తీసుకోవాలి.

గ్రాఫ్ పేపర్

గణితం

8 వ తరగతి

పాఠ్య పుస్తక అభివృద్ధి, ప్రచురణ కమిటి

ప్రధాన నిర్వహణాధికారి	:	**శ్రీ ఎ. సత్యనారాయణ రెడ్డి,** సంచాలకులు, రాష్ట్రవిద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, హైదరాబాద్.
ప్రధాన వ్యవహారనిర్వాహకులు	:	**శ్రీ బి. సుధాకర్** సంచాలకులు, ప్రభుత్వ పాఠ్యపుస్తక ముద్రాణాలయం, హైదరాబాదు
కార్యనిర్వాహకులు	:	**డా॥ నన్నూరు ఉపేందర్ రెడ్డి,** ప్రొఫెసర్, పాఠ్యప్రణాళిక మరియు పాఠ్యపుస్తక విభాగం రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, హైదరాబాదు.

చైర్మన్, గణిత ఆధారపత్రం, గణిత పాఠ్యప్రణాళిక, పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ.

ప్రొఫెసర్. వి.కన్నన్,
గణితం - సాంఖ్యక శాస్త్ర విభాగం,
హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం, హైదరాబాద్

ముఖ్య సలహాదారులు

శ్రీ చుక్కా రామయ్య,
విద్యావేత్త
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

డా. హెచ్. కె.దివాన్
విద్యాసలహాదారు, విద్యాభవన్ సొసైటీ రీసోర్స్ సెంటర్
ఉదయపూర్, రాజస్థాన్.

తెలంగాణ ప్రభుత్వ ప్రచురణ, హైదరాబాద్

చట్టాలను గౌరవించండి
హక్కులను పొందండి

విద్యవల్ల ఎదగాలి
వినయంతో మెలగాలి

First Published 2013
New Impressions 2014, 2015, 2016, 2017, 2018

This Book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

తెలంగాణ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ 2018-19

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ సభ్యులు

రచయితలు

శ్రీ తాతా వెంకట రామకుమార్
హెచ్.ఎం. జి.ప్ర.ఉ.పా. ములుమూడి, నెల్లూరుజిల్లా

శ్రీ సోమ ప్రసాద బాబు
పి.జి.టి., ఎ.పి.డబ్ల్యూ.ఆర్.ఎస్.చంద్రశేఖరపురం, నెల్లూరు

శ్రీ కొమాండూరి మురళీ శ్రీనివాస్
పి.జి.టి., ఎ.పి.డబ్ల్యూ.ఆర్.స్కూల్ ఆఫ్ ఎక్సలెన్స్, శ్రీశైలం

శ్రీ పదాల సురేష్ కుమార్
ఎస్.ఎ., జి.హెచ్.ఎస్. విజయనగర్ కాలనీ, హైదరాబాదు

శ్రీ పి.డి.ఎల్.గణపతి శర్మ
ఎస్.ఎ., జి.హెచ్.ఎస్.జమిస్తాన్‌పూర్, మాణికేశ్వర్ నగర్, హైదరాబాదు

శ్రీ దుగ్గరాజు వేణు
ఎస్.ఎ., ప్రా.ఉ.పా. అల్లవాడ, చేవెళ్ళ మండలం, రంగారెడ్డి జిల్లా

శ్రీ పి. ఆంథోని రెడ్డి
ప్ర.ఉ.సెయింట్ పీటర్ ఉన్నత పాఠశాల, ఆర్.ఎన్.పేట, నెల్లూరు.

శ్రీ డి. మనోహర్
ఎస్.ఎ. జి.ప.ఉ.పా. బ్రాహ్మణపల్లి, తాడ్వాయి(మం) నిజామాబాద్ జిల్లా

శ్రీ గొట్టుముక్కల వి.బి.ఎస్.ఎన్.రాజు
ఎస్.ఎ. పురపాలక ఉన్నత పాఠశాల, కస్పా, విజయనగరం

శ్రీ కె.వరద సుందర్ రెడ్డి
ఎస్.ఎ. జి.ప.ఉ.పా. తక్కశిల, ఆలంపూర్ మండలం, మహబూబ్‌నగర్‌జిల్లా

శ్రీ అబ్బరాజు కిషోర్
ఎస్.జి.టి., ప్రా.ఉ.పా. చామళ్ళమూడి, గుంటూరుజిల్లా

శ్రీ జి.అనంత రెడ్డి
విశ్రాంత ప్రధానోపాధ్యాయులు, రంగారెడ్డి జిల్లా.

శ్రీ యమ్.రామాంజనేయులు
ఉపన్యాసకులు, ప్రభుత్వ డైట్, వికారాబాద్, రంగారెడ్డి జిల్లా.

శ్రీ యమ్. రామాచారి
ఉపన్యాసకులు, ప్రభుత్వ డైట్, వికారాబాద్, రంగారెడ్డి జిల్లా.

డా. ఎ. రాంబాబు
ఉపన్యాసకులు, ప్రభుత్వ సి.టి.ఇ., వరంగల్

డా. పూండ్ల రమేష్
ఉపన్యాసకులు, ప్రభుత్వ ఐ.ఎ.ఎస్.ఇ., నెల్లూరు.

సంపాదకులు

శ్రీ వి.శివరామ ప్రసాద్
విశ్రాంతాచార్యులు, గణితం
ఉస్మానియా యూనివర్శిటీ, హైదరాబాదు.

శ్రీ ఎన్.సిహెచ్. పట్టాభిరామాచార్యులు
విశ్రాంతాచార్యులు
జాతీయ సాంకేతిక విద్యా సంస్థ. వరంగల్.

శ్రీ కె.బ్రహ్మయ్య
విశ్రాంతాచార్యులు
ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు.

డా. ఎస్. సురేష్ బాబు
ప్రొఫెసర్, గణిత-సాంఖ్యకశాస్త్ర విభాగం
ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు.

శ్రీ ఎ. పద్మనాభం, విశ్రాంతాచార్యులు
గణితశాస్త్ర విభాగాధిపతి
మహారాణి కాలేజి, పెద్దాపురం.

డా. జి.ఎస్.ఎన్. మూర్తి
రీడర్ (విశ్రాంత), గణితం
ఆర్.ఎస్.ఆర్.కె.ఆర్.ఆర్. కాలేజ్, బొబ్బిలి

కో-ఆర్డినేటర్లు

డా. కాకులవరం రాజేందర్ రెడ్డి,
రిసోర్స్ పర్సన్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు.

శ్రీ కె.కె.వి రాయులు
ఉపన్యాసకులు, ఐ.ఎ.ఎస్.ఇ.మాసబ్‌ట్యాంక్, హైదరాబాదు

విద్యావిషయక సహకారం అందించిన వారు

శ్రీ ఇందర్ మోహన్‌సింగ్ **శ్రీ యశ్వంత్ కుమార్ దవే** **శ్రీ హనీఫ్ పాలీవాల్** **శ్రీ ఆశిష్ చొరాడియా**
విద్యాభవన్ సొసైటీ రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్థాన్.

శ్రీ శరన్ గోపాల్ **కుమారి యమ్. అర్చన** **శ్రీ పి. చిరంజీవి**
గణితము-సాంఖ్యక శాస్త్ర విభాగం, హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం.

బొమ్మలు, డిజైనింగ్ సభ్యులు

శ్రీ ప్రశాంత్ సోనీ **శ్రీ షేక్ షాకిర్ అహ్మద్** **శ్రీ ఎస్.ఎమ్.ఇక్రమ్**
విద్యాభవన్ సొసైటీ రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్థాన్.

కవర్‌పేజ్ డిజైనింగ్

శ్రీ.కె.సుధాకరాచారి, హెడ్‌మాస్టర్,
యు.పి.స్. నీలికుర్తి, మం.మరిపెడ, జి.వరంగల్

ముందుమాట

మానవ వికాసానికి, స్వయం సిద్ధమైన అభివృద్ధికి 'విద్య' ఒక మూలాధారం. విద్యకు గల ఈ అద్భుతమైన శక్తిని గుర్తించి పురోగమించే అన్ని సమాజాలు సార్వజనీన ప్రాథమిక విద్యకు అత్యంత ప్రాధాన్యత ఇచ్చి, ప్రతి ఒక్కరికి గుణాత్మక విద్యను అందించాలనే దృక్పథంతో ముందుకు పోతున్నాయి. దీనికి కొనసాగింపుగా సెకండరీ విద్యను కూడా సార్వజనీనం చేయవల్సిన ఆవశ్యకత ఏర్పడినది.

విద్యార్థి ప్రాథమికోన్నత స్థాయి వరకు నేర్చుకున్న భావనలను, గణిత ప్రక్రియలను సమ్మిళితం చేసి గణితీకరణం చెందే విధంగా సెకండరీ స్థాయి దోహదపడుతుంది. పాఠ్యాంశాలు హేతుబద్ధంగా నేర్చుకోవడం, సమస్యలు విశ్లేషించి సాధించడం, సిద్ధాంతాలు నిరూపించడం ఈ స్థాయిలో ప్రవేశపెట్టారు. ఈ దశలో గణితం అనేది ఒక బోధనా విషయం ఇతర విషయంతో అవినాభావ సంబంధం కలిగి వుండే విధంగా కారణాలతో కూడిన విశ్లేషణలు చేయుటలో ఉపకరిస్తుంది.

మనరాష్ట్రంలో చదువుతున్న విద్యార్థులందరూ గణితాన్ని ఆనందంతో నేర్చుకోవడమే కాకుండా, వారి జీవిత అనుభవాలను జోడించి సమస్యలు రూపొందించడానికి, సాధించడానికి ఈ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలో మౌళిక భావనలు తోడ్పడపడతాయని నేను ప్రగాఢంగా విశ్వసిస్తున్నాను.

విద్యార్థులు గణితాన్ని మార్కులు సంపాదించుకొనుట కొరకు మాత్రమే కాకుండా గణిత పాఠ్యప్రణాళికలో ఇమిడి వున్న అమూర్త కీలక భావనలను నేర్చుకునే విధంగా ఉపాధ్యాయులు ప్రోత్సహించవలసి వున్నది. బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో అన్ని స్థాయిల విద్యార్థులు భాగస్వాములు అయ్యే విధంగా కృషి చేయాలి. విద్యార్థులలో గణిత పఠనం పట్ల అనుకూల దృక్పథాన్ని పెంపొందించి, వారిలో విశ్వాసం కలిగించేట్లు బోధన కొనసాగితే అది వారి జీవన గమ్యానికి దారితీస్తుంది. ఈ విధమైన జ్ఞాన నిర్మాణానికి ఈ పాఠ్యపుస్తకం దోహదపడుతుంది. అందుకు అనువైన రీతిలో దీన్ని వినియోగించాలి.

రాష్ట్ర విద్యా పాఠ్యప్రణాళిక పరిధి పత్రం (SCF -2011) యొక్క విశాల ధృక్పథానికి అనుగుణంగా రూపొందిన గణిత ఆధార పత్రం లోని అంశాల ఆధారంగా ఏర్పరిచిన విద్యాప్రమాణాలను ప్రతీస్థాయిలో సాధించాల్సి ఉంది.

గణిత పాఠ్యపుస్తకాన్ని ఆకర్షణీయంగానూ, ప్రమాణాలకు అనుగుణంగా తీర్చిదిద్దడంలో అవిరళ కృషి చేసిన పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ సభ్యులకు, పుస్తక రూపకల్పనలో పాలుపంచుకున్న ఉపాధ్యాయులకు అధ్యాపకులకు రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణా సంస్థ అభినందిస్తున్నది. ఇదే విధంగా పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పనకు పరిపాలనా పరంగా సహకరించిన జిల్లా విద్యాశాఖాధికారులు, మండల విద్యాశాధికారులు, పాఠశాలల ప్రధానాచార్యులకు ప్రత్యేక ధన్యవాదాలు. పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధిలో మమ్ములను ముందుండి ప్రోత్సహించిన రాష్ట్ర కమీషనర్ మరియు డైరక్టరు, పాఠశాల విద్య మరియు విద్యాభవన్ సొసైటీ ఉదయ్‌పూర్, రాజస్థాన్ వారికి కృతజ్ఞతలు. రాబోయే కాలంలో పాఠ్యపుస్తకం మరింత గుణాత్మకంగా అభివృద్ధి చెందుటకు మీ అందరి సలహాలు, సూచనలు మీ నుండి ఆహ్వానిస్తున్నాం.

స్థలం : హైదరాబాదు
తేది : డిశంబర్ 26, 2012

సంచాలకులు
రాష్ట్ర విద్యాశిక్షణ పరిశోధనసంస్థ
హైదరాబాదు.

పీఠిక

రాష్ట్ర విద్యాప్రణాళికా చట్టం (SCF - 2011) లో సూచించిన అనేక సిఫార్సులలో ప్రధానమైనది "పాఠశాలలో విద్యార్థులు అభ్యసనం, పాఠశాల బయట జీవితం (నిజజీవితం)తో ముడిపడి ఉండాలి". దీని కనుగుణంగా మనరాష్ట్ర ప్రభుత్వం అన్ని తరగతులకు దశల వారీగా అన్ని పాఠ్యాంశాల లోనూ విద్యాప్రణాళిక సవరించుటకు నిర్ణయించారు. విద్యాహక్కు చట్టం (RTE - 2009) ప్రకారం 14 సంవత్సరాల వయస్సు వరకు పాఠశాలలో చేరిన ప్రతీ బిడ్డ, అన్ని స్థాయిలలో నిర్దేశించిన నైపుణ్యాలను ప్రమాణాలను తప్పనిసరిగా పొందాలని సూచిస్తున్నది. జాతీయ స్థాయిలో రూపొందించిన సిలబస్ ప్రకారం మన రాష్ట్రంలోని విద్యార్థులు కూడా గణితం, విజ్ఞానశాస్త్రాలలోని అంశాలు నేర్చుకోవలసిన అవసరం ఏర్పడింది. జాతీయ స్థాయి అర్హత ప్రవేశ పరీక్ష (నీట్) కు మన రాష్ట్ర పిల్లలు సిద్ధం కావలసి ఉంది. ఇందుకు మన రాష్ట్రంలో మార్పులు, చేర్పులు చేపట్టుట అత్యంత అవశ్యకం. రాబోయే తరాల అవసరాలను దృష్టి యందుంచుకొని విజ్ఞాన సాంకేతిక రంగాల అభివృద్ధిని అంచనా వేసి తదనుగుణంగా బలీయమైన గణిత విద్యాధార సాంకేతిక యుగానికి విద్యార్థిని తయారు చేయవలసిన అవసరం ఎంతైనా ఉన్నది.

గణిత విద్యాప్రణాళిక ప్రధానంగా మూడు దశలు అంటే ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత మరియు సెంకడరీ స్థాయిలలో శీర్షిక, సర్పిల విధానాలపై ఆధారపడి వుంటుంది. సెకండరీ స్థాయిలో గణిత ఉపాధ్యాయులు ఉన్నత తరగతుల గణిత పాఠ్యప్రణాళికను ఈ దృష్టిలో అధ్యయనం చేసి విద్యార్థులు ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత దశలలో నేర్చుకున్న గణిత భావనల అవగాహన, వినియోగాలను మరింత విస్తృత పరచుకోవడానికి తోడ్పడాలి.

పాఠ్యవిషయాలు అన్నియూ ప్రాథమిక గణితభావనలు, సాధారణీకరణల ద్వారా అన్వేషణ, అవగాహనలపై ఊహించి మౌళిక నిర్మాణ పద్ధతిలో రూపొందించారు. ఈవిధానం వలన విద్యార్థులు గణిత అభ్యసనంలో చురుకుగా పాల్గొనేటట్లు, చర్చించేటట్లు, ప్రశ్నించుకొనేటట్లు దోహదపడి బోధనాభ్యస ప్రక్రియలలో మార్పుకు దోహదపడుతుంది.

ప్రస్తుత 8వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకం రాష్ట్రవిద్యాపరిశోధన శిక్షణా సంస్థ వారిచే రూపొందించబడిన గణిత విద్యాప్రణాళికను, విద్యాప్రమాణాలను దృష్టియందుంచుకొని రూపొందించబడినది.

- ఈ తరగతికి పాఠ్యప్రణాళిక ప్రధానంగా ఆరు ప్రధాన రంగాలు అంటే(1) సంఖ్యావ్యవస్థ, (2) బీజగణితం, (3) అంకగణితం, (4) రేఖాగణితం, (5) క్షేత్రమితి మరియు (6) దత్తాంశ నిర్వహణ గా విభజింపబడినది. వీటిలో గల అధ్యాయంలను బోధన చేయుట ద్వారా సమస్యాసాధన, హేతుబద్ధంగా ఆలోచించడం, గణిత వ్యక్తీకరణ, దత్తాంశంను ప్రాతినిధ్య పరచడం, మరియు గణితాన్ని మిగిలిన అంశాలతోనూ, నిత్యజీవిత సందర్భాలతోనూ అనుసంధానించడం అనే నైపుణ్యాలతో నిర్దేశిత స్థాయిలో రూపొందించిన విద్యాప్రమాణాలను సాధించడానికి అవకాశం ఏర్పడుతుంది. ఈ పాఠ్యపుస్తకంలోని అంశాలు అన్నియూ విద్యార్థులు చక్కని స్వేచ్ఛాయుత వాతావరణంలో నేర్చుకునే విధంగా తీర్చిదిద్దబడ్డాయి. విద్యార్థులు చిన్న చిన్న బృందాలుగా చర్చించి సమస్యలు సాధించుటకు వీలుగా "ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి" వంటి శీర్షికలు ఏర్పాటు చేయబడ్డాయి.

ఈ పాఠ్యపుస్తకం యొక్క కొన్ని ప్రత్యేకతలు:

- పాఠ్యప్రణాళికకు అనుగుణంగా రూపొందించిన అధ్యాయాలను సంవత్సరంలో గల ప్రతీ టర్మ్‌లోనూ వివిధ రంగాలకు చెందిన అంశాలు అభ్యసించే విధంగా వ్యవస్థీకరించబడ్డాయి.

- జ్యామితి బోధన అనేది ప్రాథమికోన్నత స్థాయి వరకు విద్యార్థుల సహజసిద్ధమైన ఆలోచనాదృక్పథంనకు అనుగుణంగా కొలతలు కొలిపించడం, కాగితాలు మడిపించడం వంటి కృత్యాల ద్వారా నేర్చుకోబడింది. జ్యామితి పటాల నిర్మాణాలకు ప్రధానంగా వృత్తలేఖినిని ప్రధానంగా వినియోగించడం మరొక ప్రత్యేక ఆకర్షణ.

- "ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి" మరియు "ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి". అనే శీర్షికలు తరగతిగదిలో విద్యార్థులను నిరంతరం, సమగ్రముగా మూల్యాంకనం చేయుటకు దోహదపడతాయి. కొన్ని ఉపఅంశాలు చర్చించిన పిదప ఇవ్వబడిన అభ్యాసాలు విద్యార్థులు స్వయంగా సాధించుటకు తద్వారా, ప్రతివిద్యార్థి యొక్క అభ్యసన సామర్థ్యాన్ని అంచనా వేయడానికి అవకాశం కల్పించబడినవి.

- మొత్తం పాఠ్యాంశములను 15 అధ్యాయాలుగా విభజించడమైనది. విద్యార్థులు ప్రతీ అంశాన్ని కూలంకషంగా, అవగాహన చేసుకొనుటకు, హేతుబద్ధంగా ఆలోచించుటకు, అంశాలపై సమగ్రంగా పట్టు సాధించుటకు సులభంగా నేర్చుకొనుటకు గణిత అధ్యయనంపట్ల ఆసక్తి పెరుగుటకు దోహదపడతాయి.

- రంగుల వర్ణచిత్రాలు, పటాలు, చదవగలిగే అక్షరాల సైజు తప్పకుండా విద్యార్థులను పుస్తకం పట్ల మంచి అభిప్రాయం కలిగి, పుస్తకంలోని అంశాల పట్ల శ్రద్ధ పెంపొందుటకు తోడ్పడతాయి.

అధ్యాయం (1) : అకరణీయ సంఖ్యలు సంఖ్యావ్యవస్థ రంగంలో వస్తుంది. దీనిలో అకరణీయ సంఖ్యకు భిన్నానికి ఎటువంటి తేడా వుందో తెలుసుకోవచ్చు. చక్కని ఉదాహరణల ద్వారా అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలను చర్చించడం జరిగింది. విద్యార్థులు అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై చూపుట, ప్రాతినిధ్యపరచడం, అదేవిధంగా దశాంశాలుగా మార్పు చెందించడం తెలుసుకుంటారు. అధ్యాయం (6) వర్గాలు మరియు వర్గమూలాలులో ప్రధానంగా విద్యార్థులు ఖచ్చిత వర్గాలను, వర్గసంఖ్యల ధర్మాలను అవగాహనతోపాటు ఒక సంఖ్యకు వర్గమూలము కారణాంక పద్ధతిలోనూ, భాగాహార పద్ధతిలోనూ చేయడం నేర్చుకుంటారు. ఇదేవిధంగా ఘనాలు, ఘనమూలాలు కూడా అనేక ఉదాహరణల ద్వారా ప్రవేశ పెట్టబడినవి.

అధ్యాయాలు (2) (4) (11) మరియు (12) లు బీజగణితానికి సంబంధించినవి. ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాల అధ్యాయంలో విద్యార్థులు పదసమస్యలలో చరరాశిని ఏవిధంగా గుర్తించవచ్చు, దాని విలువను పక్షాంతర పద్ధతిలో ఏవిధంగా కనుగొనవచ్చో చక్కని ఉదాహరణలద్వారా ప్రవేశపెట్టబడినవి. ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాల అధ్యాయంలో అతిపెద్దసంఖ్యలను, అదిచిన్న సంఖ్యలను ఘాతాంక రూపంలో ఏవిధంగా రాయవచ్చో చర్చించబడింది. అదేవిధంగా ఘాతాంక న్యాయాలను సోదాహరణంగా వివరించడం జరిగింది. ఇక మరి రెండు అధ్యాయాలు బీజీయ సమాసాలు మరియు కారణాంక విభజనలో ప్రధానంగా ఏకపదులు, ద్విపద సమాసాలు విశ్లేషణ చేయబడిన బీజీయ సర్వసమీకరణాలైన $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ మరియు $(x \pm a)(x \pm b) = x^2 \pm (a + b)x + ab$ లను వివిధ చరరాశి విలువలతో నిరూపించడమేకాక, జ్యామితి నిరూపణలు చేసేవిధంగా ప్రోత్సహించడమైనది. కారణాంక విభజనలో సర్వసమీకరణాలను వినియోగించడమే కాక, అనేక ఇతరవిధాలైన సమస్యలను విద్యార్థి అభ్యాసం కొరకు ఇవ్వబడినవి.

అధ్యాయం (5)లో రాశులను పోల్చుటలో నిష్పత్తి, అనుపాతం, బహుళనిష్పత్తి, రుసుముశాతం, లాభనష్టాలు, అమ్మకపు పన్ను /VAT/GST, బారువడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ కనుగొనుట, సంవత్సర, అర్ధ సంవత్సర, త్రైమాసిక కాలాలలో చక్రవడ్డీని సూత్రం ద్వారా వివిధ సందర్భాలలో కనుగొనుటకు ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినవి. అధ్యాయం (10)లో అనులోమాను, విలోమానుపాతంలో నిత్యజీవిత సందర్భాలలో ఎదుర్కొనే సమస్యలను చర్చించి సాధించుట చూపబడినది.

అధ్యాయం (15) సంఖ్యలతో ఆడుకుందాంలో విద్యార్థులకు సంఖ్యల అమరికలలో ఇమిడివున్న సూత్రాలను సోపానయుతంగా వివరించడం జరిగింది. వివిధ భాజనీయతా సూత్రాల ఆధారంగా నూతన సూత్రాల ఆవిష్కరణలకు తగిన అవకాశాలను ఉదాహరణలద్వారా, పదకేళీల ద్వారా ఇచ్చి సంఖ్యలపై పరిశోధనలకు ప్రోత్సహించడం జరిగింది. జ్యామితిని విద్యార్థులు తమ చుట్టూ వుండే వస్తువులను బట్టి ఊహాజనితమైన ఆలోచనలను ప్రేరేపించి, పటాల నిర్మాణాలవైపు దృష్టి సారించుటనట్లు చేయబడింది.

అధ్యాయం (3)లో చతుర్భుజాల నిర్మాణంలో చతుర్భుజ ధర్మాలను పునర్విమర్శ చేయడమే కాకుండా, ఏకైక చతుర్భుజం ఏర్పరిచే సందర్భాలను ప్రస్తావించడం జరిగింది. చతుర్భుజాలను వివిధ కొలతలతో ఏర్పడే అన్ని సందర్భాలను తీసుకొని నిర్మాణాలకు తగిన ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినవి. అధ్యాయం (8) జ్యామితి పటాల అన్వేషణ మరియు అధ్యాయం (13) 3D వస్తువులను 2D పటాలుగా రూపొందించుటలో 3D పటాలను ఏర్పరిచే విధానాలను వాటి ఆకారాలను, పరిమాణాలను పరిశీలించుటకు విద్యార్థులకు అనేక అవకాశాలు కల్పించబడ్డాయి..

దత్తాంశ నిర్వహణ అనేది మరొక ప్రధాన రంగం. విద్యార్థి తన చుట్టూ చూసిన, సేకరించిన సమాచారాన్ని పటాలలోనూ గ్రాఫ్‌లలోనూ రూపొందించుట ప్రధాన ఉద్దేశ్యం. అధ్యాయం (7) పౌనఃపున్య పట్టికలు మరియు రేఖాచిత్రాలలో సోపాన చిత్రాలను గురించి, బహుభుజాలను గురించి, ఓజివ్ వక్రాల గురించి చర్చించి, వాటిని నిర్మించుట చూపబడినవి. అవర్గీకృత దత్తాంశంనకు అంకగణిత సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకం కనుగొనుటకు తగు ఉదాహరణ సమస్యలు ఇవ్వబడినవి. కేంద్రీయ స్థాన విలువలు కనుగొనుటలో అనేక ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతులను పరిశీలించే అవకాశం విద్యార్థులకు కల్పించబడింది.

చివరగా అధ్యాయం (9)లో సమతల పటాలకు వైశాల్యాలు కనుగొనుటలో ట్రెపీజియం, చతుర్భుజం, వృత్తం, కంకణం మరియు సెక్టరు వైశాల్యములు కనుగొనుటకు వివిధ ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినవి. అదేవిధంగా అధ్యాయం (14) లో సమఘనం, దీర్ఘ ఘనంల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములకు సూత్రములు రాబట్టబడినవి. తగిన అభ్యాసాలు ఇవ్వబడినవి.

ఒక మంచి పాఠ్యపుస్తకం ఒక్కటే గుణాత్మక విద్యను అందించలేదు. విద్యార్థులు ప్రయోగాత్మకంగా, కృత్యాలను సాధించలేరు. విద్యార్థులు ప్రయోగాత్మకంగా, కృత్యాలను నిర్వర్తించేటట్లు తోడ్పడి, వారంతట వారే తాము నేర్చుకున్న భావనలను అనుసరించి భావనలు స్థిరపరుచుకొనేటట్లు తద్వారా సమస్యల సాధనకు తగిన మార్గాలు అన్వేషించు కొనేటట్లు ఉపాధ్యాయుల ప్రోత్సహించాలి.

ఈ నేపథ్యంలో గణిత తరగతి గదిలో బోధన అంటే అభ్యాసాలను మూసపద్ధతిలో చేయించడమే కాకుండా, భావనల అవగాహనతో హేతుబద్ధంగా సమస్యాసాధన నైపుణ్యాలను పెంపొందించేటట్లు ప్రోత్సహించవలసిన అవసరం ఉన్నది.

– పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ

జార్జ్ పోల్యా (1887 - 1985)

జార్జ్ పోల్యా
(1887-1985)

'సమస్యాసాధన' అనేది నేర్చుకొనే అంశమా? లేదా ఇది కొంతమంది తెలివైన వారికి గల సహజ సిద్ధమైన సామర్థ్యమా? అనే ప్రశ్న అనేక సంవత్సరాలుగా ప్రపంచవ్యాప్తంగా అందరూ చర్చిస్తున్న ప్రశ్న. దీనికి ఖచ్చితమైన, ఆమోదింపదగిన సమాధానాన్ని ఇచ్చిన మొదటి వ్యక్తి కీ.శే. జార్జ్ పోల్యా. ఈయన దృష్టిలో సమస్యాసాధన నైపుణ్యం అనేది తప్పనిసరిగా నేర్చుకోవలసిన అంశం. దీనికి అనేక సిద్ధాంతాలు ఈయన ప్రతిపాదించాడు. 'పోల్యా' హంగేరీ దేశంలో 1887 సంవత్సరంలో జన్మించాడు. "యూనివర్శిటీ ఆఫ్ బుడాపెస్ట్" నుండి గణితంలో డాక్టరేట్ పట్టా పొందారు. జ్యూరిచ్‌లో గల "స్విస్ ఫెడరల్ ఇన్స్టిట్యూట్ ఆఫ్ టెక్నాలజీ"లో చాలా కాలం ఆచార్యునిగా పనిచేసారు. ఈయన రచించిన అనేక గ్రంథాలలో చెప్పదగినది. 'How to Solve It' (1945). ఇది సుమారు 17 భాషలలో తర్జుమా అయి సుమారు ఒక మిలియన్ కాపీలు అమ్ముబడినవి.

పోల్యా చెప్పిన నాలుగు "సమస్యాసాధన" నియమాలు

I. సమస్యను అవగాహన చేసుకోవడం (Understand the problem)

ఈ నియమం గురించి మనము ప్రత్యేంగా చెప్పవలసిన అవసరం లేదు. కాని విద్యార్థులు ఒక సమస్యను సాధించుటలో వారి నైపుణ్యాలను ఎక్కడ కేంద్రీకరించాలో తెలియక తికమక పడుతుంటారు. దీనికి కారణం సమస్యను పూర్తిగానూ, కొంతవరకైననూ సరిగా అవగాహన చేసుకొనకపోవడమే. దీనిని అధిగమించడానికి ఉపాధ్యాయులు క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలను వేయవచ్చు.

● సమస్యలో ఇవ్వబడిన పదాలన్నీ అర్థమైనాయా? కాకపోతే తగిన నిఘంటువులో వెతికి తెలుసుకోవాలి. ● సమస్యలో ఏమి కనుగొనాలి అని తెలుసుకోవడానికి సమస్యను సొంతమాటలలో వ్రాసుకోవాలి. ఇంకేవిధంగానైనా వ్రాయగలమో పరిశీలించాలి. ● అసలు సమస్యలో ప్రధానమైన మాటలకు అర్థమేమిటి? ● దీనికొరకు ఏవైనా సంఖ్యాసమాసాలను ఉదాహరణలుగా వ్రాసుకోవచ్చా? ● లేదంటే పటంగాని, చిత్రంగాని దీని అవగాహనకొరకు గీయవచ్చా? ● సమస్య సాధనకొరకు కావల్సిన సమాచారమంతా ఇవ్వబడినదా? ● ఇది సరిపోతుందా? ● అనవసర సమాచారం ఏమైనా ఉన్నదా? ● అసలు సాధన కొరకు కావల్సిన సమాచారం ఏమిటి?

II. పథకం రూపొందించుకొనుట (Devise a plan)

సమస్యను అవగాహన చేసుకొన్న పిదప సమస్యను సాధించాలంటే మరింత శ్రద్ధతో ఒకపథకం రూపొందించుకోవాలి. దీనికొరకు భయపడవల్సిన అవసరంలేదు. మీరు సక్రమంగానే ఆలోచిస్తున్నారనుకోండి. సమస్య సాధనకొరకు హేతుబద్ధమైన అనేక కారణాలనుబట్టి పద్ధతులు నిర్ణయించుకోవాల్సిన అవసరం ఉన్నది. కొన్ని ప్రయత్నాల అనంతరం తప్పక మనకు సరియైన పద్ధతి ఖచ్చితంగా తెలుస్తుంది. వీటిలో కొన్ని పద్ధతులు ఏమనగా

● ఊహించడం మరియు సరిచూచుకొనుట ● అమరిక కొరకు ప్రయత్నించడం ● క్రమంలో అంశాలు వ్రాసుకోవడం ● పటం వేయడం ● కొంతవరకు సాధించిన సమస్యను పరిశీలించడం ● కొన్ని సందర్భాలను తొలగించండి. ● ఇదేవిధమైన సమస్యను సాధించడం ● సాదృశ్యం గల మరిన్ని సమస్యలు సాధించడం ● సౌష్టవాన్ని వినియోగించడం ● ఉపకరణాన్ని ఉపయోగించడం ● ప్రత్యేక సందర్భాలు పరిశీలించడం ● సమస్యను వెనుకకు చూడడం ● ప్రత్యక్షకారణాలు వినియోగించడం

● సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం ● సమీకరణాన్ని సాధించడం ● చాతుర్యం ప్రదర్శించడం.

III. పథకాన్ని అమలు చేయడం (Carryout the plan)

పథకాన్ని రూపొందించడం కన్నా పథకాన్ని అమలు చేయడం సులభతరమైన పని. దీనికొరకు జాగ్రత్తతో కూడిన శ్రద్ధ అవసరం. దీనికొరకు ప్రత్యేక నైపుణ్యాలు కలిగి వుండాలి. పథకం వెంటనే అమలు కానప్పటికీ దృఢంగా ఉండాలి. ఇంకనూ పథకం నెరవేరకపోతే దానిని విడిచిపెట్టి కొత్త పథకానికి అమలు చేయడానికి ప్రయత్నించవలెను. ఇది మీరు తప్పుగా భావించనవసరం లేదు. ఎందుకంటే చాలా మంది గణిత శాస్త్రజ్ఞులు, వృత్తినిపుణులు ఇదే తరహాలో పథకాలను అమలు చేస్తారు.

IV. తిరిగి చూడడం (Look back)

ఒక సమస్యను సాధించిన పిదప సమస్యాసాధనను తిరిగి విశ్లేషిస్తే మనం చాలా విషయాలను గ్రహించవచ్చు. సమస్యకు మనం ఇచ్చిన సాధన ఏవిధంగా సత్యమైనదో సరిచూసుకోవచ్చు. ఇదే "గణిత శక్తి"ని పొందడానికి మూలాధారం. దీనినుండి మరిన్ని మంచి ఆలోచనలు రావడమే కాకుండా అపరిష్కృత సమస్యల సాధనకు దోహదపడుతుంది.

విషయసూచిక

జాతీయ గీతం

– రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

జనగణమన అధినాయక జయహే!

భారత భాగ్యవిధాతా!

పంజాబ,సింధ్, గుజరాత, మరాఠా,

ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగ!

వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగ!

ఉచ్ఛల జలధి తరంగ!

తవ శుభనామే జాగే!

తవ శుభ ఆశిష మాఁగే

గాహే తవ జయగాథా!

జనగణ మంగళదాయక జయహే!

భారత భాగ్య విధాతా!

జయహే! జయహే! జయహే!

జయ జయ జయ జయహే!!

ప్రతిజ్ఞ

– పైడిమర్రి వెంకట సుబ్బారావు

భారతదేశం నా మాతృభూమి, భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను, సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశపు వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను.

ప్రతి వారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను. జంతువుల పట్ల దయతో ఉంటాను.

నా దేశం పట్ల, నా ప్రజల పట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.

వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

అధ్యాయం **1**

అకరణీయ సంఖ్యలు

1.0 పరిచయం

ఒక్కొక్కటి ఐదురూపాయల చొప్పున సల్మా మూడు పెన్నులు, సతీష్ రెండు పెన్నులు కొనాలని ఒక టోకు దుకాణానికి వెళ్ళారు. ఐదు పెన్నులు గల ఒక ప్యాకెట్ వెల 22 రూపాయలని దుకాణాదారుడు చెప్పాడు. వారు ఒక పెన్నుల ప్యాకెట్ కొంటే ఒక్కొక్క పెన్ను వెల ఎంత?

ఒక పెన్ను వెల = $\frac{22}{5}$ రూపాయలు

ఈ పెన్ను వెలను పూర్ణాంకాలలో సూచించగలమా? ఈ పెన్ను వెలను సూచించగల ఏదయినా సహజసంఖ్య లేదా పూర్ణసంఖ్య ఉందా? మరొక ఉదాహరణను గమనించండి.

సిమ్లాలో ఒకరోజు వేరువేరు సమయాల్లో నమోదయిన ఉష్ణోగ్రతల వివరాలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. వీటిని పరిశీలించండి.

సమయము	ఉ॥ 10.00 గం.	మ. 12.00 గం	మ. 3.00 గం	రా 7.00 గం	రా 10.00 గం
ఉష్ణోగ్రత	11^{o} సెం.గ్రే	14^{o} సెం.గ్రే	17^{o} సెం.గ్రే	10^{o} సెం.గ్రే	5^{o} సెం.గ్రే

ప్రతి గంటకు ఉష్ణోగ్రతలలో మార్పును మీరు లెక్కించగలరా?

సందర్భం I ఉదయపు వేళలలో గంటకు ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు $\frac{14\,^{o}C - 11\,^{o}C}{2} = \frac{3}{2}^{o}$ సెం.గ్రే/గం

(ఉ. 10.00గం - మ12.00 గం)

సందర్భం II మధ్యాహ్నం వేళలలో గంటకు ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు $\frac{17\,^{o}C - 14\,^{o}C}{3} = 1^{o}$ సెం.గ్రే/గం

(మ. 12.00 గం. - మ. 3.00 గం.)

సందర్భం III సాయంత్రం వేళలలో గంటకు ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు $\frac{10\,^{o}C - 17\,^{o}C}{4} = \frac{-7}{4}^{o}$ సెం.గ్రే/గం

(మ. 3.00 గం. - రా. 7.00 గం.)

సందర్భం IV రాత్రి వేళలలో గంటకు ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు $\frac{5\,^{o}C - 10\,^{o}C}{3} = \frac{-5}{3}^{o}$ సెం.గ్రే/గం

(రా. 7.00 గం. - రా. 10.00 గం.)

పైన పేర్కొన్న వివిధ సందర్భాలలో మనం $\frac{3}{2}^{o}$ సెం.గ్రే, 1^{o} సెం.గ్రే, $\frac{-7}{4}^{o}$ సెం.గ్రే, $\frac{-5}{3}^{o}$ సెం.గ్రే లాంటి సంఖ్యలను గమనించాము.

ఉష్ణోగ్రతలను తెలుపుటకు ఉపయోగించిన $\frac{3}{2}, 1, \frac{-7}{4}, \frac{-5}{3}$ సంఖ్యలను ఏమని పిలుస్తారు?

వేరు వేరు రాశులను సూచించడానికి మనకు వివిధ రకాలయిన సంఖ్యలు అవసరం అవుతాయి. అలాంటి కొన్ని సంఖ్యలను గురించి ఇప్పుడు మనం చర్చిద్దాం.

$\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{-10}{17}, \frac{3}{-2}, \frac{2013}{2014},$ .... లాంటి కొన్ని సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

పై సంఖ్యలన్నీ p/q రూపంలో ఉన్నాయి.

p, q లు పూర్ణసంఖ్యలయి, $q \neq o$ ఇలా $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అని అంటారు. అకరణీయ సంఖ్యలను 'Q' అనే ఆంగ్ల అక్షరంతో సూచిస్తారు.

క్రింది వానిని గమనించండి.

5 అనే సహజసంఖ్యను $\frac{5}{1}$ లేదా $\frac{10}{2}$ లేదా $\frac{15}{3}$................ గా వ్రాయవచ్చు.

అదే విధంగా ఏ పూర్ణాంకాన్నయినా అకరణీయ సంఖ్యా రూపంలో వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణకు 0 ను $\frac{0}{1}$ లేదా $\frac{0}{2}$ లేదా $\frac{0}{5}$ .... గా వ్రాయవచ్చు.

-3 అనే పూర్ణసంఖ్యను $\frac{-3}{1}$ లేదా $\frac{-6}{2}$ .... గా వ్రాయవచ్చు.

అనగా $\frac{15}{3}, \frac{0}{5}, \frac{-6}{2}$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు.

పై పరిశీలనలనుంచి అన్ని సహజసంఖ్యలు, అన్ని పూర్ణాంకాలు, అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయి అని చెప్పవచ్చు.

ఇది చేయండి

కింది సంఖ్యలను పరిశీలించి వాటిని సరైన సంఖ్యాసమితికి ఎదురుగా రాయండి. (ఒక సంఖ్యను ఒకటి కంటే ఎక్కువ సంఖ్యాసమితుల కెదురుగా రాయవచ్చు).

$1, \frac{1}{2}, -2, 0.5, 4\frac{1}{2}, \frac{-33}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0.\overline{3}, 22, -5, \frac{2}{19}, 0.125.$

(i) సహజసంఖ్యలు ___ , ___ ___ ___ ___

(ii) పూర్ణాంకాలు ___, ___ ___ ___ ___

(iii) పూర్ణసంఖ్యలు ___, ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

(iv) అకరణీయసంఖ్యలు ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

పైన ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ఏదయినా అకరణీయ సంఖ్యల సమూహంలో రాకుండా మిగిలిపోయినదా? ఒకవేళ మిగిలితే కారణం తెలపండి.

ప్రతి సహజ సంఖ్య, ప్రతీ పూర్ణాంకము మరియు ప్రతీ పూర్ణసంఖ్య, అకరణీయ సంఖ్య యేనా ?

ప్రయత్నించండి

1. హమీద్ $\frac{5}{3}$ అకరణీయసంఖ్య అని 5 కేవలం సహజ సంఖ్య మాత్రమే అవుతుందని అన్నాడు. సాక్షి ఈ రెండు సంఖ్యలు అకరణీయసంఖ్యలు అని చెప్పింది. ఇద్దరి వాదనలో నీవు ఎవరితో ఏకీభవిస్తావు?
2. కింది ప్రవచనాలను తృప్తిపరిచే ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
   (i) సహజసంఖ్యలన్నీ పూర్ణాంకాలు అవుతాయి కాని దీని విపర్యయం సత్యంకాదు.
   (ii) పూర్ణాంకాలన్నీ పూర్ణసంఖ్యలవుతాయి కాని పూర్ణసంఖ్యలన్నీ పూర్ణాంకాలు కావు.
   (iii) పూర్ణసంఖ్యలన్నీ అకరణీయ సంఖ్యలే కాని అకరణీయ సంఖ్యలన్నీ పూర్ణసంఖ్యలు కావు.

అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ పరిక్రియలు గురించి మనం గత తరగతుల్లో నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు మనం అకరణీయ సంఖ్యలపై వివిధ ధర్మాలను గూర్చి చర్చిద్దాం.

1.2 అకరణీయసంఖ్యల ధర్మాలు

1.2.1 సంవృత ధర్మాలు:

సంవృతధర్మం అనగానేమి?

రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తం కూడా ఒక పూర్ణాంకం అయితే పూర్ణాంకాల సమితి సంకలనం దృష్ట్యా సంవృతధర్మాన్ని పాటిస్తుందని అంటాం. లేదా కూడిక పూర్ణాంకాలలో సంవృతం అని అంటాం.

(i) **పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలు**

మనం గత తరగతిలో నేర్చుకున్న పూర్ణసంఖ్యలు మరియు పూర్ణాంకాల ధర్మాలను ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. సరియయిన ఉదాహరణలు మరియు కారణాలతో కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

సంఖ్యాసమితి	పరిక్రియలు			
	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారము	భాగహారము
పూర్ణాంకాలు	సంవృతము ఎందుకంటే a, b లు పూర్ణాంకాలు అయిన a + b కూడా పూర్ణాంకమే. ఉదా:	సంవృతం కాదు. ఎందుకంటే 5–7 = –2. ఇక్కడ –2 పూర్ణాంకం కాదు	సంవృతం ఎందుకంటే	సంవృతం కాదు ఎందుకంటే $5 \div 8 = \frac{5}{8}$ ఇది పూర్ణాంకం కాదు
పూర్ణసంఖ్యలు		సంవృతము. ఎందుకంటే a, bలు ఏవేని రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయినా a – b ఒక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.	– – – – – –	సంవృతం కాదు ఎందుకంటే

(ii) అకరణీయ సంఖ్యలు - సంవృత ధర్మం

(a) సంకలనం :

ఏవయినా రెండు అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}$ లను తీసుకోండి.

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$$

ఇక్కడ ఫలితము $\frac{51}{56}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే.

$8+\left(\frac{-19}{2}\right) =$ _______ మొత్తము అకరణీయసంఖ్యయా?

$\frac{2}{7} + \frac{-2}{7} =$ ______ నీకు ఫలితం అకరణీయసంఖ్య వచ్చిందా?

ఇదేవిధంగా మరికొన్ని అకరణీయసంఖ్యల జతల మొత్తాలను కనుగొని ఫలితాన్ని సరిచూడండి.

> **∈ చెందినది, ∀ అన్నింటికి**
>
> సమితి A = {1, 2, 3} అనుకొనిన 3, Aలోని మూలకము దీనినే $3 \in A$ అని రాసి 3, A కు చెందును లేదా 3, A యొక్క మూలకము అని చదువుతాము.
>
> ∀ అనునది 'ప్రతి' లేక 'అన్ని' అనుదానికి గుర్తు $\forall\ a, b \in Q$, అంటే Q కి చెందిన ప్రతి a, b మూలకాలకు అని అర్థం.

$$3+\frac{5}{7}, \quad 0+\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2}+\frac{2}{7}$$

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఒక అకరణీయ సంఖ్యయే అవుతుందని మనం గమనించవచ్చు. కాబట్టి అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని చెప్పవచ్చు.

ఏవయినా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b లకు a + b ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

i.e., $\forall a, b \in Q$; $(a + b) \in Q$.

(b) వ్యవకలనం :

ఏవయినా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{5}{9}$ మరియు $\frac{3}{4}$ లను తీసుకుందాం.

ఇప్పుడు $\frac{5}{9}-\frac{3}{4} = \frac{5\times4-3\times9}{36} = \frac{20-27}{36} = \frac{-7}{36}$

ఇక్కడ $\frac{-7}{36}$ అనునది తిరిగి ఒక అకరణీయ సంఖ్య.(ఎందుకనగా −7, 36 లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు హారం 0 కి సమానం కాదు. కాబట్టి $\frac{-7}{36}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య).

ఈ ధర్మాన్ని క్రింది ఉదాహరణలతో సరిచూడండి.

(i) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} =$ ______________ ఒక అకరణీయ సంఖ్యయా?

(ii) $\left(\frac{48}{9}\right)-\frac{11}{18} =$ ______________ ఒక అకరణీయ సంఖ్యయా?

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల బేధం కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్యయే అవుతుందని మనం గమనించవచ్చు. కావున అకరణీయసంఖ్యలు వ్యవకలనం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని చెప్పవచ్చు. ఏవయినా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b లకు a–b ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

i.e., $\forall$ a, b $\in$ Q, (a–b) $\in$ Q

(c) గుణకారం

కింది వాటిని గమనించండి.

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{5} \times \frac{-11}{2} = \frac{-66}{10} = \frac{-33}{5}$$

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \_\_\_\_\_\_\_\_ ; \quad \frac{2}{1} \times \frac{19}{13} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

పై అన్ని సందర్భాలలోనూ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం తిరిగి ఒక అకరణీయ సంఖ్య కావటం మనం గమనించవచ్చు.

మీకు నచ్చిన మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యల జతల లబ్ధాలను గుణించి లబ్ధాలు అకరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయో లేదో సరిచూడండి. లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య కాని రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు చెప్పగలవా?

పై ఉదాహరణల నుంచి అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మం పాటిస్తాయని మనం గమనించవచ్చు. ఏవయినా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b లకు a × b ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

$$\forall\, a, b \in Q, \quad a \times b \in Q$$

(d) భాగహారం

రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{7}{8}$ లను తీసుకుందాం.

$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$$ ఇది అకరణీయసంఖ్యయేనా?

మరో రెండు ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

$$\frac{5}{7} \div 2 = \frac{5}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$$

$$-\frac{2}{3} \div \frac{6}{11} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను భాగిస్తే తిరిగి అకరణీయ సంఖ్యయే లభిస్తుంది అని పై ఉదాహరణల నుండి మనం గమనించవచ్చు.

అయితే అకరణీయ సంఖ్యల సమితి భాగహారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుందని మనం చెప్పవచ్చా ?

కింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

0, 5 లు అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు $5 \div 0 = \frac{5}{0}$ ను నిర్వచించలేము.

ఈ సందర్భంలో అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటించడం లేదు. కాబట్టి సున్నా తప్ప మిగిలిన అకరణీయ సంఖ్యల సమితి Q భాగహారం దృష్ట్యా సంవృతధర్మం పాటిస్తుంది అని చెప్పవచ్చు.

> $\frac{5}{0}$ ను ఎందుకు నిర్వచించలేము.
>
> $5 \div 0$ అనగా 0) 5 (?
>
> ఈ భాగహారాన్ని పూర్తి చేయగలవా?
>
> అయితే భాగఫలము / విభక్తము ఎంత? ఏ సంఖ్యనైనను '0' గుణిస్తే లబ్ధము '0' నే వస్తుంది. కావున 0తో భాగహారము అసాధ్యము.

ప్రయత్నించండి.

పూర్ణసంఖ్యల నుంచి సున్నాను మినహాయిస్తే అది భాగహారం దృష్ట్యా సంవృతధర్మం పాటిస్తుందా? ఇదేవిధంగా సహజసంఖ్యా సమితిలో సున్నాలేదు కాబట్టి సహజ సంఖ్యల సమితి భాగహారం దృష్ట్యా సంవృతధర్మం పాటిస్తుందా?

ఇది చేయండి.

కింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.

సంఖ్యలు	కింది పరిక్రియల దృష్ట్యా సంవృతధర్మం			
	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారం	భాగహారం
సహజసంఖ్యలు	అవును	—	—	—
పూర్ణాంకాలు	—	—	—	కాదు
పూర్ణసంఖ్యలు	—	అవును	—	—
అకరణీయసంఖ్యలు	—	—	అవును	—

1.2.2. స్థిత్యంతరధర్మం

పూర్ణాంకాలు, పూర్ణసంఖ్యలు ఏయే పరిక్రియల దృష్ట్యా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటిస్తాయో గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

రెండు సంఖ్యల మధ్య చేయు పరిక్రియల ఫలితము ఆ సంఖ్యల క్రమముపై ఆధారపడ నిచో అది వినిమయ పరిక్రియ అందురు.

సంకలన పరిక్రియలో $a + b = b + a$

గుణకార పరిక్రియలో $a \times b = b \times a$

(i) పూర్ణాంకాలు :

పరిక్రియలు	ఉదాహరణలు	వ్యాఖ్య
సంకలనం	2, 3 లు పూర్ణాంకాలు $2+3 = 5$ మరియు $3 + 2 = 5$ $\therefore 2 + 3 = 3 + 2$	పూర్ణాంకాలు సంకలనం దృష్ట్యా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
వ్యవకలనం	$3 - 2$ మరియు $2 - 3$ లు సమానమేనా ?	వ్యవకలనం స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించదు.
గుణకారము	------	------
భాగహారము	$4 \div 2 = ?$ $2 \div 4 = ?$ $4 \div 2$; $2 \div 4$ లు సమానమేనా?	-------

(ii) పూర్ణసంఖ్యలు

పరిక్రియలు	ఉదాహరణలు	వ్యాఖ్య
సంకలనం	---	సంకలనం పూర్ణసంఖ్యలలో వినిమయమవుతుంది.
వ్యవకలనం	2, 3 లు పూర్ణసంఖ్యలు $2-3=?$ $3-2=?$ $2-3$ మరియు $3-2$ సమానమేనా?	....
గుణకారము	—	—
భాగహారము	...	భాగహారము పూర్ణసంఖ్యలలో వినిమయముకాదు.

(iii) అకరణీయ సంఖ్యలు

(a) సంకలనం

రెండు అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}$ తీసుకుందాం.

$$\frac{5}{2}+\frac{(-3)}{4} = \frac{2\times5+1\times(-3)}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

మరియు $\frac{(-3)}{4}+\frac{5}{2} = \frac{1\times(-3)+2\times5}{4} = \frac{-3+10}{4} = \frac{7}{4}$

కాబట్టి $\frac{5}{2}+\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4}+\frac{5}{2}$

మరికొన్ని కింది అకరణీయ సంఖ్యల జతలు తీసుకొని ఈ నియమాన్ని సరిచూడండి.

$\frac{1}{2}+\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{5}{7}+\frac{1}{2}$ లను కనుగొనండి.

$\frac{1}{2}+\frac{5}{7} = \frac{5}{7}+\frac{1}{2}$ అవుతుందా?

$\frac{-2}{3}+\left(\frac{-4}{5}\right)$ మరియు $\frac{(-4)}{5}+\left(\frac{-2}{3}\right)$ లు సమానమేనా ?

సంఖ్యల క్రమం మార్చినప్పుడు మొత్తం మారిపోయేటట్లున్న రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను చెప్పగలవా?

a, b లు ఏవయినా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే $a+b=b+a$ అవుతుందని మనం గమనించవచ్చు.

కాబట్టి సంకలనం అనేది అకరణీయసంఖ్యలలో స్థిత్యంతరం అని లేదా అకరణీయ సంఖ్యాసమితి సంకలనం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుందని చెప్పవచ్చు.

$\forall\, a, b \in Q,\ a + b = b + a$

(b) **వ్యవకలనం :** రెండు అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{7}{8}$ తీసుకుందాం.

$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24}$ మరియు $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$

కాబట్టి $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

కింది వానిని పరిశీలించండి.

$2 - \frac{5}{4}$ మరియు $\frac{5}{4} - 2$ లు సమానమేనా ?

$\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ అవుతుందా?

పై పరిశీలనల నుంచి అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర లేదా వినిమయధర్మాన్ని పాటించవని తెలుసుకున్నాం.

a, b లు ఏవయినా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలయితే $a - b \neq b - a$.

(c) **గుణకారం:** రెండు అకరణీయసంఖ్యలు $2, -\frac{5}{7}$ లను తీసుకుందాం.

$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7}$; $\frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7}$ కాబట్టి $2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$

$\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$ అవుతుందా ?

మరికొన్ని అకరణీయసంఖ్యలు తీసుకొని ఈ నియమాన్ని సరిచూడండి. అకరణీయసంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయధర్మాన్ని పాటిస్తాయని చెప్పవచ్చు.

అనగా a, b లు ఏవయినా రెండు అకరణీయసంఖ్యలయితే $a \times b = b \times a$ అవుతుంది.

i.e. $\forall\, a, b \in Q,\ a \times b = b \times a$

(d) **భాగహారం**

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9}$ మరియు $\frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$ లు సమానమేనా ?

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{14}_{2}} = \frac{3}{2}$ మరియు $\frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \times \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{7}_{1}} = \frac{2}{3}$

కాబట్టి $\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$

దీని నుండి అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారం దృష్ట్యా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటించవు అని చెప్పవచ్చు.

ఇవిచేయండి.

కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

సంఖ్యలు	స్థిత్యంతరధర్మం కింది పరిక్రియలదృష్ట్యా			
	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారం	భాగహారము
సహజసంఖ్యలు	అవును	కాదు	అవును	—
పూర్ణాంకాలు	—	—	—	కాదు
పూర్ణసంఖ్యలు	—	—	—	—
అకరణీయసంఖ్యలు	—	—	—	కాదు

1.2.3 సహచరధర్మము

మనం గత తరగతులలో నేర్చుకున్న సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగహరాల దృష్ట్యా పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యల సహచర ధర్మాలను ఒకసారి గుర్తు చేసుకుందాం.

సంకలన సహచరధర్మములు ఏవైనా మూడు సంఖ్యలను సంకలనం చేసే సందర్భంలో మొదటి రెండు సంఖ్యల మొత్తానికి మూడవ సంఖ్యను కలిపినా మొదటి సంఖ్యకు చివరి రెండు సంఖ్యల మొత్తాన్ని కలిపినా ఫలితం ఒక్కటే ఉదా॥ $(3+2)+5=3+(2+5)$.

(i) పూర్ణాంకాలు :

కింది పట్టికను సరియయిన ఉదాహరణలు మరియు వ్యాఖ్యలతో పూరించండి.

పరిక్రియలు	ఉదాహరణలు	వ్యాఖ్య
సంకలనం	$2 + (3 + 0) = (2 + 3) + 0$? $2 + (3 + 0) = 2 + 3 = 5$ $(2 + 3) + 0 = 5 + 0 = 5$ $\Rightarrow 2 + (3 + 0) = (2 + 3) + 0$ ఏవయినా మూడు అకరణీయసంఖ్యలు a, b, c లకు $a + (b + c) = (a + b) + c$	
వ్యవకలనం	$(2-3) - 2 = ?\ \ 2-(3-2) = ?$ $(2-3) - 2 = 2-(3-2)$ అవుతుందా?	వ్యవకలనం సహచరం కాదు.
గుణకారం	-	గుణకారం సహచరం అవుతుంది.
భాగహారం	$2 \div (3 \div 5) = (2 \div 3) \div 5$? $2 \div (3 \div 5) = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ $(2 \div 3) \div 5 = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ $2 \div (3 \div 5) \neq (2 \div 3) \div 5$	భాగహారం సహచరం కాదు

(ii) పూర్ణసంఖ్యలు

చతుర్విధ ప్రక్రియల ద్వారా పూర్ణసంఖ్యలలో సహచర ధర్మాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం. కింది పట్టికను సరైన వ్యాఖ్యలతో పూరించండి.

పరిక్రియలు	ఉదాహరణలు	వ్యాఖ్య
సంకలనం	$2 + [(-3) + 5)] = [(2 + (-3)] + 5$ అవుతుందా? $2+\left[(-3)+5\right]=2+[-3+5]=2+2=4$ $\left[2+(-3)\right]+5=[2-3]+5=-1+5=4$ ఏవయినా మూడు పూర్ణసంఖ్యలు a, b, c లకు $a + (b + c) = (a + b) + c$	
వ్యవకలనం	$6 - (9 - 5) = (6 - 9) - 5$ అవుతుందా?	
గుణకారం	$2\times[7\times(-3)] = (2\times7) \times (-3)$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.	
భాగహారం	$10 \div \left[2\div(-5)\right] = [10 \div 2]\div(-5)$ అవుతుందా? $10 \div \left[2\div(-5)\right] = 10\div\dfrac{-2}{5}=10\times\dfrac{-5}{2}=-25$ అదేవిధంగా $(10 \div 2) \div(-5) = \dfrac{10}{2}\div-5 = 5\div-5=\dfrac{5}{-5}=-1$ కావున $10 \div\left[2\div(-5)\right] \neq [10\div2] \div(-5)$	

(iii) అకరణీయ సంఖ్యలు - సహచర ధర్మం

(a) సంకలనం

ఏవయినా మూడు అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{2}{7}, 5, \frac{1}{2}$ తీసుకుందాం.

$$\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{L.H.S.}\quad \frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{7}+\left[5+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{7}+\left[\frac{10+1}{2}\right]=\frac{4+77}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{R.H.S.}\quad \left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{2+35}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{37}{7}+\frac{1}{2}=\frac{74+7}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

$\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\frac{4}{3}\right]$ మరియు $\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)$ విలువలు కనుగొనండి.

ఈ రెండు మొత్తాలు సమానమేనా?

మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొని సహచరధర్మాన్ని పరీక్షించండి.

అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం దృష్ట్యా సహచరధర్మాన్ని పాటిస్తాయని మనం తెలుసుకోవచ్చు.

ఏవయినా మూడు అకరణీయసంఖ్యలు a, b మరియు c లకు

$a + (b + c) = (a + b) + c$

i.e., $\forall$ a, b, c $\in$ Q, $a + (b + c) = (a + b) + c$

(b) వ్యవకలనం

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ మరియు $\frac{-5}{4}$ లు ఏవయినా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు

$\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right]$ మరియు $\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right]-\left(\frac{-5}{4}\right)$ లు సమానమేనా ?

$$\text{L.H.S. } \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right]=\frac{1}{2}-\left[\frac{8}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}-2=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

$$\text{R.H.S. } \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right) = \left(\frac{1\times 2-3}{4}\right)+\frac{5}{4}=\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{5}{4}$$

$$= \frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\therefore \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] \neq \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right)$$

L.H.S. $\neq$ R.H.S.

అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనం దృష్ట్యా సహచరధర్మాన్ని కలిగి ఉండవు అని మనం చెప్పవచ్చు.

i.e., ఏవయినా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b, c లకు $a-(b-c) \neq (a-b) - c$.

(c) గుణకారము

మూడు అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ మరియు $\frac{-5}{7}$ లను తీసుకుందాం.

$\frac{2}{3}\times\left[\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{7}\right)\right]=\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{-5}{7}\right)$ అవుతుందా?

$$\text{L.H.S} = \frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{-20}{49}\right] = \frac{-40}{147}$$

$$\text{R.H.S} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

క్రిందివి సరిచూచండి.

$2\times\left(\frac{1}{2}\times 3\right)$ మరియు $\left(2\times\frac{1}{2}\right)\times 3$ లను కనుక్కొండి.

$2\times\left(\frac{1}{2}\times 3\right) = \left(2\times\frac{1}{2}\right)\times 3$ అవుతుందా?

$\frac{5}{3}\times\left(\frac{3}{7}\times\frac{7}{5}\right)$ మరియు $\left(\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}\right)\times\frac{7}{5}$ లను కనుక్కొండి.

$\frac{5}{3}\times\left(\frac{3}{7}\times\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}\right)\times\frac{7}{5}$ అవుతుందా ?

పై అన్ని సందర్భాలలో L.H.S = R.H.S అవుతుందని కనుగొంటాము.

కాబట్టి అకరణీయసంఖ్యలలో గుణకారం సహచరం అవుతుంది అని చెప్పవచ్చు.

ఏవయినా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b మరియు c లకు

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

i.e., $\forall\, a, b, c \in Q,\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(d) భాగహారం

మూడు అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ మరియు $\frac{1}{7}$ లను తీసుకుందాం.

$\frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7}$ అవుతుందా ?

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\times\frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3}\div\frac{21}{4} = \frac{2}{3}\times\frac{4}{21} = \frac{8}{63}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\div\frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right)\div\frac{1}{7} = \frac{8}{9}\times\frac{7}{1} = \frac{56}{9}$$

$$\frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7}$$

$$\text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

కావున a, b, c లు మూడు అకరణీయ సంఖ్యలకు $a\div(b\div c) \neq (a\div b)\div c$

అకరణీయసంఖ్యలలో భాగహారం దృష్ట్యా సహచరధర్మం లేదు.

ఇది చేయండి.

కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

సంఖ్యలు	కింది పరిక్రియల దృష్ట్యా సహచరన్యాయం			
	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారం	భాగహారం
సహజసంఖ్యలు	అవును	కాదు	—	—
పూర్ణాంకాలు	—	—	—	కాదు
పూర్ణసంఖ్యలు	—	కాదు	అవును	—
అకరణీయసంఖ్యలు	—	—	—	—

1.2.4 సున్న (Zero) యొక్క పాత్ర

$\frac{1}{2}$ కు ఏ సంఖ్యను కలిపితే ఫలితము $\frac{1}{2}$ వస్తుందో చెప్పగలవా?

ఒక అకరణీయ సంఖ్యకు '0' కలిపితే ఆ అకరణీయ సంఖ్యలో మార్పు ఉండదు

ఉదాహరణకు

$1 + 0 = 1$ మరియు $0 + 1 = 1$

$-2 + 0 = -2$ మరియు $0 + (-2) = -2$

అలాగే $\frac{11}{3} + 0 = \frac{11}{3}$ మరియు $0 + \frac{11}{3} = \frac{11}{3}$

ఒక అకరణీయసంఖ్యకు సున్నాను కలిపినా అదే అకరణీయ సంఖ్య వస్తుంది. కావున '0' ను సంకలన తత్సమాంశము అని అంటారు.

' **a** ' ఏదయినా ఒక అకరణీయసంఖ్య అయితే $a + 0 = a = 0 + a$

సహజసంఖ్యాసమితి సంకలన తత్సమాంశంను కలిగివుందా?

1.2.5 '1' యొక్క పాత్ర

కింది ఇవ్వబడిన ఖాళీ బాక్సులను పూరించండి.

$3 \times \square = 3$ మరియు $\square \times 3 = 3$

$-2 \times \square = -2$ మరియు $\square \times -2 = -2$

$\frac{7}{8} \times \square = \frac{7}{8}$ మరియు $\square \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

పై గుణకారములలో నీవు ఏమి పరిశీలించావు?

ఒక అకరణీయ సంఖ్యను '1' చే గుణిస్తే వాటి లబ్ధం అదేసంఖ్య వస్తుందని గమనించావా?

ఇక్కడ 1 ను మనం అకరణీయసంఖ్యలలో గుణకార తత్సమాంశం అని అంటాం.

పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకార తత్సమాంశం ఏది?

గుణకారతత్సమాంశ ధర్మాన్ని వివిధ సందర్భాలలో మనకు తెలియకుండానే ఉపయోగిస్తుంటాము.

ఈ కింది ఉదాహరణను గమనించండి.

$\frac{15}{50}$ ని సూక్ష్మ రూపంలో వ్రాయండి.

$$\frac{15}{50} = \frac{3\times5}{10\times5} = \frac{3}{10}\times\frac{5}{5} = \frac{3}{10}\times1 = \frac{3}{10}$$

$\frac{3}{10}\times1 = \frac{3}{10}$ అని రాసేటప్పుడు మనం గుణకార తత్సమాంశ ధర్మాన్ని ఉపయోగించాము.

1.2.6 విలోమ అస్థిత్వము

(i) సంకలనవిలోమము :

$3 + (-3) = 0$ మరియు $-3 + 3 = 0$

$-5 + 5 = 0$ మరియు $5 + (-5) =$ ______

$\frac{2}{3} + ? = 0$ మరియు ______ $+ \frac{2}{3} = 0$

$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0$ మరియు $? + \left(-\frac{1}{2}\right) =$ ______

3 మరియు (–3) ల మొత్తం సున్న. కాబట్టి 3 మరియు –3 లను ఒకదానికి ఒకటి సంకలన విలోమాలు అని అంటాము. ఏవయినా రెండు సంఖ్యల మొత్తం సున్నా అయితే ఆ రెండు సంఖ్యలను పరస్పరం సంకలన విలోమాలు అని అంటారు. సాధారణంగా 'a' ఏదేని ఒక అకరణీయసంఖ్యకు

$a + (-a) = 0$ మరియు $(-a) + a = 0$ అయిన **a, –a** లు పరస్పర సంకలన విలోమాలు.

సున్నా యొక్క సంకలన విలోమము ఎంత?

$0 + 0 = 0$ కావున 0 యొక్క సంకలన విలోమము 0.

(ii) గుణకారవిలోమము :

లబ్ధం 1 కావడానికి $\frac{2}{7}$ అనే అకరణీయసంఖ్యను ఏ అకరణీయ సంఖ్యచే గుణించాలి ?

$\frac{2}{7}\times\frac{7}{2} = 1$ మరియు $\frac{7}{2}\times\frac{2}{7} = 1$ అని మనం గమనించవచ్చు.

కింది గడులను పూరించండి.

$2 \times \square = 1$ మరియు $\square \times 2 = 1$

$-5 \times \square = 1$ మరియు $\square \times 5 = 1$

$\frac{-17}{19} \times \square = 1$ మరియు $\square \times \frac{-17}{19} = 1$

$1 \times ? = 1$

$-1 \times ? = 1$

ఏవైన రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 1 అయితే ఆ రెండు సంఖ్యలను పరస్పరం గుణకారవిలోమాలు అని అంటారు.

ఉదాహరణకు $4 \times \frac{1}{4} = 1$ మరియు $\frac{1}{4} \times 4 = 1$

కావున 4 మరియు $\frac{1}{4}$ లు రెండూ ఒకదానికొకటి గుణకార విలోమాలు లేదా వ్యుత్క్రమాలు అవుతాయి.

ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{c}{d}$ మరొక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ కు గుణకార విలోమము అయితే $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ మరియు $\frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = 1$

ఆలోచించి చర్చించి వ్రాయండి.

1. సంకలనం దృష్ట్యా అకరణీయ సంఖ్యలు పాటించు ప్రతిధర్మము పూర్ణసంఖ్యలు కూడా పాటిస్తాయా? ఏది అవుతుంది? ఏది కాదు?
2. ఏయే సంఖ్యల గుణకార విలోమాలు అవే సంఖ్యలవుతాయి ? లేదా తనకు తానే గుణకార విలోమాలగు సంఖ్యలు ఏవి?
3. సున్న (0) యొక్క వ్యుత్క్రమము నీవు కనుగొనగలవా ? 0 చే గుణించగా లబ్ధం 1 వచ్చే ఏదయినా అకరణీయ సంఖ్య కలదా ?

$\square \times 0 = 1$ లేదా $0 \times \square = 1$

1.3 విభాగన్యాయము (సంకలనంపై గుణకార విభాగము)

ఏవైన మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ లను తీసుకొందాం.

$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$ అగునేమో ఒకసారి చూద్దాం.

$$\text{L.H.S.}\quad \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{5}\times\left(\frac{2+3}{4}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$$\text{R.H.S.}\quad \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{10}+\frac{6}{20}=\frac{4+6}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

కాబట్టి $\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$

ఈ ధర్మాన్ని సంకలనంపై గుణకార విభాగన్యాయం అని అంటారు.

ప్రయత్నించండి: విభాగన్యాయము ఉపయోగించి క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

(1) $\left\{\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{10}\right)\right\}+\left\{\frac{7}{5}\times\frac{9}{10}\right\}$

(2) $\left\{\frac{9}{16}\times 3\right\}+\left\{\frac{9}{16}\times -19\right\}$

$\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)$ అవుతుందా?

సరిచూడండి.

ఈ ధర్మాన్ని వ్యవకలనంపై గుణకార విభాగన్యాయం అని అంటారు. మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలతో విభాగన్యాయాన్ని సరిచూడండి. ఏవయినా మూడు అకరణీయసంఖ్యలు a, b, c లకు

$a(b+c) = ab + ac$

$a(b-c) = ab - ac$ అవుతుంది.

ఇవి చేయండి

క్రింది పట్టికను పూరించండి.

సంఖ్యలు	సంకలన ధర్మాలు				
	సంవృత	స్థిత్యంతరం	సహచరం	తత్సమాంశం	విలోమం
అకరణీయ సంఖ్యలు	అవును	—	—	—	—
పూర్ణసంఖ్యలు	అవును	—	—	—	—
పూర్ణాంకాలు	—	—	—	అవును	కాదు
సహజసంఖ్యలు	అవును	—	—	—	—

కింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.

సంఖ్యలు	గుణకార ధర్మాలు				
	సంవృత	స్థిత్యంతరం	సహచరం	తత్సమాంశం	విలోమం
అకరణీయ సంఖ్యలు	అవును	—	—	—	—
పూర్ణసంఖ్యలు	—	అవును	—	—	—
పూర్ణాంకాలు	—	—	అవును	—	—
సహజసంఖ్యలు	—	—	—	అవును	—

ఉదాహరణ 1. $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{-6}{5}+\frac{-13}{7}$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

సాధన: సజాతి భిన్నాలు ప్రక్కప్రక్కన ఉండునట్లుగా మార్చగా

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{-6}{5}+\frac{-13}{7}=\left(\frac{2}{5}+\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}+\frac{-13}{7}\right)$$ ($\because$ సంకలనంపై స్థిత్యంతరన్యాయం)

$$=\frac{2+(-6)}{5}+\frac{3+(-13)}{7}=\frac{2-6}{5}+\frac{3-13}{7}$$

$$=\frac{-4}{5}+\frac{-10}{7}=\frac{-4}{5}-\frac{10}{7}$$

$$=\frac{-4\times7-10\times5}{35}=\frac{-28-50}{35}=\frac{-78}{35}$$

ఉదాహరణ 2: కింది అకరణీయ సంఖ్యల సంకలన విలోమాలు వ్రాయండి.

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-11}{5}$ (iii) $\frac{7}{-13}$ (iv) $\frac{-2}{-3}$

సాధన : (i) $\frac{2}{7}$ యొక్క సంకలన విలోమము $\frac{-2}{7}$

ఎందుకంటే $\frac{2}{7}+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{2-2}{7}=0$

(ii) $\frac{-11}{5}$ యొక్క సంకలన విలోమము $-\left(\frac{-11}{5}\right)=\frac{11}{5}$

(iii) $\frac{7}{-13}$ యొక్క సంకలన విలోమము $-\left(\frac{7}{-13}\right) = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$

(iv) $\frac{-2}{-3}$ యొక్క సంకలన విలోమము $-\left(\frac{\cancel{-}2}{\cancel{-}3}\right) = -\frac{2}{3}$

ఉదాహరణ 3 : $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$ ను కనుగొనండి.

సాధన : $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

(సంకలన వినిమయ ధర్మం)

$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-1}{9}\right) + \left(\frac{-1}{9}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

$= \frac{-1}{9}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{23}{180}$

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{8+15}{20}\right) + \frac{23}{180}$ (విభాగన్యాయం)

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{23}{20}\right) + \frac{23}{180} = \frac{-23}{180} + \frac{23}{180} = 0$ ($\because$ సంకలన విలోమ ధర్మం)

ఉదాహరణ 4: $\frac{-9}{2}$ మరియు $\frac{5}{18}$ ల వ్యుత్క్రమాల లబ్ధానికి $\left(\frac{-4}{5}\right)$ యొక్క సంకలనవిలోమాన్ని కూడగా వచ్చే ఫలితం ఎంత?

సాధన : $\frac{-9}{2}$ యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{-2}{9}$

$\frac{5}{18}$ యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{18}{5}$

వ్యుత్క్రమముల లబ్ధం $= \frac{-2}{\cancel{9}_{1}} \times \frac{\cancel{18}^{2}}{5} = \frac{-4}{5}$

$\left(\frac{-4}{5}\right)$ యొక్క సంకలన విలోమం $\frac{4}{5}$

వ్యుత్క్రమముల లబ్ధం + సంకలన విలోమం $= \frac{-4}{5}+\frac{4}{5}=0$ (సంకలన విలోమధర్మం)

అభ్యాసం - 1.1

1. కింది ఉదాహరణలలో ఉన్న ధర్మాలను గుర్తించి వ్రాయండి.

   (i) $\frac{8}{5}+0=\frac{8}{5}=0+\frac{8}{5}$ (ii) $2\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{3}{5}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)$

   (iii) $\frac{3}{7}\times 1=\frac{3}{7}=1\times\frac{3}{7}$ (iv) $\left(\frac{-2}{5}\right)\times 1=\frac{-2}{5}=1\times\left(\frac{-2}{5}\right)$

   (v) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{5}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{14}$

   (vii) $7a + (-7a) = 0$ (viii) $x\times\frac{1}{x}=1\ (x\neq 0)$

   (ix) $(2 \times x) + (2 \times 6) = 2 \times (x + 6)$

2. కింది వాటికి సంకలన మరియు గుణకార విలోమాలు వ్రాయండి.

   (i) $\frac{-3}{5}$ (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{7}{9}$ (v) -1

3. కింది ఖాళీలను పూరించండి.

   (i) $\left(\frac{-1}{17}\right)+(\_\_\_\_\_)=\left(\frac{-12}{5}\right)+\left(\frac{-1}{17}\right)$ (ii) $\frac{-2}{3}+\_\_\_\_=\frac{-2}{3}$

   (iii) $1\times\_\_\_\_\_=\frac{9}{11}$ (iv) $-12+\left(\frac{5}{6}+\frac{6}{7}\right)=\left(-12+\frac{5}{6}\right)+(\_\_\_\_)$

   (v) $(\_\_\_\_)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\_\_\_\_\right)$

   (vi) $\frac{-16}{7}+\_\_\_\_=\frac{-16}{7}$

4. $\frac{2}{11}$ ను $\frac{-5}{14}$ యొక్క గుణకార విలోమముతో గుణించండి.

5. $\frac{2}{5}\times\left(5\times\frac{7}{6}\right)+\frac{1}{3}\times\left(3\times\frac{4}{11}\right)$ యొక్క గణనలో ఏయే ధర్మాలను ఉపయోగిస్తాము.

6. కింది సమానత్వాన్ని సరిచూడండి.

$$\left(\frac{5}{4}+\frac{-1}{2}\right)+\frac{-3}{2}=\frac{5}{4}+\left(\frac{-1}{2}+\frac{-3}{2}\right)$$

7. $\frac{3}{5}+\frac{7}{3}+\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)$ విలువను పదాల అమరికను మార్చి సూక్ష్మీకరించండి.

8. కింది వాటి వ్యవకలనం చేయండి.

(i) $\frac{1}{3}$ నుండి $\frac{3}{4}$ (ii) 2 నుండి $\frac{-32}{13}$ (iii) $\frac{-4}{7}$ నుండి -7

9. $\frac{-5}{8}$ కు ఎంత కలిపినా $\frac{-3}{2}$ వచ్చును ?

10. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం 8. వాటిలో ఒక సంఖ్య $\frac{-5}{6}$ అయితే రెండవ సంఖ్య ఎంత?

11. వ్యవకలనం దృష్ట్యా అకరణీయ సంఖ్యలు సహచరధర్మాన్ని పాటిస్తాయా ? ఒక ఉదాహరణతో వివరించండి.

12. $-(-x) = x$ ను కింది విలువలకు సరిచూడండి.

(i) $x=\frac{2}{15}$ (ii) $x=\frac{-13}{17}$

13. కింది వానికి జవాబులు వ్రాయండి.

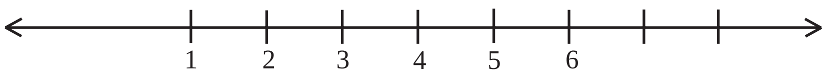
(i) సంకలన తత్సమాంశం కలిగి వుండని సమితి ఏది ?

(ii) గుణకార విలోమము లేని అకరణీయ సంఖ్య ఏది?

(iii) ఋణ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క గుణకార విలోమము ?

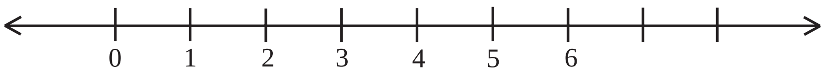
1.4 అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించడం

గాయత్రి ఒక సంఖ్యారేఖను గీసి దానిపై కొన్ని సంఖ్యలను గుర్తించింది.

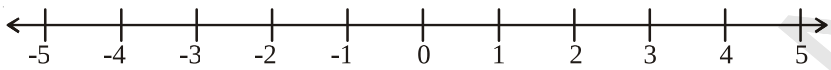


గాయత్రి ఏ సంఖ్యాసమితిని సంఖ్యారేఖపై సూచించింది ?

సుజాత సంఖ్యారేఖపైన ఉన్నవి సహజసంఖ్యలని చెప్పింది. పరమేశ్ సంఖ్యారేఖపై ఉన్నవి అకరణీయ సంఖ్యలని చెప్పాడు. ఎవరి వాదనతో నీవు ఏకీభవిస్తావు ?



పైసంఖ్యారేఖపై సూచించిన సంఖ్యలు ఏవి? అవి పూర్ణాంకాలా? అకరణీయ సంఖ్యలా?



పై సంఖ్యారేఖపై సూచించిన సంఖ్యలేవి ?

పై సంఖ్యారేఖపై $-5, 3$ ల మధ్య ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలు కలవా ?

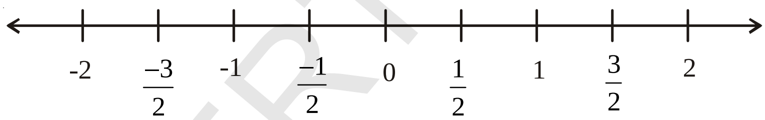
సంఖ్యారేఖపై $0, 1$ లేదా $-1, 0$ ల మధ్య ఏవైనా పూర్ణ సంఖ్యలున్నాయా ?

$0, 1$ ల మధ్య సంఖ్య $\frac{1}{2}$

1 మరియు 2 ల మధ్య సంఖ్య $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 0 మరియు -1 ల మధ్య సంఖ్య $-\frac{1}{2}$

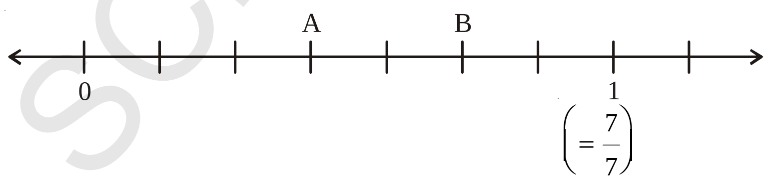
-1 మరియు -2 ల మధ్య సంఖ్య $-1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ లను సంఖ్యారేఖపై ఈ కింది విధంగా సూచించవచ్చు.



సంఖ్యారేఖపై ఏ అకరణీయ సంఖ్య నయినా సూచించవచ్చు. ఒక అకరణీయ సంఖ్యలో హారము అనేది సంఖ్యారేఖపై ప్రతి యూనిట్ ఎన్ని విభాగాలుగా విభజించారు అనే దానిని తెలుపుతుంది. మరియు అకరణీయ సంఖ్యలోని లవము ఆ విభాగాలలో ఎన్నింటిని తీసుకున్నాము అనే విషయాన్ని తెలియజేస్తుంది.

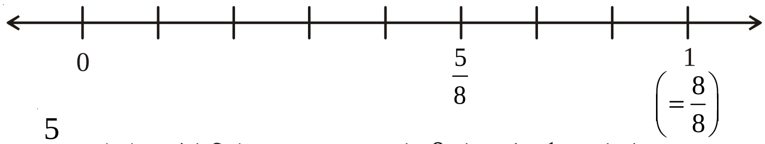
ఉదాహరణ 5: కింది సంఖ్యారేఖపై గల A, B లు ఏ అకరణీయ సంఖ్యలను సూచిస్తాయి ?



సాధన : ఇక్కడ 0 నుంచి 1 వరకుగల యూనిట్‌ను 7 సమాన విభాగాలుగా విభజించాం. A అనునది 7 విభాగాలలో 3వ విభాగాన్ని సూచిస్తుంది. కాబట్టి A అనునది $\frac{3}{7}$ ను సూచిస్తుంది. అదేవిధంగా B అనునది $\frac{5}{7}$ ను సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 6: $\frac{5}{8}$ ని సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

సాధన :



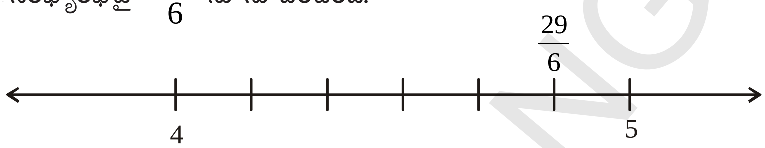
$\frac{5}{8}$ అనునది క్రమభిన్నం. దాని విలువ 0 మరియు 1 ల మధ్య ఉంటుంది.

హారము 8 కాబట్టి సంఖ్యారేఖపై 0 మరియు 1 ల మధ్య దూరాన్ని 8 సమాన విభాగాలుగా చేయండి.

సున్నా నుంచి 5వ విభాగము (లవం) మనకు కావలసిన అకరణీయ సంఖ్య $\frac{5}{8}$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 7: సంఖ్యారేఖపై $\frac{29}{6}$ ను సూచించండి.

సాధన:



$$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6} = 4+\frac{5}{6}.$$

కావున $\frac{29}{6}$ అనునది 4 మరియు 5 ల మధ్య ఉంటుంది.

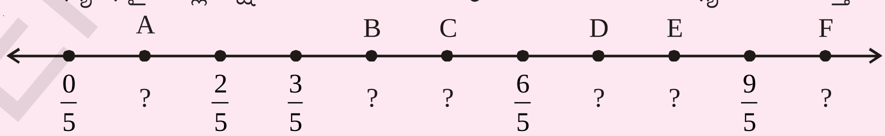
4 మరియు 5 ల మధ్య గల సంఖ్యారేఖను 6 (హారం) సమాన భాగాలుగా విభజించాం.

4 నుంచి కుడివైపునకు 5 వ విభాగాన్ని $4\frac{5}{6} = \frac{29}{6}$ గా సూచించవచ్చు..

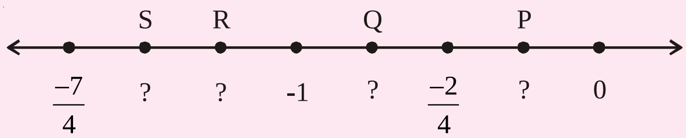
ప్రయత్నించండి.

కింది సంఖ్యారేఖపై ఆంగ్ల అక్షరాల సూచించే బిందువులు ఏ అకరణీయ సంఖ్యలను సూచిస్తాయి.

(i)



(ii)



ఇది చేయండి.

(i) $-\frac{13}{5}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

1.5 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్య

కింది వానిని పరిశీలించండి.

1 మరియు 5 ల మధ్య గల సహజ సంఖ్యలు 2, 3, 4.

1 మరియు 2 ల మధ్య ఏవైనా సహజసంఖ్యలు ఉన్నాయా? −4 మరియు 3 ల మధ్యగల పూర్ణసంఖ్యలు −3, −2, −1, 0, 1, 2.

నీవు −2 మరియు −1 ల మధ్య పూర్ణసంఖ్యలను వ్రాయగలవా ? రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యలు మధ్య ఏ పూర్ణసంఖ్య కనుగొనలేము.

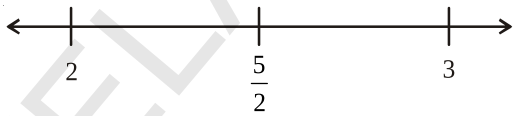
కాని మనం రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయగలం.

ఇప్పుడు మనం 2 మరియు 3 ల మధ్య కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను రాద్దాం.

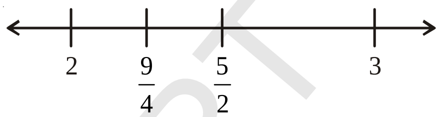
a, b లు ఏవైన రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే $\frac{a+b}{2}$ అను అకరణీయ సంఖ్య a, b ల సగటు అని అంటారు.

కాబట్టి 2 మరియు 3 ల మధ్యన గల అకరణీయ సంఖ్య $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$ ఇది 2, 3 ల మధ్య సంఖ్య.

కావున $2 < \frac{5}{2} < 3.$

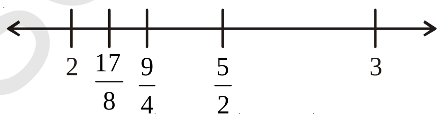


ఇప్పుడు 2 మరియు $\frac{5}{2}$ ల మధ్య గల అకరణీయసంఖ్య $= \frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$



$$2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$$

అదే విధంగా 2, $\frac{9}{4}$ ల సగటు $\frac{2+\frac{9}{4}}{2} = \frac{\frac{17}{4}}{2} = \frac{17}{8}$



కాబట్టి $2 < \frac{17}{8} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$

ఇదేవిధంగా సగటునుపయోగించి ఏ రెండు సంఖ్యలమధ్యనైనా కావలసినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాస్తూపోవచ్చు. అంటే దీని నుంచి రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అనంతమయిన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

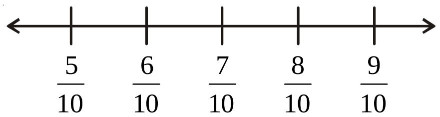
మరొక పద్ధతి :

సగటు పద్ధతిని ఉపయోగించి $\frac{5}{10}$ మరియు $\frac{9}{10}$ ల మధ్య 100 అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయగలవా ?

ఇక్కడ సగటు పద్ధతిని ఉపయోగించడం అనేది సుదీర్ఘమైన పద్ధతి అవుతుంది.

కాబట్టి మరొక పద్ధతిని గూర్చి తెలుసుకుందాం.

$\frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10} < \frac{9}{10}$ అని మనకు తెలుసు.

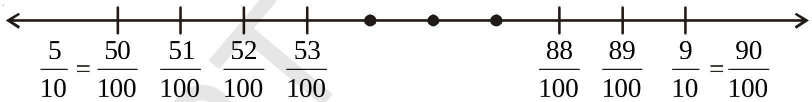


ఇక్కడ మనం మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను మాత్రమే వ్రాయగలం.

కాని $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ మరియు $\frac{9}{10} = \frac{90}{100}$

ఇప్పుడు $\frac{50}{100}$ మరియు $\frac{90}{100}$ లమధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలు రాయవచ్చు.

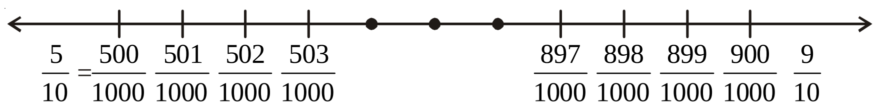
$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} < \frac{51}{100} < \frac{52}{100} < \frac{53}{100} < \ldots\ldots < \frac{89}{100} < \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$



పై సంఖ్యారేఖ పై $\frac{5}{10}, \frac{9}{10}$ ల మధ్య మనం 39 అకరణీయ సంఖ్యలు గుర్తించామని గమనించవచ్చు.

అదే విధంగా $\frac{5}{10} = \frac{500}{1000}$ మరియు $\frac{9}{10} = \frac{900}{1000}$

కాబట్టి $\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} < \frac{501}{1000} < \frac{502}{1000} < \frac{503}{1000} < \ldots\ldots\ldots\ldots < \frac{899}{1000} < \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$



ఈ విధంగా మనం రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య కావలసినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించవచ్చు.

ఉదాహరణ 8: -3 మరియు 0ల మధ్యగల 5 అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.

సాధన : $-3 = -\frac{30}{10}$ మరియు $0 = \frac{0}{10}$ కాబట్టి

$-\frac{29}{10}, -\frac{28}{10}, -\frac{27}{10}, ..., -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}$లు అన్నీ -3 మరియు 0 ల మధ్య ఉన్నాయి.

వీనిలోంచి ఏవయినా ఐదు సంఖ్యలను తీసుకోండి.

అభ్యాసము - 1.2

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

   (i) $\frac{9}{7}$ (ii) $-\frac{7}{5}$

2. $-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{-9}{13}$ లను ఒకే సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

3. $\frac{5}{6}$ కంటే చిన్నవయిన ఐదు అకరణీయసంఖ్యలను వ్రాయండి.

4. -1 మరియు 2 ల మధ్యగల 12 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

5. $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ల మధ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనండి.

   [సూచన : ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యలను సజాతి భిన్నాలుగా మార్చండి.]

6. $-\frac{3}{4}$ మరియు $\frac{5}{6}$ ల మధ్య పది అకరణీయ సంఖ్యలు కనుగొనండి.

1.6 అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశాలుగా చూపుట

ప్రతి అకరణీయసంఖ్యను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు $q \neq 0$. ఇప్పుడు మనం ఒక అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశంగా ఎలారాస్తామో తెలుసుకుందాం.

భాగహారపద్ధతి

ఒక అకరణీయసంఖ్య $\frac{25}{16}$ ను తీసుకుందాం.

సోపానము 1: లవాన్ని హారముతో భాగించండి.

సోపానము 2: విభాజకము కంటే శేషం తక్కువగా వచ్చువరకు భాగాహారాన్ని కొనసాగించండి.

సోపానము 3: విభాజ్యము మరియు భాగఫలముల ప్రక్కన ఒక దశాంశాన్ని ఉంచండి.

$$
\begin{array}{r}
16\overline{)25}\,(1 \\
16 \\
\hline
9
\end{array}
$$

సోపానము 4: విభాజ్యము మరియు శేషముల కుడి ప్రక్కన ఒక సున్నాను ఉంచండి. ఇప్పుడు భాగహారాన్ని యదావిధిగా కొనసాగించండి.

$$
\begin{array}{r}
16\overline{)25.0}\,(1. \\
16 \\
\hline
90
\end{array}
$$

సోపానము 5: నాలుగవ సోపానాన్ని దశాంశం తరువాత కోరిన స్థానం వరకు లేదా శేషం సున్న వచ్చే వరకు కొనసాగించండి.

$$
\begin{array}{r}
16\overline{)25.0000}\,(1.5625 \\
16 \\
\hline
90 \\
80 \\
\hline
100 \\
96 \\
\hline
40 \\
32 \\
\hline
80 \\
80 \\
\hline
0 \\
\hline
\end{array}
$$

కాబట్టి $\frac{25}{16} = 1.5625$

ఇప్పుడు మనం $\frac{17}{5}$ ను దశాంశరూపంలో వ్రాద్దాం.

$$
\begin{array}{r}
5\overline{)17.0}\,(3.4 \\
15 \\
\hline
20 \\
20 \\
\hline
0
\end{array}
$$

కాబట్టి $\frac{17}{5} = 3.4$

$\frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{8}{125}$ మరియు $\frac{1974}{10}$ లను దశాంశరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

పై అన్ని ఉదాహరణలలో దశాంశభాగంలో పరిమిత సంఖ్యలోనే అంకెలుండటం మనం గమనించవచ్చు. ఇలాంటి దశాంశాలను అంతమయ్యే దశాంశాలు అని అంటాం.

అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాలు :

ఇప్పుడు $\frac{5}{3}$ అనే అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశరూపంలో రాద్దాం.

భాగాహారపద్ధతిలో →

```
3)5.000 (1.666
  3
  20
  18
   20
   18
    20
    18
     2
```

కాబట్టి $\frac{5}{3} = 1.666........$

దీనిని $\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$ గా వ్రాస్తాము. ఇక్కడ దశాంశభాగములోని 6 పై ఉన్న గీత 6 పునరావృతమవుతూవుంటుంది. అనే విషయాన్ని సూచిస్తుంది.

పై భాగహారాన్ని పరిశీలించిన ప్రతిసారి ఒకే శేషం 2 పునరావృతమవుతుందని అదేవిధంగా భాగఫలంలో ఒకే సంఖ్య 6 పునరావృతమవుతుందని గమనించవచ్చు..

$\frac{1}{7}$ ను దశాంశరూపంలో వ్రాద్దాం.

భాగహారపద్ధతిలో →

```
7)10.00000000(0.14285714
   7
   30
   28
    20
    14
     60
     56
      40
      35
       50
       49
        10
         7
        30
        28
         2
```

$\therefore \frac{1}{7} = 0.142857142857....$

కాబట్టి $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

దశాంశభాగంలోని 142857 పై ఉన్న బార్ (గీత) ఆ అంకెలు అదేక్రమంలో పునరావృతమవుతాయి అనే విషయాన్ని సూచిస్తుంది.

పై రెండు ఉదాహరణలలో అకరణీయ సంఖ్యయొక్క దశాంశరూపం అంతము కాలేదు కాని ఆవర్తితం అవుతున్నాయి. ఈ దశాంశాలను ఆవర్తిత దశాంశాలు లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాలు అని అంటారు.

$\frac{1}{3}, \frac{17}{6}, \frac{11}{9}$ మరియు $\frac{20}{19}$ లను దశాంశరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

$\frac{1}{3} = \boxed{}$ $\frac{17}{6} = \boxed{}$ $\frac{11}{9} = \boxed{}$ $\frac{20}{19} = \boxed{}$

పై సాధనలనుంచి ఒక అకరణీయసంఖ్యను భాగహారపద్ధతిలో దశాంశరూపంలో వ్యక్తపరచేటప్పుడు భాగహారప్రక్రియలో కొన్ని సోపానాల తరువాత శేషం పునరావృత్తమగుట గమనించవచ్చు. అదే సమయంలో భాగఫలంలో దశాంశం తరువాత ఒక అంకె లేదా కొన్ని అంకెల సమూహము ఒకే క్రమంలో పునరావృతమవటం మనం గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణకు 0.33333------.= $0.\overline{3}$

0.12757575---------= $0.12\overline{75}$

123.121121121121----------= $123.\overline{121}$

5.678888-----------= $5.67\overline{8}$ మొదలైనవి.

ఈ దశాంశాలను అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాలు అని అంటాము.

అంతం కాని ఆవర్తిత దశాంశాలలో ఆవర్తనమయ్యే సంఖ్యల సమూహం (బార్‌కింది సంఖ్యలు)ను వ్యవధి అంటారు.

ఉదాహరణకు

0.3333 ...... = $0.\overline{3}$ యొక్క వ్యవధి 3

0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ యొక్క వ్యవధి 75.

ఒక అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం యొక్క వ్యవధి లోని అంకెల సంఖ్యను "అవధి" అని అంటాం.

ఉదాహరణకు $0.\overline{3}$ యొక్క అవధి 1

$0.12\overline{75}$ యొక్క అవధి 2

0.23143143143.......యొక్క అవధి = ________ మరియు వ్యవధి = ________

125.6788989 .... యొక్క అవధి = ________ మరియు వ్యవధి = ________

ఆలోచించి చర్చించి వ్రాయండి.:

1. కింది వానిని దశాంశ రూపంలో వ్రాయండి.

(i) $\frac{7}{5}, \frac{3}{4}, \frac{23}{10}, \frac{5}{3}, \frac{17}{6}, \frac{22}{7}$

(ii) పై వాటిలో ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలు? ఏవి అంతం కాని దశాంశాలు ?

(iii) పై అకరణీయ సంఖ్యల హారాలను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా వ్రాయండి.

(iv) కనిష్ఠ రూపంలో ఉండే పై అకరణీయ సంఖ్యల హారానికి 2, 5 తప్ప ఇతర కారణాంకాలు లేకుంటే నీవు ఏం గమనించావు ?

1.7 దశాంశ భిన్నాలను అకరణీయసంఖ్యలుగా చూపుట

1.7.1 అంతమయ్యే దశాంశాన్ని అకరణీయ సంఖ్య రూపంలోకి మార్చడం

15.75 అనే దశాంశాన్ని తీసుకుందాం.

సోపానం 1: ఇచ్చిన సంఖ్యలోని దశాంశస్థానాల సంఖ్యను లెక్కించండి.
15.75 లో రెండు దశాంశస్థానాలున్నాయి.

సోపానం 2: 1 ని తీసుకొని దానిప్రక్కన దశాంశస్థానాల సంఖ్యకు సమానసంఖ్యలో సున్నాలుంచండి.

సోపానం 3: రెండవ సోపానంలో వచ్చిన సంఖ్యతో మనం తీసుకున్న దశాంశాన్ని గుణించి భాగించండి.

$$15.75 \times \frac{100}{100} = \frac{1575}{100}$$

సోపానం 4: మనకు లభించిన అకరణీయసంఖ్యను కనిష్ఠ రూపంలో వ్రాయండి.

$$\frac{1575}{100} = \frac{1575 \div 5}{100 \div 5} = \frac{315 \div 5}{20 \div 5} = \frac{63}{4}$$

ఉదాహరణ 9: కింది దశాంశాలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్రాయండి.

(i) 0.35 (ii) –8.005 (iii) 2.104

సాధన: (i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$

(ii) $-8.005 = \frac{-8005}{1000} = \frac{-8005 \div 5}{1000 \div 5} = \frac{-1601}{200}$

(iii) $2.104 = \frac{2104}{1000} = \frac{2104 \div 4}{1000 \div 4} = \frac{526 \div 2}{250 \div 2} = \frac{263}{125}$

1.7.2 అంతంకాని ఆవృత దశాంశాన్ని అకరణీయ సంఖ్యరూపంలోకి మార్చటం

ఈ పద్ధతిని దిగువ ఉదాహరణముల ద్వారా చర్చిద్దాం.

ఉదాహరణ 10: క్రింది దశాంశాలను అకరణీయ రూపంలోకి మార్చండి.

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{54}$ (iii) $4.\overline{7}$

సాధన (i): $0.\overline{4}$

$x = 0.\overline{4}$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow \quad x = 0.444 \ldots$ ----------------(i)

ఇక్కడ దశాంశము యొక్క అవధి ఒకటి

కాబట్టి సమీకరణము (i) ని ఇరువైపులా 10 చే గుణించగా,

$10x = 4.44 \ldots$ ----------------(ii)

సమీకరణము (ii) నుంచి (i) ని తీసివేయగా

$$
\begin{array}{r}
10x = 4.444\ldots\ldots \\
x = 0.444\ldots\ldots \\
\hline
9x = 4.000\ldots\ldots \\
\hline
\end{array}
$$

$$x = \frac{4}{9}$$

కావున $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

సాధన (ii): $0.\overline{54}$

$x = 0.\overline{54}$ అనుకొనుము

$\Rightarrow x = 0.545454\ldots$ ------------------ (i)

ఇచ్చిన దశాంశం యొక్క అవధి = 2

కాబట్టి సమీకరణము (i) ని ఇరువైపులా 100 చే గుణించగా

$100x = 54.5454\ldots$ ------------------- (ii)

సమీకరణం (ii) నుంచి (i) ని తీసివేయగా

$$
\begin{array}{r}
100x = 54.5454\ \ldots\ldots \\
x = 0.5454\ \ldots\ldots \\
\hline
99x = 54.0000\ldots\ldots \\
\hline
\end{array}
$$

$x = \frac{54}{99}$ కావున $0.\overline{54} = \frac{54}{99}$.

సాధన (iii) : $4.\overline{7}$

$x = 4.\overline{7}$ అనుకొనుము.

$x = 4.777\ldots$ ---------------- (i)

ఇచ్చిన దశాంశం అవధి ఒకటి

కాబట్టి సమీకరణం (i)ని ఇరువైపులా 10చే గుణించగా

$10x = 47.777\ldots$ ---------------- (ii)

సమీకరణం (ii) నుంచి (i) గా తీసివేయగా

$$
\begin{array}{r}
10x = 47.777\ \ldots\ldots \\
x = 4.777\ \ldots\ldots \\
\hline
9x = 43.0 \\
\hline
\end{array}
$$

గమనించండి

$0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

$0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

$0.\overline{54} = \frac{54}{99}$

$0.\overline{745} = \frac{745}{999}$

$x = \frac{43}{9}$ కావున $4.\overline{7} = \frac{43}{9}$.

మరొక పద్ధతి:

$$4.\overline{7} = 4 + 0.\overline{7}$$
$$= 4 + \frac{7}{9}$$
$$= \frac{9 \times 4 + 7}{9}$$
$$4.\overline{7} = \frac{43}{9}$$

ఉదాహరణ 11: మిశ్రమావర్తిత దశాంశం $15.7\overline{32}$ ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్రాయండి.

సాధన : $x = 15.7\overline{32}$ అనుకొనుము.

$x = 15.7323232....$ ---------------(i)

32 ఆవర్తితము

ఇచ్చిన దశాంశం యొక్క అవధి = 2

కాబట్టి సమీకరణము (i) ని ఇరువైపులా 100 చే గుణించగా,

$100\,x = 1573.2323....$ -------------(ii)

సమీకరణము (ii) నుండి (i) తీసివేయగా

$$\begin{array}{rcl} 100\,x & = & 1573.232323.... \\ x & = & 15.732323.... \\ \hline 99\,x & = & 1557.50 \end{array}$$

$$x = \frac{1557.5}{99} = \frac{15575}{990}$$

$$\Rightarrow 15.7\overline{32} = \frac{15575}{990}$$

ఆలోచించి, చర్చించి వ్రాయండి.

$0.\overline{9}, 14.\overline{5}$ మరియు $1.2\overline{4}$ లను అకరణీయ సంఖ్యారూపంలోకి వ్రాయండి. మామూలు సాధనా పద్ధతికి భిన్నంగా ఏదయినా సులభమయిన పద్ధతిని నీవు కనుగొనగలవా?

అభ్యాసం 1.3

1. క్రింది వానిని $\frac{p}{q}$ రూపంలోకి వ్రాయండి

   (i) 0.57 (ii) 0.176 (iii) 1.00001 (iv) 25.125

2. ఈ క్రింది ఆవృతదశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యారూపంలో వ్యక్తపరచండి. ($\frac{p}{q}$).

   (i) $0.\overline{9}$ (ii) $0.\overline{57}$ (iii) $0.7\overline{29}$ (iv) $12.2\overline{8}$

3. కింద ఇచ్చిన విలువలకు $(x+y) \div (x-y)$ ను లెక్కించండి.

   (i) $x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{4}$ (ii) $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{2}$

4. $-\frac{13}{5}$ మరియు $\frac{12}{7}$ ల మొత్తాన్ని $-\frac{13}{7}$ మరియు $-\frac{1}{2}$ ల లబ్ధంచే భాగించండి.

5. ఒక సంఖ్య యొక్క $\frac{2}{5}$ వ భాగం ఆ సంఖ్య యొక్క $\frac{1}{7}$ వ భాగం కంటే 36 ఎక్కువ అయిన ఆసంఖ్యను కనుగొనుము.

6. 11మీ పొడవుగల తాడు నుండి $2\frac{3}{5}$ మీ మరియు $3\frac{3}{10}$ మీ ల పొడవులు గల రెండు ముక్కలు కత్తిరించగా మిగిలిన ముక్క పొడవు ఎంత?

7. $7\frac{2}{3}$ మీటర్ల పొడవు గల ఒక గుడ్డ ఖరీదు ₹ $12\frac{3}{4}$. అయిన ఒక మీటరుకు గుడ్డ ఖరీదు ఎంత?

8. $18\frac{3}{5}$ మీ పొడవు మరియు $8\frac{2}{3}$ మీ. వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్క్ వైశాల్యం కనుగొనండి.

9. $-\frac{33}{16}$ ను ఏ సంఖ్యచే భాగించగా $-\frac{11}{4}$ వస్తుంది?

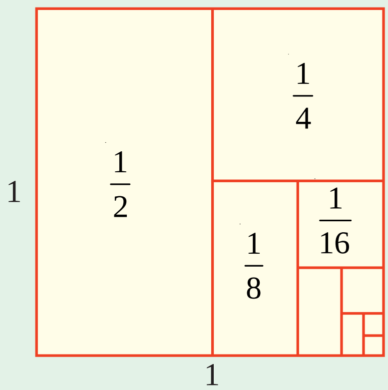
10. 64 మీటర్ల పొడవుగల ఒక బట్ట నుంచి సమాన పరిమాణం గల 36 ప్యాంటులు తయారుచేసిన ఒక్కొక్క ప్యాంటు తయారు చేయుటకు ఎంత పొడవుగల బట్ట అవసరము ?

11. ఆవర్తిత దశాంశ సంఖ్య 1 0.363636 .... ను $\frac{p}{q}$ కనిష్ఠ రూపంలో రాసిన $p+q$ విలువ కనుగొనండి.

మనం నేర్చుకున్నవి

1. అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం, వ్యవకలనం మరియు గుణకారంల దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
2. సంకలనం మరియు గుణకారాల పరిక్రియలకు
   (i) అకరణీయసంఖ్యలు వినిమయ ధర్మాన్ని
   (ii) అకరణీయ సంఖ్యలు సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
3. '0' అకరణీయ సంఖ్యల సంకలన తత్సమాంశం.
4. '1' అకరణీయ సంఖ్యల గుణకార తత్సమాంశం.
5. ఒక అకరణీయసంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమములో ఆసంఖ్య ఉండే గుర్తులకు వ్యతిరేకంగా గుర్తులు కలిగి ఉంటాయి.
6. ఒక కరణీయ సంఖ్య లవహారాలను తారుమారు చేయగా (వ్యుత్క్రమం చేయగా) లభించేది దాని గుణకార విలోమం
7. విభాగన్యాయం : a,b, c లు ఏవయినా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే
   a (b + c) = ab + ac మరియు a (b – c) = ab – ac
8. ప్రతి అకరణీయసంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై చూపవచ్చు.
9. ఏవయినా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అనంతమయిన అకరణీయసంఖ్యలు ఉండును. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మరో అకరణీయ సంఖ్యను ఉంచటానికి సగటు భావన ఉపయోగపడుతుంది.
10. ఒక అకరణీయసంఖ్యను అంతంగల దశాంశంగాను లేదా అంతం లేని ఆవర్తిత దశాంశంగాను వ్రాయవచ్చు.

a_n కు సూత్రాన్ని ఊహించగలవా? దిగువ ఇచ్చిన ప్రమాణ చతురస్రపు విభజనల దృశీకరణను నీ జవాబు సమర్థనకు ఉపయోగించుకొనుము.



సూచన : $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$......... $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$

$a_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $a_2 = 1 - \frac{1}{4}$, $a_3 = 1 - \frac{1}{8}$......... అయిన a_n = ?

అధ్యాయం **2**

ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు

2.0 పరిచయం

సాగర్ మరియు లత సంఖ్యలతో ఆడుకుంటున్నారు. సాగర్, లతతో "నేనొక సంఖ్యను అనుకున్నాను. దానిని రెట్టింపు చేసి ఫలితం నుంచి 7 ను తీసివేస్తే 35 వచ్చింది. అయితే నేను అనుకున్న సంఖ్యను చెప్పగలవా ?" అని అడిగాడు. లత కొంతసేపు ఆలోచించి సమాధానము చెప్పింది. మరి నీవు కూడా చెప్పగలవా ?

లత ఏవిధంగా సమాధానం చెప్పిందో చూద్దాం. సంఖ్యను 'x' అనుకొనిన

దానిని రెట్టింపు చేస్తే '$2x$' అవుతుంది.

తరువాత '$2x$' నుంచి 7 ను తీసివేస్తే ఫలిత సంఖ్య $2x - 7$

అయితే సాగర్ ప్రకారం ఈ సంఖ్య 35కు సమానము

$\Rightarrow \quad 2x - 7 = 35$

$\therefore \quad 2x = 35 + 7$ (7 ను పక్షాంతరం చెందగా)

$2x = 42$

$\therefore \quad x = \dfrac{42}{2}$ (2 ను పక్షాంతరం చెందగా)

$\therefore \quad x = 21$

$\therefore$ సాగర్ అనుకొన్న సంఖ్య 21.

ఉపాయము

చివరి ఫలితమును తీసుకొని 7 కలిపి వచ్చిన దానిని సగము చేయుము.

గమనించండి

'+'రాశి పక్షాంతరం చెందిన '–'రాశి గానూ,
'–'రాశి పక్షాంతరం చెందిన '+' రాశిగానూ
'×' రాశి పక్షాంతరం చెందిన '÷' రాశిగాను
'÷' రాశి పక్షాంతరం చెందిన '×' రాశిగాను
మార్పు చెందును.

$2x - 7 = 35$ అనేది సమీకరణానికి ఒక ఉదాహరణ, అని క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాము. సమీకరణమును పై పద్ధతిలో సాధించుట ద్వారా సాగర్ అనుకొన్న సంఖ్యను లత చెప్పగలిగింది.

ఈ అధ్యాయములో ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలను లేదా సామాన్య సమీకరణాలను, వానిని సాధించే విధానాలను, నిజజీవితంలో వాని వినియోగంను గురించి చర్చిస్తాం.

సామాన్య సమీకరణాలను గురించి మనకేమి తెలుసో పునరావలోకనం చేసుకుందాం !

$$\underset{\text{L.H.S}}{\underbrace{2x - 7}} = \underset{\text{R.H.S}}{\underbrace{35}}$$

(i) ఒక బీజీయ సమీకరణం అనేది స్థిరరాశులు, చరరాశులు గల బీజయసమాసాల సమానత్వమును తెలుపుతుంది.

(ii) ఇది సమానత్వపు గుర్తును కలిగివుంటుంది.

(iii) సమానత్వపు గుర్తుకు ఎడమవైపున గల బీజీయ సమాసమును సమీకరణం యొక్క L.H.S(Left Hand Side) అంటాము.

(iv) సమానత్వపు గుర్తుకు కుడివైపున గల బీజీయ సమాసమును సమీకరణం యొక్క R.H.S (Right Hand Side) అంటాము.

(v) ఒక సమీకరణం యొక్క LHS మరియు RHS విలువలు సమానము, అయితే ఇది సమీకరణంలోని చరరాశి యొక్క ఏదో ఒక విలువకు మాత్రమే సత్యమౌతుంది. చరరాశి యొక్క ఈ విలువనే సమీకరణం యొక్క సాధన అంటాం.

$2x - 7 = 35$ అనేది $x = 21$ మాత్రమే సత్యమౌతుంది.

అనగా $x = 21$ అయిన

LHS $= 2x - 7$

$= 2\times21 - 7$

$= 35$

$=$ RHS

$\therefore$ సాధన $x = 21$

2.1 రేఖీయ సమీకరణాలు

ఈ క్రింది సమీకరణాలను గమనించండి.

(1) $2x - 7 = 35$ (2) $2x + 2y = 48$ (3) $4x - 1 = 2x + 5$ (4) $x^2 + y = z$

ఇచ్చట (1), (2) మరియు (3) సమీకరణాలలో ప్రతి దాని యొక్క పరిమాణము ఒకటి. కనుక వీనిని రేఖీయ సమీకరణాలు అంటాం. అయితే (4) వ సమీకరణం యొక్క పరిమాణము ఒకటి కాదు కనుక ఇది రేఖీయ సమీకరణం కాదు.

అనగా (1), (2) మరియు (3) సమీకరణాలు రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలు. (4)వ సమీకరణం యొక్క పరిమాణము ఒకటి కాదు కనుక ఇది రేఖీయ సమీకరణం కాదు.

ఇది చేయండి:

ఈ క్రింది వానిలో ఏవి రేఖీయ సమీకరణాలు :

(i) $4x + 6 = 8$ (ii) $4x - 5y = 9$ (iii) $5x^2 + 6xy - 4y^2 = 16$

(iv) $xy + yz + zx = 11$ (v) $3x + 2y - 6 = 0$ (vi) $3 = 2x + y$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$

2.2 సామాన్య సమీకరణాలు లేదా ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు

ఈ క్రింది సమీకరణాలను గమనించండి.

(i) $2x - 7 = 35$ (ii) $4x - 1 = 2x + 5$ (iii) $2x + 2y = 48$

ఇవన్నీ రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలని నేర్చుకున్నాం. వీనిలో ప్రతీ సమీకరణంలోని చరరాశుల సంఖ్యను పరిశీలించండి.

(i) మరియు (ii) లు ఏకచరరాశిగల రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలు, కానీ (iii) వ సమీకరణములో రెండు చరరాశులు 'x' మరియు 'y' లు కలవు. కావున దీనిని రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణం అంటారు.

అనగా a, b లు స్థిరరాశులు $a \neq 0$ అవుతూ $ax + b = 0$ లేదా $ax = b$ రూపంలో వున్న వానిని ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు లేదా సామాన్య సమీకరణాలు అంటాం.

ఇవి చేయండి :

ఈ క్రింది వానిలో ఏవి సామాన్య సమీకరణాలు ?

(i) $3x + 5 = 14$ (ii) $3x - 6 = x + 2$ (iii) $3 = 2x + y$

(iv) $\frac{x}{3} + 5 = 0$ (v) $x^2 + 5x + 3 = 0$ (vi) $5m - 6n = 0$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$ (viii) $13t - 26 = 39$

2.3 ఒకవైపే చరరాశిగల సామాన్య సమీకరణాల సాధన

ఒక వైపు మాత్రమే చరరాశిగల సామాన్య సమీకరణాల సాధనను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఇదే విధానాన్ని అనుసరించుట ద్వారా లత పజిల్‌ను ఛేదించి సాగర్ అనుకున్న సంఖ్యను చెప్పగలిగింది.

ఉదాహరణ 1: $3y + 39 = 8$ సాధించుము ?

సాధన : ఇవ్వబడిన సమీకరణము : $3y + 39 = 8$

$3y = 8 - 39$ (39 ని R.H.S వైపు పక్షాంతరం చెందగా)

$3y = -31$

$y = \frac{-31}{3}$ (3 ను R.H.S వైపు పక్షాంతరం చెందగా)

$\therefore$ $3y + 39 = 8$ యొక్క సాధన $y = \frac{-31}{3}$

ఇచ్చుట సాధన $\left(\frac{-31}{3}\right)$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని గమనించారా ?

సరిచూచుట: L.H.S $= 3y + 39 = 3\left(\frac{-31}{3}\right) + 39 = -31 + 39 = 8$ R.H.S

సత్యమో, అసత్యమో తెల్పండి?
మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
కావ్య ఒక సమీకరణాన్ని క్రింది విధంగా సాధించింది.
$3x + x + 5x = 72$
$9x = 72 \quad x = 72 \times 9 = 648$
ఆమె ఎక్కడ తప్పుచేసింది?
సరియైన జవాబును కనుగొనండి.

ఉదాహరణ 2: $\frac{7}{4} - p = 11$ సాధించుము.

సాధన : $\frac{7}{4} - p = 11$

$$-p = 11 - \frac{7}{4} \quad (\frac{7}{4} \text{ ను R.H.S కు పక్షాంతరం చేయగా})$$

$$-p = \frac{44-7}{4}$$

$$-p = \frac{37}{4}$$

$$\therefore p = -\frac{37}{4} \quad (-1 \text{ చే ఇరువైపులా గుణించగా })$$

p ని L.H.S నుండి R.H.S కు పక్షాంతరం చెందడం ద్వారా p యొక్క విలువను కనుగొనండి? p విలువలో మార్పును ఏమైనా గమనించారా ?

సరిచూచుట: L.H.S = $\frac{7}{4} - p = \frac{7}{4} - (-\frac{37}{4}) = \frac{7}{4} + \frac{37}{4} = \frac{7+37}{4} = \frac{44}{4} = 11 = \text{R.H.S}$

అభ్యాసం - 2.1

క్రింది సామాన్య సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $6m = 12$ (ii) $14p = -42$

(iii) $-5y = 30$ (iv) $-2x = -12$

(v) $34x = -51$ (vi) $\frac{n}{7} = -3$

(vii) $\frac{2x}{3} = 18$ (viii) $3x + 1 = 16$

(ix) $3p - 7 = 0$ (x) $13 - 6n = 7$

(xi) $200y - 51 = 49$ (xii) $11n + 1 = 1$

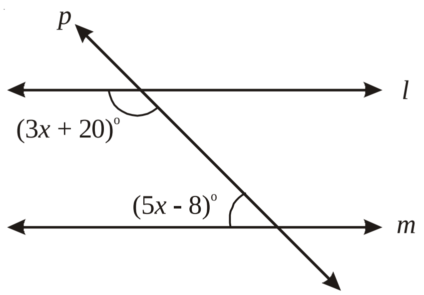
(xiii) $7x - 9 = 16$ (xiv) $8x + \frac{5}{2} = 13$

(xv) $4x - \frac{5}{3} = 9$ (xvi) $x + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{2}$

2.3.1 కొన్ని అనువర్తనాలు

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 3: $l \parallel m$ అయిన 'x' విలువను కనుగొనుము ?



సాధన : ఇచ్చట $l \parallel m$ మరియు p ఒక తిర్యగ్రేఖ.

కనుక $(3x + 20)^o + (5x - 8)^o = 180^o$ (తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు)

$$3x + 20^o + 5x - 8^o = 180^o$$

$$8x + 12^o = 180^o$$

$$8x = 180^o - 12^o$$

$$8x = 168^o$$

$$x = \frac{168^o}{8} = 21^o$$

ఉదాహరణ 4: రెండు సంఖ్యల మొత్తం 29 మరియు ఒక సంఖ్య మరొకదాని కంటే 5 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన: ఇది మనకు ఒక పజిల్. మనకు సంఖ్యలు తెలియవు. మనము వానిని కనుగొనాలి.

చిన్న సంఖ్యను 'x' అనుకొంటే పెద్ద సంఖ్య $x + 5$ అవుతుంది.

ఈ రెండింటి మొత్తం 29 అని ఇవ్వబడింది కనుక

$$\Rightarrow x + x + 5 = 29$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = 29$$

$$\therefore 2x = 29 - 5$$

$$\therefore 2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2}$$ (2 ను RHS కు పక్షాంతరం చేయగా)

$$x = 12.$$

కావున చిన్న సంఖ్య $= x = 12$ మరియు

పెద్ద సంఖ్య $= x + 5 = 12 + 5 = 17$.

సరిచూచుట: 17, 12 కంటే 5 ఎక్కువ మరియు $12 + 17 = 29$.

ఉదాహరణ 5: ఒక సంఖ్య యొక్క 4 రెట్ల నుంచి 5 తగ్గించిన 19 కు సమానమౌతుంది. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము?

సాధన : సంఖ్యను 'x' గా తీసుకొనిన దీనికి 4 రెట్లు '$4x$' అవుతుంది.

ఈ $4x$ నుంచి '5' తగ్గించిన ఫలితం 19కు సమానమవుతుంది.

$$\Rightarrow \quad 4x - 5 = 19$$

$$4x = 19 + 5 \qquad \text{(-5 ను RHS కు పక్షాంతరం చేయగా)}$$

$$4x = 24$$

$$\therefore x = \frac{24}{4} \qquad \text{(4 ను RHS కు పక్షాంతరం చేయగా)}$$

$$\therefore x = 6$$

$\therefore$ కావలసిన సంఖ్య $= 6$

సరిచూచుట: 6 కు 4 రెట్లు 24 మరియు $24 - 5 = 19$.

ఉదాహరణ 6: ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు పొడవు, దాని వెడల్పు కంటే 17 మీటర్లు ఎక్కువ. పార్కు యొక్క చుట్టుకొలత 178 మీటర్లు అయిన పార్కు కొలతలను కనుగొనుము?

సాధన : పార్కు వెడల్పు $= x$ మీటర్లు అనుకొనిన

పార్కు పొడవు $= x + 17$ మీటర్లు

$\therefore$ పార్కు చుట్టుకొలత $= 2$ (పొడవు + వెడల్పు)

$= 2\,(x + 17 + x)$ మీటర్లు

$= 2\,(2x + 17)$ మీటర్లు

కానీ పార్కు యొక్క చుట్టుకొలత 178 మీటర్లు అని ఇవ్వబడింది.

$$\therefore \quad 2\,(2x + 17) = 178$$

$$4x + 34 = 178$$

$$4x = 178 - 34$$

$$4x = 144$$

$$x = \frac{144}{4} = 36$$

$\therefore$ పార్కు యొక్క వెడల్పు = 36 మీటర్లు

పార్కు యొక్క పొడవు = 36 + 17 = 53 మీటర్లు

సరిచూచుట : ప్రయత్నించి సరిచూడండి.

ఉదాహరణ 7: రెండు సంపూరక కోణాల బేధము 34 అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము ?

సాధన : చిన్న కోణము x^o అనుకొనిన

రెండుకోణాల బేధము 34^o, కనుక పెద్ద కోణము $= x + 34^o$

సంపూరక కోణాల మొత్తము 180^o కనుక

$$x^o + (x^o + 34) = 180^o$$

$$2x^o + 34 = 180^o$$

$$2x = 180 - 34 = 146^o$$

$$x^o = \frac{146^o}{2} = 73^o$$

$\therefore$ చిన్న కోణము $= x^o = 73^o$

పెద్ద కోణము $= x^o + 34 = 73^o + 34^o = 107^o$

ఉదాహరణ 8: ప్రస్తుతము విజయ వాళ్ళ అమ్మ వయస్సు విజయ వయస్సుకు 4 రెట్లు. 6 సం॥ల అనంతరము వారిద్దరి వయస్సుల మొత్తము 62 సం॥లు. అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము?

సాధన : విజయ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 'x' అనుకొనిన క్రింది పట్టిక తయారు చేసుకోగలము.

	విజయ	విజయ వాళ్ళ అమ్మ
ప్రస్తుత వయస్సు	x	$4x$
6 సం॥ల అనంతరం వయస్సు	$x + 6$	$4x + 6$

$\therefore$ 6 సం॥ అనంతరం వారిరువురి వయస్సుల మొత్తం $= (x + 6) + (4x + 6)$

$= x + 6 + 4x + 6$

$= 5x + 12$

అయితే 6 సం॥ల అనంతరం వారిరువురి వయస్సుల మొత్తం 62 సం॥లు అని ఇవ్వబడింది.

$$\Rightarrow 5x + 12 = 62$$

$$5x = 62 - 12$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5} = 10$$

విజయ ప్రస్తుత వయస్సు $= x = 10$ సం॥లు

విజయ వాళ్ళ అమ్మ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $= 4x = 4 \times 10 = 40$ సం॥లు.

ఉదాహరణ 9 : ఒక పరీక్షలో 90 బహుళైచ్చిక ప్రశ్నలు గలవు. ప్రతి సరియైన సమాధానమునకు 2 మార్కులు ఇవ్వబడును. ప్రతి తప్పు సమాధానమునకు 1 మార్కు తగ్గించబడును. సహానా అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములను వ్రాసి 60 మార్కులు తెచ్చుకొనిన ఆమె ఎన్ని ప్రశ్నలకు సరియైన సమాధానములు గుర్తించినది ?

సాధన : సరియైన సమాధానములను గుర్తించిన ప్రశ్నల సంఖ్య 'x'అనుకొనిన తప్పు సమాధానము గుర్తించిన ప్రశ్నల సంఖ్య $= 90 - x$.

ప్రతి సరియైన సమాధానమునకు 2 మార్కులు కనుక

సరియైన సమాధానములకు వచ్చే మార్కులు $= 2x$

ప్రతి తప్పు సమాధానమునకు 1 మార్కు తగ్గించబడుతుంది.

కనుక తగ్గించబడే మార్కులు $= (90 - x) \times 1 = 90 - x$

$\therefore$ మొత్తం మార్కులు $= 2x - (90 - x) = 2x - 90 + x = 3x - 90$

అయితే మొత్తం మార్కులు 60 అని ఇవ్వబడింది.

$$\Rightarrow \quad 3x - 90 = 60$$

$$3x = 60 + 90$$

$$3x = 150$$

$$x = \frac{150}{3} = 50$$

$\therefore$ సరియైన సమాధానము గుర్తించిన ప్రశ్నల సంఖ్య $= x = 50$

ఉదాహరణ 10: రవి ఒక బ్యాంకులో క్యాషియర్‌గా పనిచేస్తాడు. ఇతని వద్ద ₹ 100, ₹ 50, ₹ 10 నోట్లు 2:3:5 నిష్పత్తిలో గలవు. వీటి మొత్తం విలువ ₹ 4, 00, 000 అయిన ఏరకం నోట్లు ఎన్ని గలవో కనుగొనుము?

సాధన : ₹ 100 నోట్ల సంఖ్య $= 2x$

₹ 50 నోట్ల సంఖ్య $= 3x$

₹ 10 నోట్ల సంఖ్య $= 5x$ అనుకుందాం.

$\therefore$ మొత్తం నోట్ల విలువ $= (2x \times 100) + (3x \times 50) + (5x \times 10)$

$= 200x + 150x + 50x = 400x$

> $2x : 3x : 5x$ మరియు $2 : 3 : 5$ సమానం అని గమనించగలరు.

అయితే మొత్తం నోట్ల విలువ ₹ 4, 00,000 అని ఇవ్వబడింది.

$$\Rightarrow \qquad 400x = 4,00,000$$

$$x = \frac{400000}{400} = 1000$$

₹ 100 నోట్ల సంఖ్య $= 2x = 2 \times 1000 = 2000$

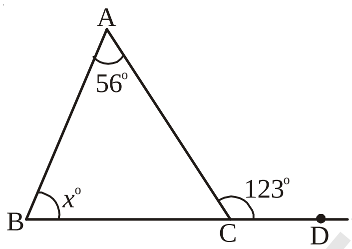
₹ 50 నోట్ల సంఖ్య $= 3x = 3 \times 1000 = 3000$

₹ 10 నోట్ల సంఖ్య $= 5x = 5 \times 1000 = 5000$

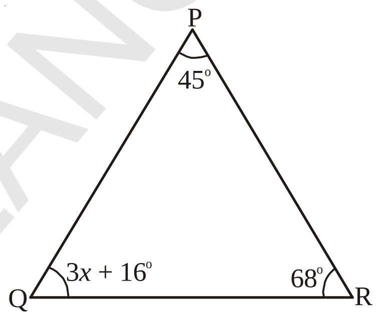
అభ్యాసము - 2.2

1. క్రింది పటాలలో ‘x’ విలువను కనుగొనుము?

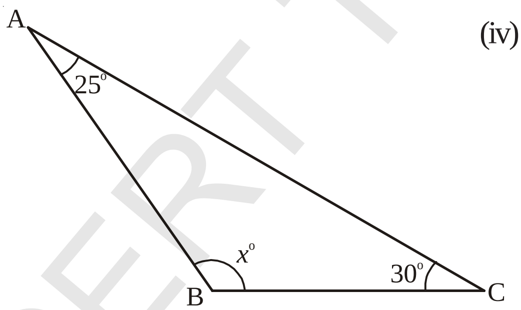
(i)



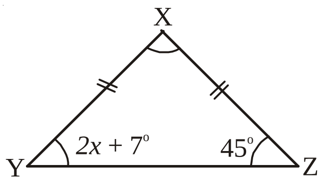
(ii)



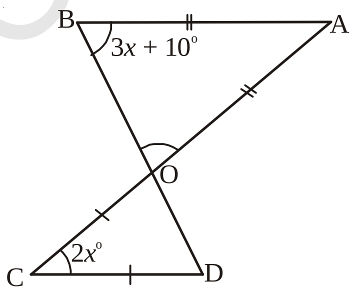
(iii)



(iv)



(v)



2. రెండు సంఖ్యల బేధము 8. పెద్ద సంఖ్యకు '2' కలిపిన ఫలితము చిన్న సంఖ్యకు 3 రెట్లు అవుతుంది. ఆసంఖ్యలను కనుగొనుము ?

3. మొత్తము 58, బేధము 28 అయ్యే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనుము?

4. రెండు వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తము 56. అయిన వాటిని కనుగొనుము.

5. మూడు వరుస 7 యొక్క గుణకాల మొత్తం 777 ఆ గుణకాలను కనుగొనుము?
(సూచన : మూడు వరుస 7 యొక్క గుణకాలు 'x', '$x + 7$', '$x + 14$')

6. ఒక మనిషి కాలినడకన 10 కి.మీ ప్రయాణించిన తరువాత కొంత దూరము రైలులో; మరికొంత దూరము బస్సులో ప్రయాణించాడు. బస్సులో ప్రయాణించిన దూరము; రైలులో ప్రయాణించిన దూరమునకు రెట్టింపు. అతని మొత్తం ప్రయాణం 70 కి.మీ అయిన అతను రైలులో ప్రయాణించిన దూరం ఎంత?

7. వినయ్ ఒక పిజ్జా కొని దానిని మూడు ముక్కలు చేశాడు. వీటిని బరువుతూయగా మొదటిది రెండవదానికంటే 7 గ్రా తక్కువగాను, మూడవ దానికంటే 4 గ్రా ఎక్కువగానూ వుంది. పిజ్జా యొక్క మొత్తం బరువు 300గ్రా॥ అయిన ప్రతీ ముక్క బరువును కనుగొనుము ?
(సూచన: మొదటి ముక్క బరువు 'x ' గ్రా అనుకొనిన రెండవ దాని బరువు '$x + 7$', మూడవ దాని బరువు '$x - 4$' గ్రా)

8. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పొలము చుట్టుకొలత 400 మీటర్లు, దాని పొడవు, వెడల్పు కంటే 26 మీటర్లు ఎక్కువ. అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

9. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పొలము యొక్క పొడవు, వెడల్పు యొక్క రెట్టింపు కంటే 8 మీ. తక్కువ. పొలము యొక్క చుట్టుకొలత 56 మీటర్లు అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?

10. ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజాల కొలతలు సమానము. వీని కొలత మూడవ భుజం యొక్క రెట్టింపు కంటే 5 మీ. తక్కువ. త్రిభుజము యొక్క చుట్టుకొలత 55 మీ. అయిన భుజాల కొలతలను కనుగొనుము?

11. రెండు పూరక కోణాల బేధము 12^{o} అయిన వానిని కనుగొనుము?

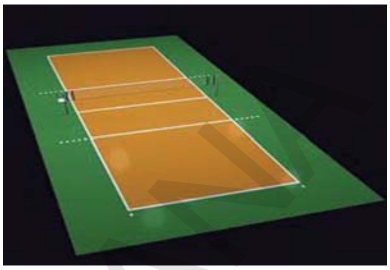
12. రాహుల్ మరియు లక్ష్మీల వయస్సుల నిష్పత్తి 5:7. నాలుగు సం॥ల తరువాత వారి వయస్సుల మొత్తము 56 సం॥లు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులు ఎంత?

13. ఒక పరీక్షలో 180 బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు కలవు. ప్రతి సరియైన సమాధానమునకు 4 మార్కులు ఇవ్వబడును. సమాధానము వ్రాయని మరియు తప్పుగా సమాధానము వ్రాసిన ప్రతి ప్రశ్నకు ఒక మార్కు తగ్గించబడుతుంది. ఒక అభ్యర్థికి ఈ పరీక్షలో 450 మార్కులు వచ్చిన ఆ అభ్యర్థి ఎన్ని ప్రశ్నలకు సరియైన సమాధానమును వ్రాసినాడు.

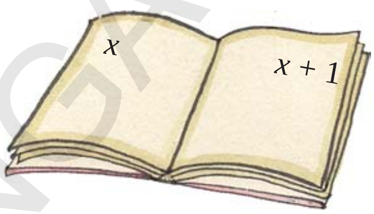
14. ₹ 5నోట్లు, ₹ 10 నోట్లు కలిపిమొత్తం 90 నోట్లు కలవు. వీని మొత్తం విలువ ₹ 500 అయిన ఏ రకమైన నోట్లు ఎన్ని కలవు?

(సూచన: ₹ 5 యొక్క నోట్ల సంఖ్య 'x ' అనుకొనిన ₹ 10 యొక్క నోట్ల సంఖ్య = $90–x$)

15. ఒక వ్యక్తి పెన్నులు, పెన్సిళ్ళు కొనడానికి ₹ 564 ఖర్చు చేశాడు. ఒక్కొక్క పెన్ను ఖరీదు ₹ 7 , పెన్సిల్ ఖరీదు ₹ 3 , మరియు మొత్తము పెన్నులు, పెన్సిళ్ల సంఖ్య 108 అయిన అతను ఏరకమైన వస్తువులను ఎన్నెన్ని కొన్నాడు?



16. ఒక పాఠశాలలోని వాలీబాల్ కోర్టు యొక్క చుట్టుకొలత 177 అడుగులు. దీని పొడవు, వెడల్పుకు రెట్టింపు అయిన వాలీబాల్ కోర్టు యొక్క పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?



17. ఒక పుస్తకము తెరచి వుంది. తెరిచిన ఆ రెండు పేజీలలో పేజీ నెంబర్ల మొత్తము 373 అయిన పేజీ నెంబర్లను కనుగొనుము.
(సూచన: తెరచిన పేజీల సంఖ్యలు x మరియు x + 1 అనుకొనండి)

2.4 ఇరువైపులా చరరాశిగల సామాన్య సమీకరణాల సాధన :

సమీకరణం అనగా రెండు సమాసాల మధ్య సమానత్వమని మనకు తెలుసు. $2x - 7 = 35$ లో $2x-7$ మరియు 35 లు రెండు సమాసములు. ఇప్పటి వరకూ మనము చూసిన సమీకరణాలలో RHS ఒక సంఖ్యయే. ఎల్లప్పుడు ఇలానే వుండకపోవచ్చు. ఇరువైపులా చరరాశులతో కూడిన సమాసాలు కూడా వుండవచ్చు. ఇటువంటి సమీకరణాలు ఏవిధంగా ఏర్పడుతాయో చూద్దాం.

కింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 11: రఫీ మరియు ఫాతిమల ప్రస్తుత వయస్సుల నిష్పత్తి 7 : 5. 10 సం॥ల తరువాత వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 9 : 7 అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము ?

సాధన: రఫీ మరియు ఫాతిమల ప్రస్తుత వయస్సుల నిష్పత్తి 7:5 కనుక రఫీ యొక్క వయస్సును $7x$ గాను మరియు ఫాతిమా యొక్క వయస్సు $5x$ గాను తీసుకోవచ్చు.

(గమనిక: $7x$, $5x$ ల నిష్పత్తి $7x : 5x$ మరియు 7:5 కు సమానము)

10 సం॥ల అనంతరము రఫీ యొక్క వయస్సు $= 7x + 10$

మరియు ఫాతిమ యొక్క వయస్సు $= 5x + 10$

10 సం॥ల అనంతరం వారి వయస్సుల నిష్పత్తి $= 7x + 10 : 5x + 10$

అయితే దత్తాంశము ప్రకారము ఈ నిష్పత్తి 9 : 7 కు సమానము.

$\Rightarrow \quad 7x + 10 : 5x + 10 = 9 : 7$

i.e., $7(7x + 10) = 9(5x + 10)$

$\Rightarrow$ $49x + 70 = 45x + 90.$

పై సమీకరణంలో ఇరువైపులా చరరాశులను కలిగిన బీజీయ సమాసాలు వుండటం గమనించారా ? ఇలాంటి సమీకరణాల సాధనను ఇపుడు నేర్చుకుందాం !

పై సమీకరణము $49x + 70 = 45x + 90$

$\Rightarrow 49x - 45x = 90 - 70$ (70 ని RHS కు, $45x$ ను LHS కు పక్షాంతరం చెందించగా)

$\therefore \quad 4x = 20$

$\therefore \quad x = \frac{20}{4} = 5$

రఫీ యొక్క వయస్సు = $7x = 7 \times 5 = 35$ సం॥లు.

మరియు ఫాతిమా యొక్క వయస్సు $= 5x = 5 \times 5 = 25$ సం॥లు

ఉదాహరణ 12: $5(x + 2) - 2(3 - 4x) = 3(x + 5) - 4(4 - x)$ ను సాధించండి.

సాధన : $5x + 10 - 6 + 8x = 3x + 15 - 16 + 4x$ (కుండలీకరణాలను తొలగించగా)

$13x + 4 = 7x - 1$ (సజాతి పదాలను కూడగా)

$13x - 7x = -1 - 4$ (4 ను RHS కు, $7x$ ను LHS కు పక్షాంతరం చెందించగా)

$6x = -5$

$x = \frac{-5}{6}$ (6 ను RHS కు పక్షాంతరం చెందించగా)

అభ్యాసము - 2.3

క్రింది సమీకరణాలను సాధించుము :

1. $7x - 5 = 2x$
2. $5x - 12 = 2x - 6$
3. $7p - 3 = 3p + 8$
4. $8m + 9 = 7m + 8$
5. $7z + 13 = 2z + 4$
6. $9y + 5 = 15y - 1$
7. $3x + 4 = 5(x - 2)$
8. $3(t - 3) = 5(2t - 1)$

9. $5(p-3) = 3(p-2)$

10. $5(z+3) = 4(2z+1)$

11. $15(x-1) + 4(x+3) = 2(7+x)$

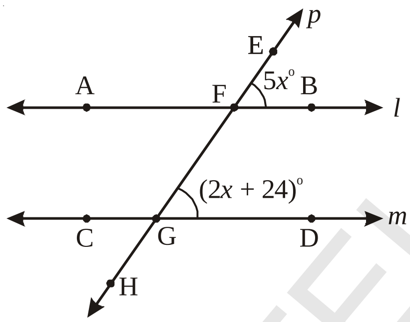
12. $3(5z-7) + 2(9z-11) = 4(8z-7) - 111$

13. $8(x-3) - (6-2x) = 2(x+2) - 5(5-x)$

14. $3(n-4) + 2(4n-5) = 5(n+2) + 16$

2.4.1 మరికొన్ని అనువర్తనాలు

ఉదాహరణ 13: క్రింది పటములో $l \parallel m$ మరియు p తిర్యగ్రేఖ అయిన 'x' విలువను కనుగొనుము ?



సాధన: $l \parallel m$ p తిర్యగ్రేఖ అని ఇవ్వబడింది.

$\therefore \angle EFB = \angle FGD$ (సదృశకోణాలు)

$\therefore 5x^{o} = (2x+24)^{o}$

$5x^{o} - 2x^{o} = 24^{o}$

$3x^{o} = 24^{o}$

$$x = \frac{24}{3} = 8^{o}$$

ఉదాహరణ 14: హేమ తన కూతురు ధామిని కంటే 24 సం॥ల పెద్దది. 6 సం॥ల క్రితం హేమ వయస్సు ధామిని వయస్సుకు 3 రెట్లు. అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.

సాధన : ధామిని యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 'x' అనుకొనిన మనము ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేసుకోగలము.

	ధామిని	హేమ
ప్రస్తుత వయస్సు	x	$x + 24$
6 సం॥ల క్రితం	$x - 6$	$(x+24) - 6 = x + 24 - 6 = x + 18$

అయితే దత్తాంశము ప్రకారము 6 సం॥ల క్రితం హేమ వయస్సు ధామిని వయస్సుకు 3 రెట్లు.

$\therefore\ x + 18 = 3(x - 6)$

$x + 18 = 3x - 18$

$x - 3x = -18 - 18$

$-2x = -36$

$x = 18.$

$\therefore$ ధామిని యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $= x = 18$ సం॥లు

హేమ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $= x + 24 = 18 + 24$

$= 42$ సం॥లు.

ఉదాహరణ 15: ఒక రెండంకెలు గల సంఖ్యలో రెండు అంకెల మొత్తం 8. ఈ సంఖ్యకు 18 కలిపిన, సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారు అవుతాయి. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము ?

సాధన : సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను 'x' అనుకొనిన

పదుల స్థానంలోని అంకె $= 8 - x$ అవుతుంది. (రెండు అంకెల మొత్తం 8)

$\therefore$ సంఖ్య $= 10(8 - x) + x = 80 - 10x + x = 80 - 9x$ —— (1)

ఇప్పుడు, సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య $= 10 \times (x) + (8 - x)$

$= 10x + 8 - x = 9x + 8$

దత్తాంశం ప్రకారం సంఖ్యకు 18 ని కలిపిన సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారు అవుతాయి.

$\therefore$ సంఖ్య + 18 = సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సంఖ్య

$\Rightarrow\ (80 - 9x) + 18 = 9x + 8$

$98 - 9x = 9x + 8$

$98 - 8 = 9x + 9x$

$90 = 18x$

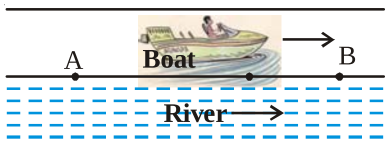
$$x = \frac{90}{18} = 5$$

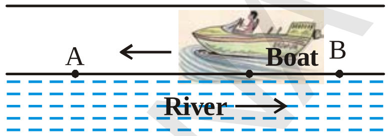
x విలువను (1) లో ప్రతిక్షేపించి కావలసిన సంఖ్యను పొందవచ్చు.

$\therefore$ కావలసిన సంఖ్య $= 80 - 9 \times 5 = 80 - 45 = 35.$

ఉదాహరణ 16: ఒక మోటారు పడవ నదిలో నీటి ప్రవాహం వెంట ప్రయాణిస్తూ ఒడ్డున గల రెండు పట్టణాల మధ్య దూరమును 5 గం॥లలో ప్రయాణిస్తుంది. అదే మోటారు పడవ నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా ప్రయాణిస్తూ అదే దూరమును 6 గం॥లలో ప్రయాణిస్తుంది. నీటి ప్రవాహ వేగము 2 కి.మీ/గం. అయిన నిశ్చల నీటిలో మోటారు పడవ వేగం ఎంత?

సాధన : మనము నిశ్చల నీటిలో పడవ యొక్క వేగమును కనుగొనాలి కనుక దీనిని 'x' కిమీ/గం॥ గా తీసుకుందాం.





నీటి ప్రవాహం వెంట పడవ ప్రయాణిస్తున్నపుడు నీరు తన వేగంతో పడవను ముందుకు నెట్టుతుంది కనుక నీటి ప్రవాహం వెంట ప్రయాణిస్తున్నపుడు పడవ వేగము = $(x + 2)$ కిమీ/గం॥

$\therefore$ నీటి ప్రవాహం వెంట ప్రయాణిస్తున్నపుడు 5 గం॥లలో ప్రయాణించిన దూరము $= 5\,(x + 2)$ కిమీ.

$\therefore$ A మరియు B ల మధ్య దూరము $5\,(x + 2)$ కిమీ.

కానీ పడవ నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా వెళ్ళునపుడు ప్రవాహ వేగానికి వ్యతిరేకంగా వెళ్ళాలి కనుక నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా ప్రయాణిస్తున్నపుడు పడవ వేగము = $(x - 2)$ కిమీ/గం॥. నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా ప్రయాణిస్తున్నపుడు 6 గం॥లలో పడవ ప్రయాణించిన దూరము $= 6(x - 2)$ కిమీ/గం॥

$\therefore$ A మరియు B ల మధ్య దూరము $6\,(x - 2)$ కిమీ

అయితే, A, B ల మధ్య దూరము స్థిరము కనుక

$\therefore\ 5\,(x + 2) = 6\,(x - 2)$

$\Rightarrow\quad 5x + 10 = 6x - 12$

$\Rightarrow\quad 5x - 6x = -12 - 10$

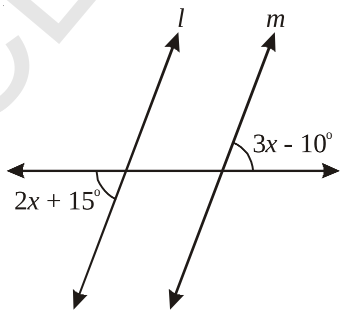
$\therefore\quad -x = -22$

$x = 22.$

$\therefore$ నిశ్చల నీటిలో పడవ వేగము = 22 కిమీ/గం॥

అభ్యాసము - 2.4

1. $l \parallel m$ అయిన క్రింది పటములో 'x' విలువను కనుగొనుము ?



2. ఒక సంఖ్య యొక్క 8 రెట్ల నుంచి 10 ని తగ్గించిన వచ్చే విలువ, అదే సంఖ్య యొక్క 6 రెట్లు మరియు 4ల మొత్తం విలువకు సమానము. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
3. ఒక రెండంకెల సంఖ్యలో రెండు అంకెల మొత్తము 9. ఈ సంఖ్య నుంచి 27 ను తీసివేసిన సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారు అవుతాయి. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
4. ఒక సంఖ్యను 5:3 నిష్పత్తిలో రెండు భాగాలుగా విభజించారు. ఒక భాగము రెండవ భాగం కంటే 10 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యను, రెండు భాగాలను కనుగొనుము?
5. నేను ఒక సంఖ్యను 3 రెట్లు చేసి 2 కలిపినపుడు వచ్చిన ఫలితము, అదే సంఖ్యను 50 నుంచి తీసివేసినపుడు వచ్చిన ఫలితము సమానము. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము ?
6. మేరి వయస్సు తన సోదరి వయస్సుకు రెట్టింపు. 5 సం॥ల అనంతరం మేరి వయస్సు తన సోదరి వయస్సు కంటే 2సం॥లు ఎక్కువ. అయిన వారిరువురి వయస్సును కనుగొనుము?
7. 5 సం॥ల తరువాత రేష్మ వయస్సు 9 సం॥ల క్రితం ఆమె వయస్సుకు 3 రెట్లు. అయిన ఆమె ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?
8. ఒక పట్టణ జనాభా 1200 పెరిగిన తరువాత ప్రస్తుత జనాభాలో 11% తగ్గింది. ఇప్పుడు ఆ పట్టణ జనాభా పెరుగుటకు ముందు ఉన్న జనాభా కన్నా 32 తక్కువ. అయిన మొదట ఆ పట్టణ జనాభా ఎంత?

2.5 సంక్షిప్తీకరించదగిన సమీకరణాలు

ఉదాహరణ 17: $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$ ను సాధించుము.

సాధన : $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ($\frac{x}{3}$ ని L.H.S. కు, $\frac{1}{4}$ ను R.H.S కు పక్షాంతరం చెందించగా)

$\frac{3x-2x}{6}=\frac{2+1}{4}$ (2, 3 ల క.సా.గు 6 మరియు 2, 4 ల క.సా.గు 4)

$\frac{x}{6}=\frac{3}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{4}\times 6$ (6 ను R.H.S. కు పక్షాంతరం చెందించగా)

$\therefore x=\frac{9}{2}$

$\therefore x=\frac{9}{2}$ ఇదియే ఇచ్చిన సమీకరణ సాధన.

ఉదాహరణ 18: $\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$ ను సాధించుము.

సాధన :
$$\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5(x-4)-7(x+4)}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5x-20-7x-28}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{-2x-48}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$-2x-48=\frac{(x+3)}{7}\times 35$$

$$\Rightarrow \quad -2x-48=(x+3)\times 5$$

$$\Rightarrow \quad -2x-48=5x+15$$

$$\Rightarrow \quad -2x-5x=15+48$$

$$-7x = 63$$

$$x=\frac{63}{-7}=-9.$$

ఉదాహరణ 19: $\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{12}{7}$ ను సాధించుము. ——————(1)

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణమును ఇరువైపులా $2x+3$ చే గుణించగా

$$\frac{5x+2}{2x+3}\times(2x+3)=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

$$5x+2=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

ఇచ్చిన సమీకరణమును తిరిగి ఇరువైపులా 7 చే గుణించగా

$$7\times(5x+2)=7\times\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

$$\Rightarrow 7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3) \qquad \text{———————}(2)$$

$$35x + 14 = 24x + 36$$

$$35x - 24x = 36 - 14$$

$$11x = 22$$

$$\therefore x = \frac{22}{11} = 2$$

సమీకరణము (1), (2) లను గమనించండి.

ఇవ్వబడిన సమీకరణము	సూక్ష్మీకరించబడిన సమీకరణము
$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$	$7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$

మీరేమి గమనించారు ? ఇచ్చట మనం చేసినదేమిటంటే :

1. LHS లోని లవమును RHS లోని హారముతో గుణించుము
2. LHS లోని హారమును RHS లోని లవముతో గుణించుము.

$$\boxed{\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{12}{7}}$$

$$\boxed{\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{12}{7}}$$

3. (1), (2) సోపానము నుంచి వచ్చిన బీజీయ సమాసాలను సమానం చేయాలి. $7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$

ఈ పద్ధతిని అడ్డగుణకారము అంటాము. ఈ విధానాన్ని క్రింది ఉదాహరణలలో ఉపయోగిద్దాం.

ఉదాహరణ 20: $\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$ ను సాధించుము.

సాధన : అడ్డగుణకారము ద్వారా మనము ఈ క్రింది సమీకరణమును పొందవచ్చు.

$$7 \times (x + 7) = 4 \times (3x + 16)$$

$$7x + 49 = 12x + 64$$

$$7x - 12x = 64 - 49$$

$$-5x = 15$$

$$x = -3$$

$$\boxed{\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}}$$

ఉదాహరణ 21: రెహాన ఒక గౌను కొనుగోలుపై 24% డిస్కౌంట్ పొందింది. డిస్కౌంట్ అనంతరం ఆమె ₹ 380 చెల్లించింది. అయిన గౌను యొక్క ప్రకటన వెలను కనుగొనుము?

సాధన : గౌను యొక్క ప్రకటన వెలను ₹ x అనుకొంటే దీనిపై 24% డిస్కౌంట్ పొందింది.

రెహానా చెల్లించిన సొమ్ము = $x - x$ లో 24%

$\Rightarrow$ $x - x$ లో 24% $= 380$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{24}{100} \times x = 380$$

$$\Rightarrow \quad \frac{100x - 24x}{100} = 380$$

$$\Rightarrow \quad \frac{76x}{100} = 380$$

$$x = \frac{380 \times 100}{76}$$

$$\therefore \quad x = 500$$

$\therefore$ గౌను యొక్క ప్రకటిత వెల = ₹ 500

ఉదాహరణ 22: ఒక సంఖ్య యొక్క $\frac{4}{5}$ రెట్లు, దాని యొక్క $\frac{3}{4}$ రెట్ల కంటే 4 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము?

సాధన : సంఖ్యను 'x' అనుకుందాం.

సంఖ్యకు $\frac{4}{5}$ రెట్లు $= \frac{4}{5}x$

సంఖ్యకు $\frac{3}{4}$ రెట్లు $= \frac{3}{4}x$

అయితే దత్తాంశము ప్రకారము $\frac{4}{5}x$, $\frac{3}{4}x$ కంటే 4 ఎక్కువ.

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x = 4$$

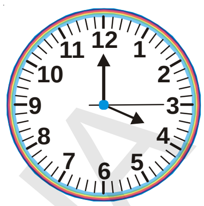
$$\frac{16x - 15x}{20} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = 4 \quad \Rightarrow x = 80$$

$\therefore$ కావలసిన సంఖ్య = 80.

ఉదాహరణ 23: జాన్ తన గడియారమును ₹ 301 కు అమ్మగా 14% నష్టపోయాడు. అయిన జాన్ గడియారమును ఎంతకు కొన్నాడు ?

సాధన : జాన్ గడియారమును కొన్న వెల $= x$ అనుకుందాం.



దీనిపై నష్టము $= x$ లో $14\% = \frac{14}{100} \times x = \frac{14x}{100}$

గడియారము అమ్మిన వెల = కొన్నవెల – నష్టము

$$\Rightarrow 301 = x - \frac{14x}{100}$$

$$301 = \frac{100x - 14x}{100}$$

$$301 = \frac{86x}{100}$$

$$\frac{301 \times 100}{86} = x$$

$$350 = x$$

$\therefore$ గడియారం కొన్న వెల = ₹ 350.

ఉదాహరణ 24: ఒక మనిషి తను నడవ వలసిన దూరములో $\frac{2}{3}$ వ భాగము 4 కిమీ/గం॥ వేగముతో మిగిలిన భాగము 5 కిమీ/గం॥ వేగంతో నడిచాడు. ఇతను నడిచిన మొత్తము కాలము 42 ని॥ అయిన నడిచిన మొత్తం దూరం ఎంత?

సాధన : మొత్తం నడిచిన దూరమును 'x' కి.మీ. అనుకుందాం.

	మొదటి భాగము	రెండవ భాగము
నడిచిన దూరము	x లో $\frac{2}{3}$ వ భాగము $= \frac{2x}{3}$	మిగిలిన దూరము $= x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$
వేగము	4 కి.మీ./గంట	5 కి.మీ/గంట
కాలము	$\frac{\frac{2}{3}x}{4} = \frac{2x}{12}$ గంటలు	$\frac{\frac{x}{3}}{5} = \frac{x}{15}$ గంటలు

పట్టికనుంచి మొత్తం కాలం $= \frac{2x}{12} + \frac{x}{15}$ గంటలు

$$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15}) \text{ గంటలు } = 42 \text{ నిమిషాలు}$$

$$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15}) \text{ గంటలు } = \frac{42}{60} \text{ గంటలు}$$

$$\frac{2x}{12}+\frac{x}{15}=\frac{42}{60}$$

$$\frac{10x+4x}{60}=\frac{42}{60}$$

$$\Rightarrow \quad 14x = 42$$

$$\Rightarrow \quad x = 3$$

$\therefore$ మొత్తం దూరం $x = 3$ కి.మీ.

ఉదాహరణ 25: ఒక భిన్నంలో లవము, హారము కంటే 6 తక్కువ. లవముకు 3 కలిపిన భిన్నము $\frac{2}{3}$ కు సమానమవుతుంది. అయిన ఆభిన్నమును కనుగొనుము.

సాధన : భిన్నము యొక్క హారము 'x' అనుకొనిన

భిన్నము యొక్క లవము $= x - 6$

$\therefore$ భిన్నము $= \dfrac{x-6}{x}$

దత్తాంశము ప్రకారము లవమునకు 3 కలిపిన అది $\frac{2}{3}$ కు సమానమౌతుంది.

$$\Rightarrow \frac{x-6+3}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x-3}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x-9=2x$$

$$x = 9$$

$\therefore$ భిన్నము $= \dfrac{x-6}{x} = \dfrac{9-6}{9} = \dfrac{3}{9}$

$\therefore$ భిన్నము $= \dfrac{3}{9}$.

ఉదాహరణ 26: శిరీష వద్ద 50 పైసలు మరియు 25 పైసల నాణెములు కలవు. 50 పైసల నాణెముల సంఖ్యకు రెట్టింపు సంఖ్యలో 25 పైసల నాణెములు కలవు. వీని మొత్తం విలువ ₹ 9 అయిన ఏ ఏ రకం నాణెములు ఎన్నెన్ని కలవు ?

సాధన : 50 పైసల నాణెముల సంఖ్య $= x$ అనుకొనిన

25 పైసల నాణెముల సంఖ్య $= 2x$ అవుతుంది.

50 పైసల నాణెముల విలువ $= x \times 50$ పైసలు $= \dfrac{50x}{100} = ₹\dfrac{x}{2}$

25 పైసల నాణెముల విలువ $= 2x \times 25$ పైసలు $= \dfrac{2 \times 25x}{100} = \dfrac{2x}{4} = ₹\,\dfrac{x}{2}$

$\therefore$ మొత్తం నాణెముల మొత్తం విలువ $= ₹\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)$

అయితే దత్తాంశము ప్రకారము ఈ మొత్తం విలువ = ₹ 9

$$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{x}{2}=9$$

$$\frac{2x}{2}=9$$

$$\therefore \; x = 9$$

$\therefore$ 50 పైసల నాణెముల సంఖ్య $= x = 9$

25 పైసల నాణెముల సంఖ్య $= 2x = 2 \times 9 = 18.$

ఉదాహరణ 27: ఒక మనిషి తన మోపెడ్‌పై 24 కి.మీ/ గంట వేగంతో ప్రయాణించిన అతను తన గమ్య స్థానమును 5 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరుతాడు. కానీ 30 కి.మీ/గంట వేగంతో ప్రయాణించిన గమ్యస్థానమును 4 నిమిషాలు ముందుగా చేరుతాడు. అయిన అతను చేరవలసిన గమ్యస్థానము ఎంత దూరములో కలదు?

సాధన : చేరవలసిన గమ్యస్థానము యొక్క దూరము 'x' కి.మీ. అనుకుందాం.

24 కి.మీ/గంట వేగంతో 'x' కి.మీ. ప్రయాణించుటకు పట్టుకాలము $= \dfrac{x}{24}$ గం.

30 కి.మీ/గంట వేగంతో ప్రయాణించిన పట్టుకాలము $= \dfrac{x}{30}$ గం.

అయితే దత్తాంశము ప్రకారము ఈ రెండింటి మధ్య తేడా = 9 నిమిషాలు = $\frac{9}{60}$ గంటలు.

$$\therefore \quad \frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{9}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{5x - 4x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{9}{60} \times 120 = 18$$

$\therefore$ గమ్యస్థానము యొక్క దూరము = 18 కి.మీ.

అభ్యాసం - 2.5

1. క్రింది సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $\frac{n}{5} - \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 14$

(ii) $\frac{z}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z}{6} = 8$ (iv) $\frac{2p}{3} - \frac{p}{5} = 11\frac{2}{3}$

(v) $9\frac{1}{4} = y - 1\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} + \frac{x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{1}{5}$

(vii) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ (viii) $\frac{2x-3}{3x+2} = \frac{-2}{3}$

(ix) $\frac{8p-5}{7p+1} = \frac{-2}{4}$ (x) $\frac{7y+2}{5} = \frac{6y-5}{11}$

(xi) $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$ (xii) $\frac{3t+1}{16} - \frac{2t-3}{7} = \frac{t+3}{8} + \frac{3t-1}{14}$

2. ఒక సంఖ్య యొక్క 3 వ భాగము దాని 5 వ భాగము కంటే 4 ఎక్కువ అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము?

3. రెండు ధన సంఖ్యల బేధము 36. ఒక దానిని రెండవ దానితో భాగించగా వచ్చే భాగఫలము 4 అయిన వానిని కనుగొనుము?

(సూచన : ఒక సంఖ్య 'x', అనుకొనిన రెండవ సంఖ్య '$x - 36$')

4. ఒక భిన్నములో లవము, హారము కంటే 4 తక్కువ. అయితే లవ, హారాలకు ఒకటి కలిపిన అది $\frac{1}{2}$ కు సమానమౌతుంది. అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనుము?

5. మూడు వరుస సంఖ్యలను 10, 17, 26 లచే భాగించినపుడు భాగఫలముల మొత్తం 10ని ఇచ్చే మూడు వరుస సంఖ్యలను కనుగొనుము?

(సూచన: మూడు వరుస సంఖ్యలను x , $x + 1$, $x + 2$, అనుకొనిన $\frac{x}{10} + \frac{x+1}{17} + \frac{x+2}{26} = 10$)

6. 40 మంది విద్యార్థులు గల తరగతిలో బాలికల సంఖ్య, బాలుర సంఖ్యలో $\frac{3}{5}$ వ వంతు అయిన బాలుర సంఖ్యను కనుగొనుము?

7. 15 సం॥ల తరువాత మేరి వయస్సు, ప్రస్తుత వయస్సుకు 4 రెట్లు అయిన మేరి ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

8. అరవింద్ దగ్గర వున్న కిడ్డీ బ్యాంక్‌లో రూపాయి నాణెములు, అర్థరూపాయి నాణెములు గలవు. అర్థరూపాయి నాణెముల సంఖ్య, రూపాయి నాణెముల సంఖ్యకు 3 రెట్లు. నాణెముల మొత్తం విలువ ₹ 35 అయిన ఏఏ రకం నాణెములు ఎన్నెన్ని గలవు.

9. A మరియు B లు కలసి ఒక పనిని 12 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. A ఒక్కడే ఆ పనిని 20 రోజులలో పూర్తి చేసిన B ఒక్కడే ఆ పనిని ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలడు.

10. ఒక రైలు 40 కి.మీ./గంట వేగంతో ప్రయాణించిన గమ్యస్థానమును 11 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరును. ఒకవేళ 50 కి.మీ./గంట వేగంతో ప్రయాణించిన 5 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరును. అయిన రైలు ప్రయాణించవలసిన దూరమును కనుగొనుము?

11. ఒక జింకల గుంపులో $\frac{1}{4}$ వ భాగము అడవికి వెళ్లినాయి. మొత్తంలో $\frac{1}{3}$ వ భాగము పచ్చిక మైదానంలో వున్నాయి. మిగిలిన 15 నది ఒడ్డున నీరు త్రాగుతున్నాయి. అయిన మొత్తం జింకల సంఖ్యను కనుగొనుము?

12. ఒక దుకాణదారుడు ఒక రేడియోను ₹903 లకు అమ్మటం వల్ల అతను 5% లాభాన్ని పొందుతాడు. అయిన రేడియో యొక్క కొన్న వెలను కనుగొనుము?

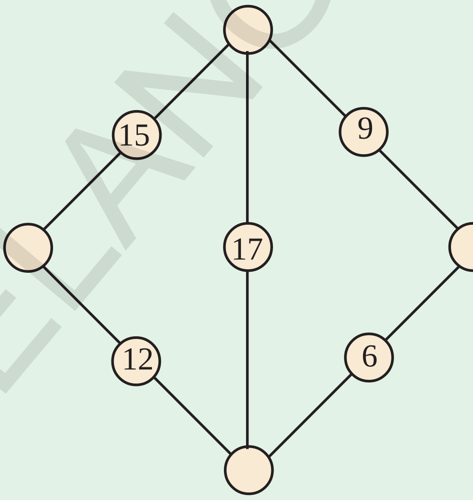
13. శేఖర్ తన వద్ద వున్న మిఠాయిలలో సావు భాగము రేణుకు, 5 మిఠాయిలు రాజికి ఇచ్చాడు. ఇంకా తన వద్ద 7 మిఠాయిలు మిగిలి వున్న అతని వద్ద మొదట వున్న మిఠాయిలు ఎన్ని?

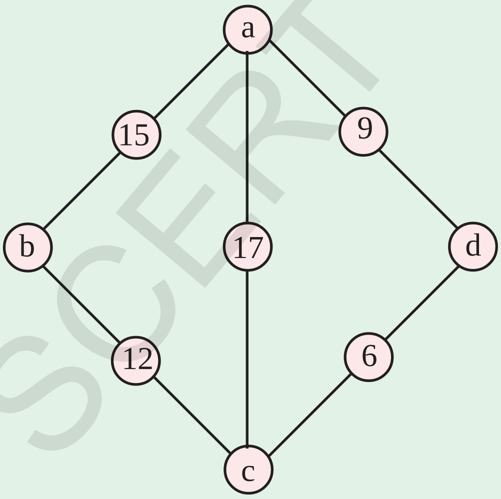
మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఒక సమీకరణం యొక్క పరిమాణము ఒకటి అయిన దానిని రేఖీయ సమీకరణం అంటాం.
2. ఒక రేఖీయ సమీకరణంలో ఒకే ఒక చరరాశి వున్న దానిని ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణము లేదా సామాన్య సమీకరణము అంటాము.
3. సమీరకరణంలో చరరాశి బదులుగా ఏ విలువను ప్రతిక్షేపిస్తే L.H.S. = R.H.S. అవుతుందో ఆ చరరాశి విలువనే ఆ సమీకరణమునకు సాధన అంటాము.
4. స్థిరరాశులలాగానే చరరాశులను కూడా సమీకరణం యొక్క ఒకవైపు నుంచి మరిఒక వైపుకు పక్షాంతరం చెందించవచ్చు.

మ్యాజిక్ డైమండ్

డైమండ్‌లోని ప్రతి వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం సమానమయ్యేలా, గడులను సరయిన సంఖ్యలతో పూరించండి.





సూచన : ఆ సంఖ్యలు $a = x$, $b = 5 + x$, $c = 3 + x$, $d = 11 + x$ రూపంలో ఉంటాయి.

ఏదైనా ఒక సంఖ్య 'x' ప్రతివరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం $20 + 2x$ అగును.

ఉదాహరణకు $x = 1$ అయిన, $a = 1, b = 6, c = 4, d = 12$ అవుతుంది మరియు ప్రతి వరుసలోని అంకెల మొత్తం 22 అగును.

అధ్యాయం 3

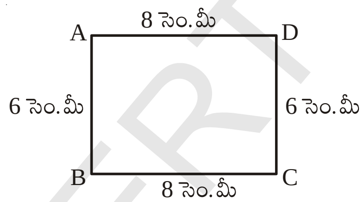
చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు

3.0 పరిచయం

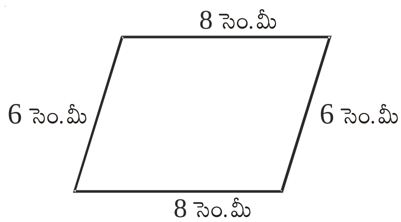
మన చుట్టూ పంట పొలాలు, ఇండ్లు, వంతెనలు, రైలు మార్గాలు, పాఠశాల భవనాలు, ఆటస్థలాలు వంటివి అనేకం ఎల్లప్పుడూ చూస్తూ వుంటాం. అదే విధంగా గాలి పటాలు, లూడో అట్టలు, క్యారం బోర్డు, కిటికీలు, నల్లబల్లలు వంటివి కూడా అనేకం చూస్తాం. ఇటువంటి వాటిని పటాలుగా గీస్తే మనకు ఎలా కనిపిస్తాయి? వీటన్నింటి యొక్క ప్రాథమిక జ్యామితి ఆకారాలు ఏమిటి? వీటిలో అత్యధికంగా నాలుగు భుజాలు కలిగిన చతుర్భుజాలు వస్తాయి.

కమల్ మరియు జోసెఫ్‌లు పొడవు 8 సెం.మీ., వెడల్పు 6 సెం.మీ. కొలతలు గల పటాలను వేర్వేరుగా దిగువ విధంగా గీశారు.

కమల్



జోసెఫ్

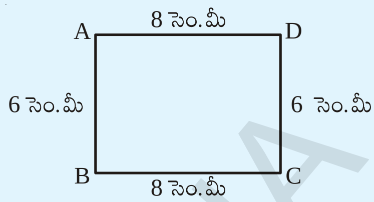


ఈ రెండు పటాలు ఒకే విధంగా వున్నాయా ?

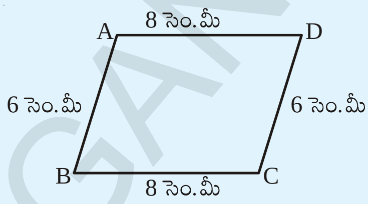
వారిద్దరు గీచిన పటాలు ఒకే కొలతలు కలిగిన చతుర్భుజాలైనప్పటికీ, పటాలు వేర్వేరుగా వున్నాయని గమనించే వుంటారు. మనం త్రిభుజాలు ఏకైకంగా ఎలా గీయగలమో 7వ తరగతిలో తెలుసుకున్నాం. ఏ త్రిభుజ నిర్మాణానికైనా ఖచ్చితంగా మూడు కొలతలు అవసరమని మీకు తెలుసు. అవి మూడు భుజాలు లేదా రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణం లేదా రెండు కోణాలు, వాటి మధ్య భుజం కావచ్చు. మరి ఏకైక చతుర్భుజ నిర్మాణానికి ఎన్ని స్వతంత్ర కొలతలు అవసరం ? ఏకైక చతుర్భుజం అంటే ఇరువురు వ్యక్తులకు ఒకే కొలతలు ఇచ్చినపుడు గీయగలిగే సర్వసమాన చతుర్భుజాలు అని అర్థం.

ఇది చేయండి:

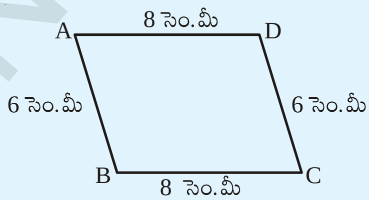
8 సెం.మీ. పొడవు గల ఒక జత కర్రపుల్లలు తీసుకోండి. అదేవిధంగా 6 సెం.మీ పొడవు గల మరొక జత కర్రపుల్లలు తీసుకోండి. వీటితో ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారాన్ని ఏర్పరచండి. ఈ దీర్ఘచతురస్రం ఇవ్వబడిన 4 కొలతలతో (పుల్లలు) ఏర్పడింది. దీనిని వెడల్పు పుల్ల వెంబడి నెమ్మదిగా కదిలించండి. ఏర్పడిన ఈ కొత్త రకం ఆకారం పూర్వపు ఆకారమేనా? పటం (ii) లో ఏర్పడిన చతుర్భుజానికి కొత్త రూపం వచ్చింది కదా! ముందు దీర్ఘ చతురస్రం ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజం అయింది. నీవు ఏమైన కర్రపుల్లలు కొలతలు మార్చావా? లేదు కదా! భుజాల పొడవులు అదే విధంగా ఉన్నాయి. కొత్తగా ఏర్పడిన చతుర్భుజ రూపాన్ని మరొకసారి వ్యతిరేక దిశలో కదిలించండి. ఏ రూపం వచ్చింది? తిరిగి మరలా సమాంతర చతుర్భుజం వచ్చింది. కాని ఇది పూర్తిగా వేరొక రూపం అని పటం (iii) చూసి గమనించవచ్చు. ఈ సందర్భంలోనూ నాలుగు కొలతలు ఒకే విధంగా ఉన్నాయి. దీనిని బట్టి నాలుగు కొలతలతో ఏకైక చతుర్భుజం ఏర్పడదని తెలుసుకోవచ్చు. మరి అయిదు కొలతలు ఒక ఏకైక చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయా? తిరిగి మనం కృత్యాన్ని కొనసాగిద్దాం. 8 సెం.మీ, 6 సెం,మీ పొడవులు గల రెండు జతల పుల్లలతో దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరిచారు కదా! పటం (iv)లో చూపిన విధంగా BD పొడవుకు సమానమయ్యే మరొక కర్ర పుల్లను చేరుద్దాం. ఇప్పుడు ముందుగా చేసినట్లుగా వెడల్పు వెంబడి కదిపి చూడండి. ఆకారంలో మార్పు వచ్చిందా? లేదు కదా! మార్పు చెందలేదని గమనిస్తారు. అందుచే ఐదవ కొలత (పుల్ల) దీర్ఘ చతురస్రాకారాన్ని మార్చడానికి వీలు లేకుండా చేయగలిగింది. మరొక రకమైన చతుర్భుజం ఏర్పడే అవకాశం లేకుండా (కొలతలు మార్చనంత వరకు) జరిగింది. దీనిబట్టి ఒక చతుర్భుజం ఏకైకంగా ఏర్పడాలంటే ఐదు కొలతలు అవసరమని తెలుస్తున్నది. మరి ఏ ఐదు కొలతలైనా ఏకైక చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరచడానికి సరిపోతాయా?



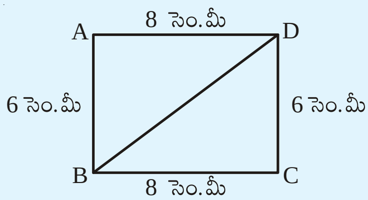
(i)



(ii)

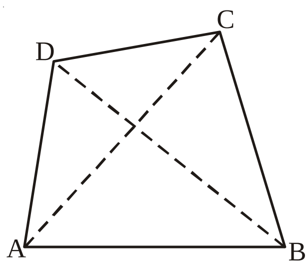


(iii)



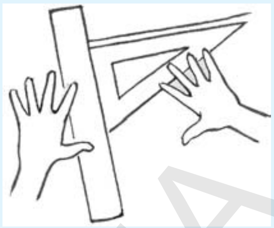
(iv)

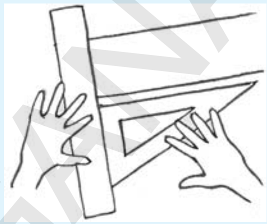
3.1 చతుర్భుజాలు - వాటి ధర్మాలు



ప్రక్క పటంలో ABCD ఒక చతుర్భుజం. A, B, C, D లు దాని యొక్క శీర్షాలు $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ మరియు $\overline{DA}$ లు భుజాలు $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ మరియు $\angle DAB$ లు నాలుగు కోణాలు. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లు రెండు కర్ణాలు.

ఇది చేయండి





కావల్సిన సామగ్రి: కొలబద్ద, మూలమట్టాలు మరియు కోణమాని.

గుర్తుంచుకోవల్సినవి: రేఖలు సమాంతరాలో కాదో తెలుసుకొనుటకు మూలమట్టాలను మొదటి రేఖ నుండి రెండవ రేఖ వైపు జరపాలి.

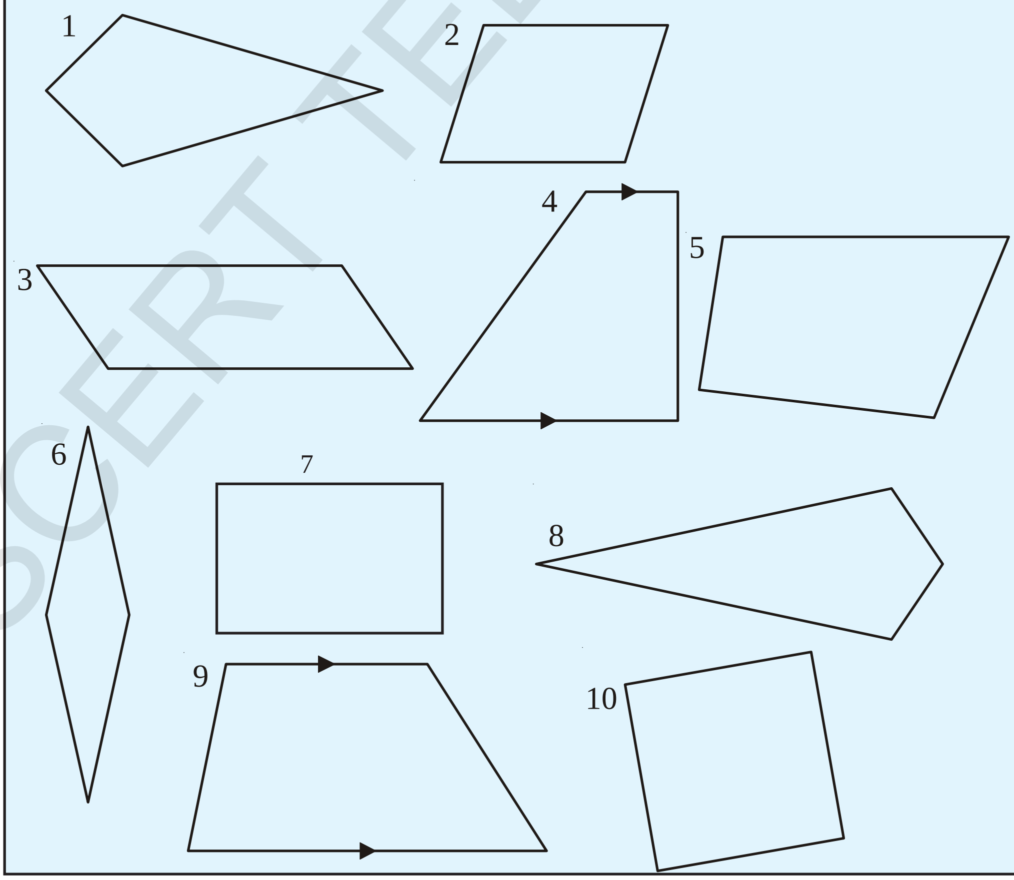
క్రింది పటాలలో ధర్మాలను పరిశీలించడానికి తగు పరికరాలు ఎంచుకొని పరిశోధించి రాయండి.

ప్రతి చతుర్భుజానికి

(a) ఎదుటి భుజాలు సమాంతరమో, కాదో చూడాలి

(b) ప్రతి కోణం కొలత కనుగొనాలి

(c) ప్రతి భుజం పొడవు కనుగొనాలి.



మీరు పరిశోధించి కనుగొన్న ఫలితాలను పట్టికలో నమోదు చేయండి.

చతుర్భుజం సంఖ్య	రెండు జతల సమాంతర భుజాలు	ఒక జత సమాంతర భుజాలు	నాలుగు లంబ కోణాలు	2 జతల ఎదుటి భుజాలు సమానం	2 జతల ఎదుటి కోణాలు సమానం	2 జతల ప్రక్క కోణాలు సమానం	4 భుజాలు సమానం
1	×	×	×	×	×	✓	×
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

సమాంతర చతుర్భుజాలలో రెండు జతల సమాంతర భుజాలుంటాయి.

(a) ఏ పటాలు సమాంతర చతుర్భుజాలు?

(b) సమాంతర చతుర్భుజాలకు గల ఇతర ధర్మాలేవి?

దీర్ఘచతురస్రాలు నాలుగు లంబకోణాలు కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజాలు

(a) ఏ పటాలు దీర్ఘ చతురస్రాలు ?

(b) దీర్ఘ చతురస్ర పటాల ధర్మాలేవి?

సమ చతుర్భుజాలు (రాంబస్‌లు) నాలుగు సమాన భుజాలు కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజాలు

(a) ఏ పటాలను సమచతుర్భుజాలు అనవచ్చు ?

(b) సమ చతుర్భుజాల ధర్మాలేవి?

చతురస్రాలు నాలుగు లంబకోణాలు కలిగిన సమచతుర్భుజాలు (రాంబస్‌లు)

(a) ఏ పటాలు చతురస్రాకారంలో ఉన్నాయి ?

(b) చతురస్రాలకు ఉన్న ధర్మాలేవి?

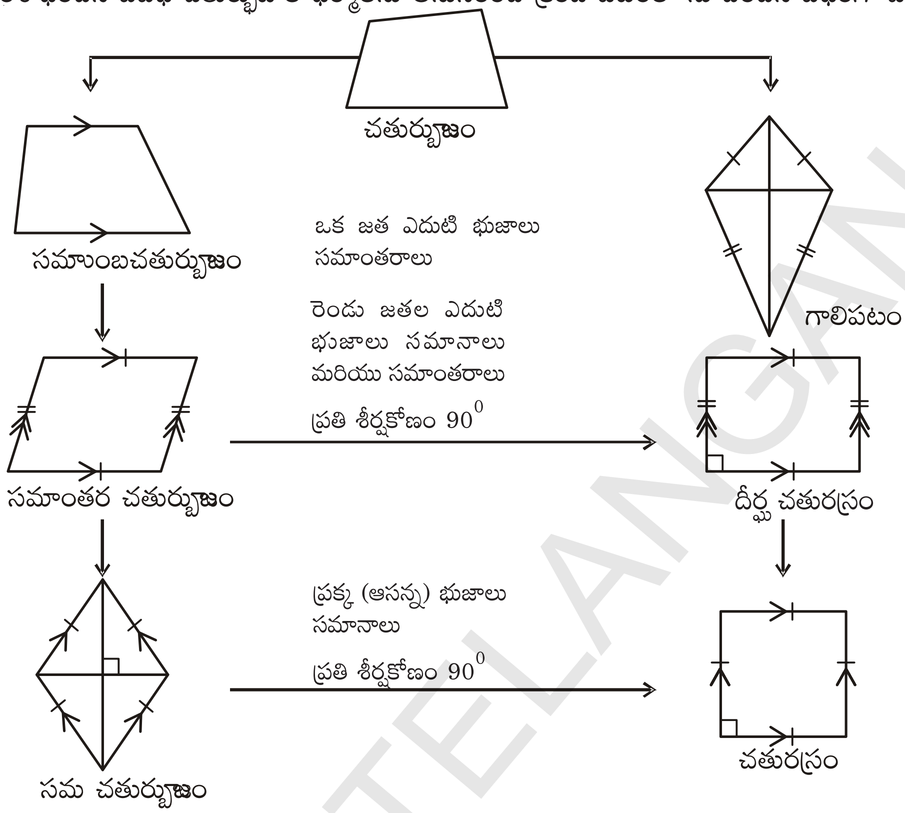
సమలంబ చతుర్భుజాలు కనీసం ఒక జత భుజాలు సమాంతరాలు కలిగిన చతుర్భుజాలు

(a) ఏ పటాలను సమలంబ చతుర్భుజాలని మాత్రమే అనవచ్చు ?

(b) సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క ఇతర ధర్మాలేవి?

1వ, 8వ సంఖ్య గల చతుర్భుజాలు గాలి పటాలంటాం. **గాలి పటాలను** పరిశీలించి కొన్ని ధర్మాలను రాయండి.

మీరు పరిశోధించిన వివిధ చతుర్భుజాల ధర్మాలను అనుసరించి క్రింది పటంలో సూచించిన విధంగా వర్గీకరించవచ్చు.

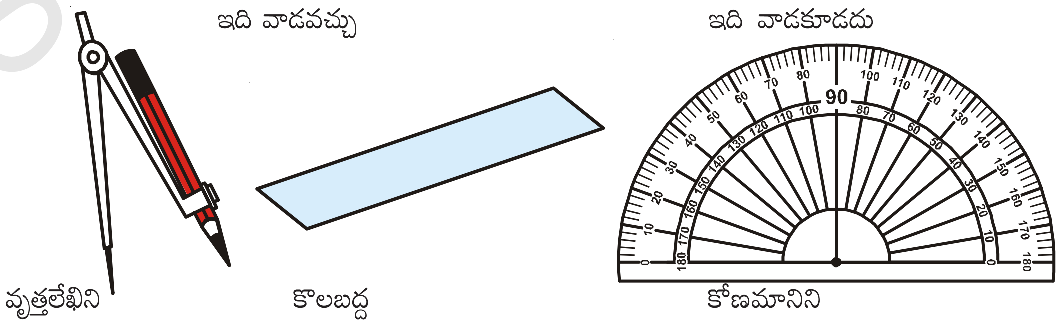


ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి :

1. ప్రతి దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజమేనా ? ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘచతురస్రమేనా ?
2. ఉమ బెల్లం చెక్కని దీర్ఘచతురస్రాకారంలో చేయాలనుకున్నది. అది దీర్ఘచతురస్రాకారంలోనే వుండాలంటే ఆమె దానిని ఎన్ని రకాలుగా పరిశీలించి ఆకారం తీసుకురావాలి?

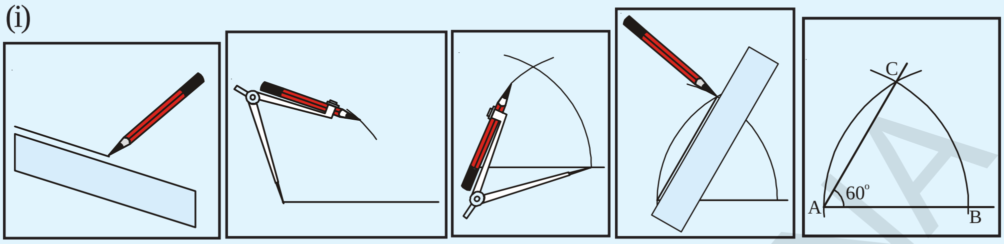
ఇవి చేయండి

60^o కోణాన్ని గీయగలరా?



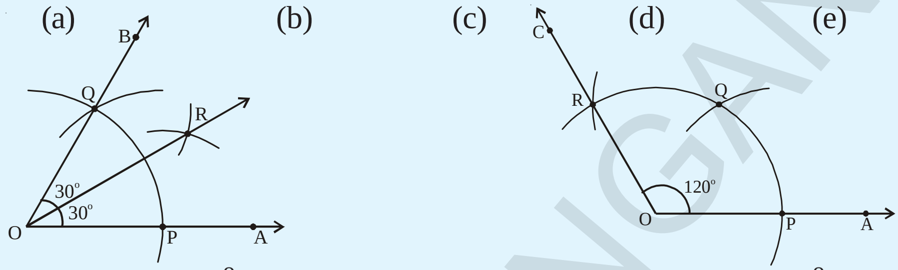
క్రింది పటాలు పరిశీలించి, వాటి నిర్మాణ సోపానాలు రాయండి.

(i)



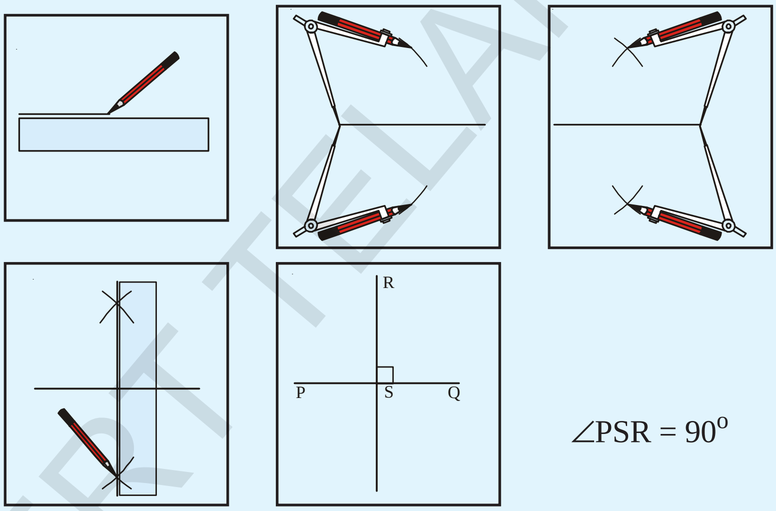
(a) (b) (c) (d) (e)

(ii)



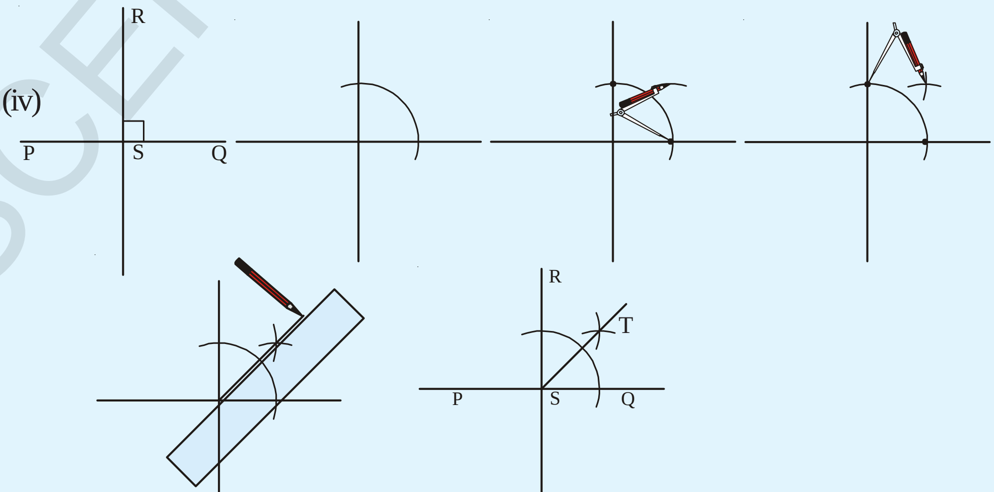
$\angle AOR = 30^o$ $\angle AOC = 120^o$

(iii)



$\angle PSR = 90^o$

(iv)



$\angle QST = 45^o$

3.2 చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు

క్రింది విధంగా కొలతలు ఇచ్చినపుడు చతుర్భుజాలను నిర్మించడం తెలుసుకుందాం.

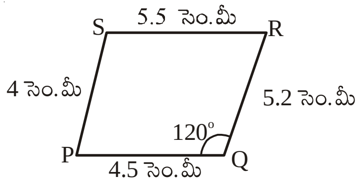
1. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు (S.S.S.S.A)
2. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినపుడు (S.S.S.S.D)
3. మూడు భుజాలు మరియు రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.S.S.D.D)
4. రెండు ఆసన్న భుజాలు మరియు మూడు కోణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.A.S.A.A)
5. మూడు భుజాలు మరియు రెండు ఉమ్మడి కోణాలు కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.A.S.A.S)

3.2.1 నిర్మాణం : నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు (S.S.S.S.A)

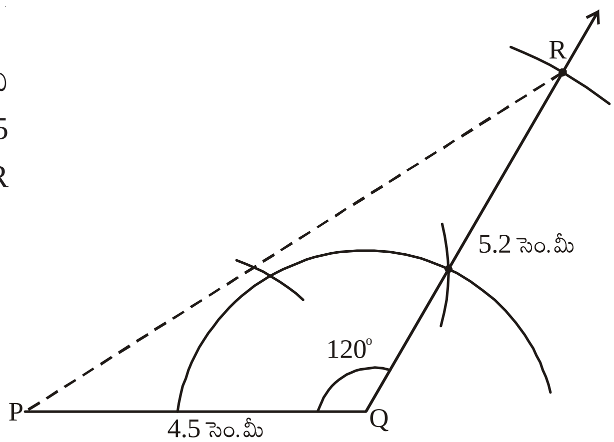
ఉదాహరణ 1 : PQ = 4.5 సెం.మీ, QR = 5.2 సెం.మీ, RS = 5.5 సెం.మీ, PS = 4 సెం.మీ మరియు $\angle PQR = 120^o$. కొలతలతో PQRS చతుర్భుజం నిర్మించండి.

నిర్మాణం :

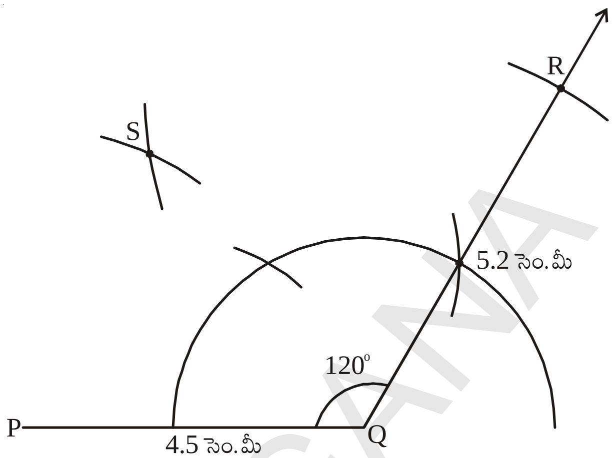
సోపానం 1 : కావల్సిన చతుర్భుజం యొక్క చిత్తు పటం వేసి, ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి. ఈ కొలతలు చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడానికి సరిపోతాయా?



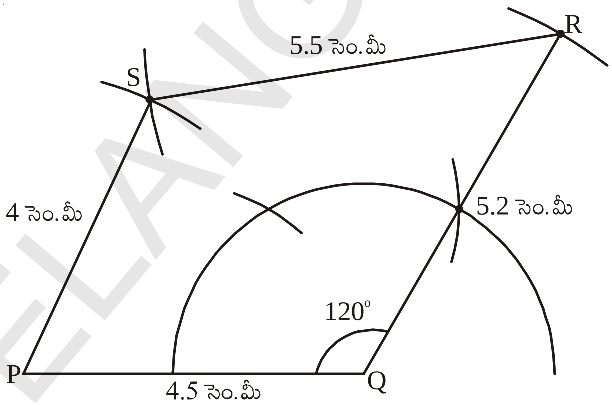
సోపానం 2 : భు.కో.భు త్రిభుజ నియమం ఉపయోగించి ΔPQR నిర్మించాలి. దీనికి PQ = 4.5 సెం.మీ, $\angle PQR = 120^o$ మరియు QR = 5.2 సెం.మీ. తీసుకోవాలి.



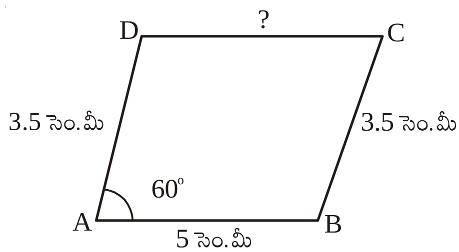
సోపానం 3 : నాల్గవ శీర్షం 'S' ను గుర్తించడానికి, P కేంద్రంగా 4 సెం.మీ (PS = 4 సెం.మీ) వ్యాసార్థంతో ఒక చాపం గీయాలి. అదే విధంగా 5.5 సెం.మీ (RS = 5.5 సెం.మీ) వ్యాసార్థంతో మొదటి చాపంను 'S' వద్ద ఖండించునట్లు మరొక చాపం గీయాలి.



సోపానం 4 : P, S మరియు R, S లను కలిపితే మనకు కావలసిన చతుర్భుజం PQRS వస్తుంది.



ఉదాహరణ 2 : AB = 5 సెం.మీ, BC = 3.5 సెం.మీ మరియు $\angle A = 60^o$. కొలతలతో ABCD సమాంతర చతుర్భుజం గీయండి.

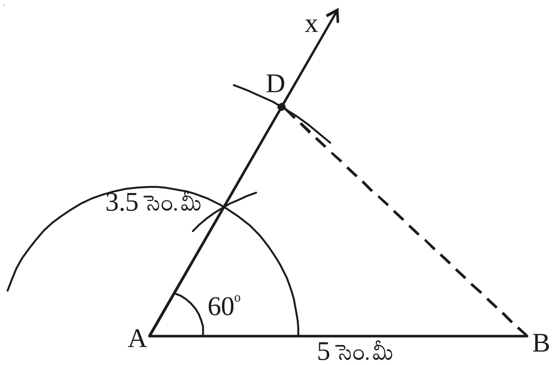


నిర్మాణం :

సోపానం 1 : సమాంతర చతుర్భుజం ABCD యొక్క చిత్తుపటం గీచి, ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి (ఇది ఒక ప్రత్యేక చతుర్భుజమని గుర్తించండి)

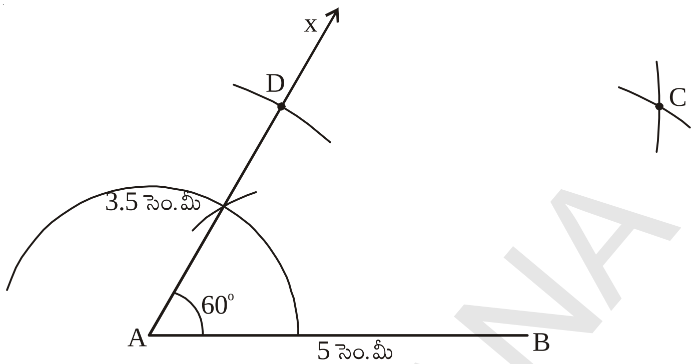
ప్రశ్నలో 3 కొలతలు మాత్రమే ఇవ్వబడ్డాయి. కాని ఇది సమాంతర చతుర్భుజం అయినందున మనం CD=AB=5 సెం.మీ మరియు AD = BC = 3.5 సెం.మీ. అని తీసుకోవచ్చును (ఎలా?)

(ఇప్పుడు మనకు మొత్తం 5 కొలతలు వచ్చాయి).



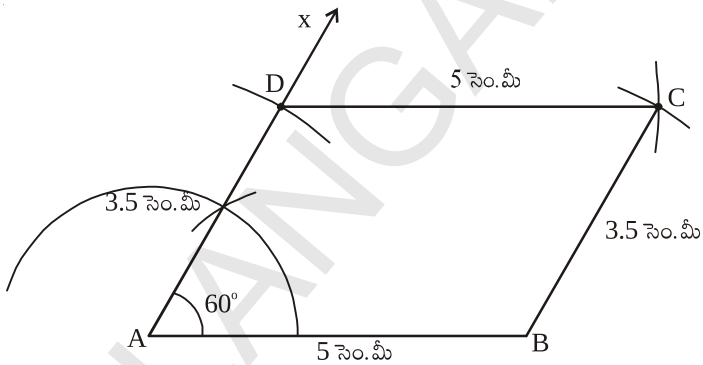
సోపానం 2: AB = 5 సెం.మీ, $\angle A = 60^o$ మరియు AD = 3.5 సెం.మీ కొలతలతో ΔBAD నిర్మించాలి.

సోపానం 3: మిగిలిన రెండు కొలతలు BC=3.5సెం.మీ మరియు DC = 5 సెం.మీ కొలతలతో నాల్గవశీర్షం 'C'ను గుర్తించాలి.



సోపానం 4 : B, C మరియు C, D లను కలుపగా మనకు కావల్సిన సమాంతర చతుర్భుజం ABCD వస్తుంది.

(స్కేలు, కోణమానిని ఉపయోగించి సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలను పరిశీలించండి.)



పై ఉదాహరణలను బట్టి చతుర్భుజ నిర్మాణసోపానాలను క్రింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

సోపానం 1: కావలసిన చతుర్భుజం యొక్క చిత్తు పటం గీయాలి.

సోపానం 2 : ఇవ్వబడిన కొలతలు, నిర్మాణానికి సరిపోనప్పుడు పటాన్ని విశ్లేషించి, నిర్మాణానికి కావలసిన కొలతలను చతుర్భుజ ధర్మాల ఆధారంగా కనుగొనాలి.

సోపానం 3 : నిర్మాణంలో ఐదు కొలతలలో మూడు కొలతలను త్రిభుజ నిర్మాణానికి, మిగిలిన రెండు కొలతలను చతుర్భుజ నాల్గవ శీర్షం గుర్తించడానికి వాడుకోవాలి.

సోపానం 4: నిర్మాణం యొక్క సోపానాలను క్రమపద్ధతిలో వివరంగా వ్రాయాలి.

అభ్యాసము - 3.1

క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలను ఉపయోగించి చతుర్భుజాల నిర్మాణాలను చేయండి. నిర్మాణ క్రమం రాయండి.

(a) ABCD చతుర్భుజంలో AB = 5.5 సెం.మీ, BC = 3.5 సెం.మీ, CD = 4 సెం.మీ, AD = 5 సెం.మీ, మరియు $\angle A = 45^{o}$.

(b) BEST చతుర్భుజంలో BE = 2.9 సెం.మీ, ES = 3.2 సెం.మీ, ST = 2.7 సెం.మీ, BT = 3.4 సెం.మీ మరియు $\angle B = 75^{o}$.

(c) సమాంతర చతుర్భుజం PQRS లో PQ = 4.5 సెం.మీ, QR = 3 సెం.మీ మరియు $\angle PQR = 60^{o}$.

(d) రాంబస్ MATH లో AT = 4 సెం.మీ, $\angle MAT = 120^o$.

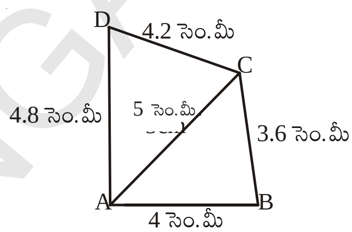
(e) దీర్ఘచతురస్రం FLAT లో FL = 5 సెం.మీ, LA = 3 సెం.మీ.

(f) చతురస్రం LUDO లో LU = 4.5 సెం.మీ.

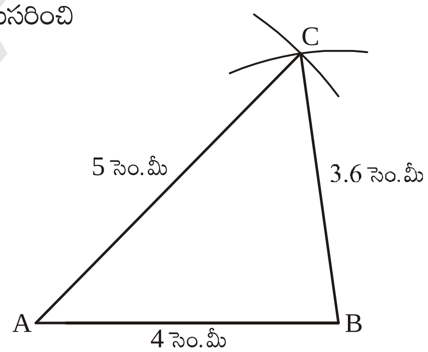
3.2.2 నిర్మాణం : నాలుగు భుజాల కొలతలు మరియు కర్ణం పొడవు ఇచ్చినపుడు (S.S.S.S.D)

ఉదాహరణ 3 : AB = 4 సెం.మీ, BC = 3.6 సెం.మీ, CD = 4.2 సెం.మీ, AD = 4.8 సెం.మీ మరియు AC = 5 సెం.మీ. కొలతలతో ABCD చతుర్భుజం నిర్మించండి.

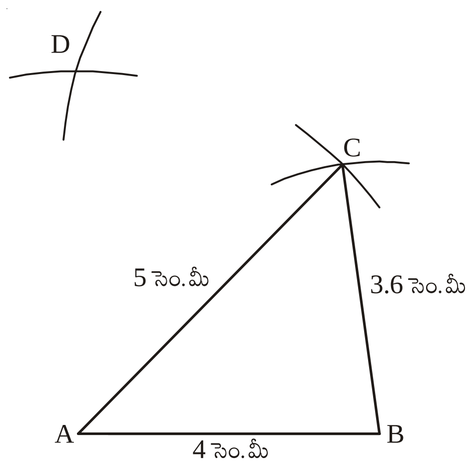
నిర్మాణం :



సోపానం 1: ABCD చతుర్భుజం యొక్క చిత్తుపటం గీచి కొలతలు గుర్తించాలి. (ఇచ్చిన దత్తాంశం పట నిర్మాణానికి సరిపోతుందో, లేదో అని విశ్లేషణ చేయాలి. సరిపోతే నిర్మాణం మొదలు పెట్టాలి. లేదంటే ఇచ్చిన దత్తాంశం నిర్మాణానికి సరిపోదని గుర్తించి, ఇచ్చిన కొలతల ఆధారంగా మరియు నిర్మించవలసిన చతుర్భుజం ధర్మాల అనుసరించి మిగిలిన కొలతలు కనుగొనటానికి ప్రయత్నించాలి).

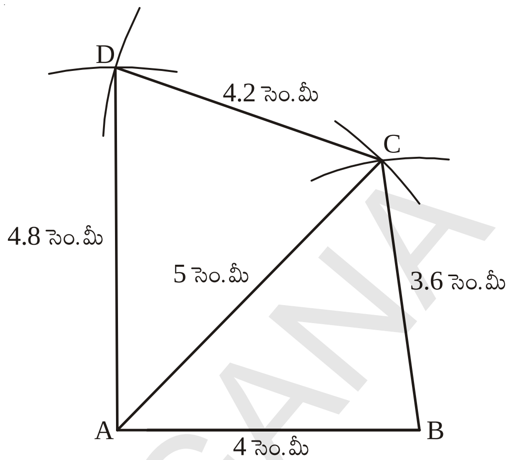


సోపానం 2: AB = 4 సెం.మీ, BC = 3.6 సెం.మీ మరియు AC = 5 సెం.మీ కొలతలతో ΔABC నిర్మించాలి.

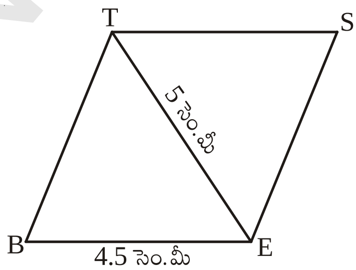


సోపానం 3: AC భుజం వైపున ఉండే నాల్గవ శీర్షం 'D' ను ఎలా గుర్తించగలమో పరిశీలించాలి. A కేంద్రంగా 4.8 సెం.మీ వ్యాసార్థంతో (AD = 4.8 సెం.మీ) ఒక చాపం గీయాలి. అదేవిధంగా C కేంద్రంగా 4.2 సెం.మీ వ్యాసార్థంతో (CD = 4.2 సెం.మీ) మరొక చాపాన్ని మొదటి చాపంను D వద్ద ఖండించు నట్లు గీయాలి.

సోపానం 4: A, D మరియు C, D లను కలిపితే మనకు కావాల్సిన ABCD చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది.



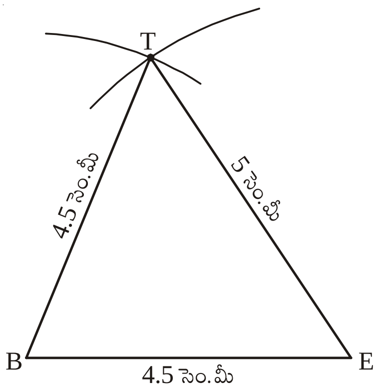
ఉదాహరణ 4: BE = 4.5 సెం.మీ మరియు ET = 5 సెం.మీ కొలతలతో BEST రాంబస్‌ను నిర్మించండి.



నిర్మాణం :

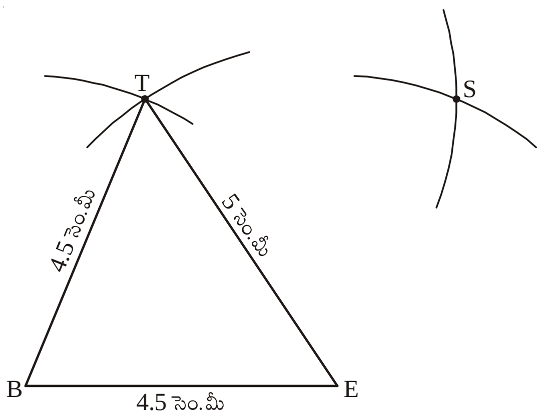
సోపానం 1 : రాంబస్ యొక్క చిత్తు పటం గీయాలి. (ఇది ప్రత్యేక చతుర్భుజమని గుర్తించండి) దీనిలో అన్ని భుజాల కొలతలు సమానం కావున BE = ES = ST = BT = 4.5 సెం.మీ లను పటంలో గుర్తించాలి.

ఇప్పుడు మనం పటంను నిర్మించవచ్చు.

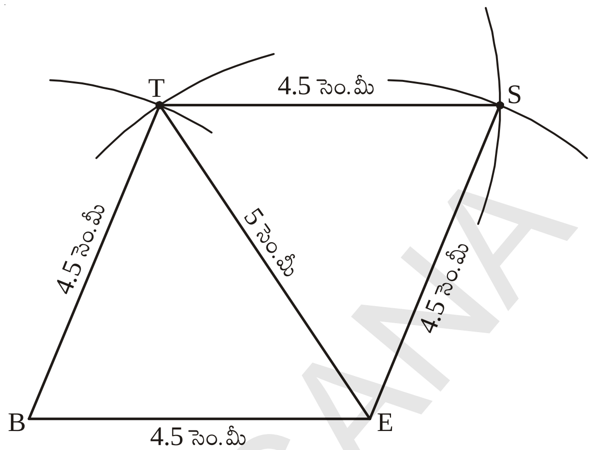


సోపానం 2 : భు.భు.భు. త్రిభుజ నియమం ప్రకారం BE = 4.5 సెం.మీ, ET = 5 సెం.మీ, BT = 4.5 సెం.మీ కొలతలతో ΔBET ని నిర్మించాలి.

సోపానం 3 : నాల్గవ శీర్షం 'S'ను గుర్తించడానికి, మిగిలిన రెండు కొలతలు ES = 4.5 సెం.మీ మరియు ST = 4.5 సెం.మీ. లతో చాపాలు గీయాలి.



సోపానం 4 : E, S మరియు S, T లను కలిపితే మనకు కావలసిన BEST రాంబస్ వస్తుంది.



ప్రయత్నించండి.

1. BA = 5 సెం.మీ, AT = 6 సెం.మీ మరియు AS = 6.5 సెం.మీ ? కొలతలతో BATS సమాంతరచతుర్భుజం గీయగలమా? వివరించండి.

2. ఒక విద్యార్థి PL = 3 సెం.మీ, LA = 4 సెం.మీ, AY = 4.5 సెం.మీ, PY = 2 సెం.మీ మరియు LY = 6 సెం.మీ. కొలతలతో PLAY అనే చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడానికి ప్రయత్నించాడు. కాని సాధ్యం కాలేదు. ఎందుకు? నీవు కూడా చతుర్భుజాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించి, తగు కారణాలు తెల్పండి.

అభ్యాసం - 3.2

క్రింది ఇవ్వబడిన కొలతలను ఉపయోగించి చతుర్భుజాల నిర్మాణాలను చేయండి.

(a) ABCD చతుర్భుజంలో AB = 4.5 సెం.మీ, BC = 5.5 సెం.మీ, CD = 4 సెం.మీ, AD = 6 సెం.మీ మరియు AC = 7 సెం.మీ.

(b) PQRS చతుర్భుజంలో PQ = 3.5 సెం.మీ, QR = 4 సెం.మీ, RS = 5 సెం.మీ, PS = 4.5 సెం.మీ మరియు QS = 6.5 సెం.మీ

(c) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో AB = 6 సెం.మీ, CD = 4.5 సెం.మీ మరియు BD = 7.5 సెం.మీ.

(d) సమచతుర్భుజం (రాంబస్) NICE లో NI = 4 సెం.మీ మరియు IE = 5.6 సెం.మీ.

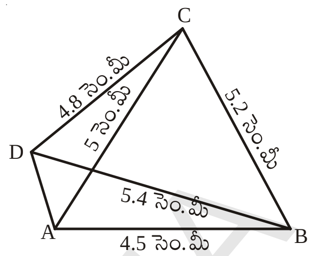
3.2.3 నిర్మాణం : మూడు భుజాలు, రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.S.S.D.D)

ఉదాహరణ 5 : AB = 4.5 సెం.మీ, BC = 5.2 సెం.మీ, CD = 4.8 సెం.మీ కర్ణాలు AC = 5 సెం.మీ మరియు BD = 5.4 సెం.మీ కొలతలతో ABCD చతుర్భుజం నిర్మించండి.

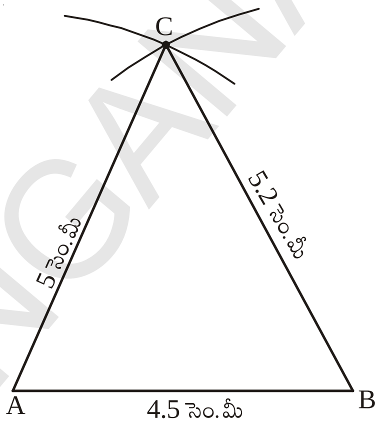
నిర్మాణం :

సోపానం 1: మొదటి ABCD చతుర్భుజం యొక్క చిత్తుపటం గీచి, ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి.

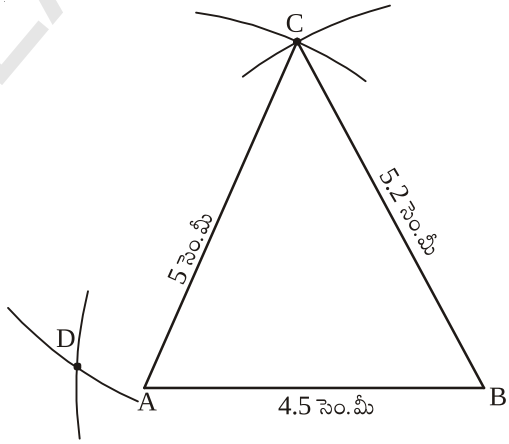
(ఇచ్చిన కొలతలతో ABC త్రిభుజం నిర్మించగలరా?)



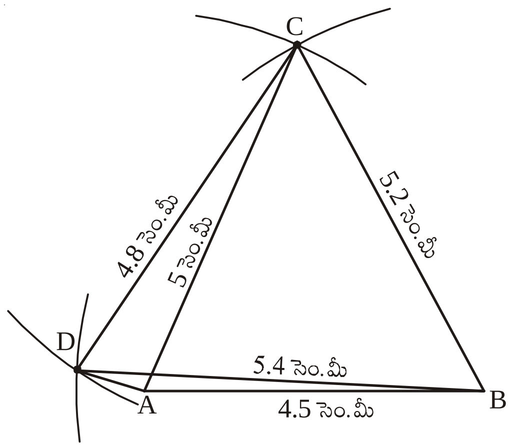
సోపానం 2: భు.భు.భు త్రిభుజ నియమం ఆధారంగా AB = 4.5 సెం.మీ, BC = 5.2 సెం.మీ మరియు AC = 5 సెం.మీ కొలతలతో ΔABC నిర్మించాలి.



సోపానం 3: B కేంద్రంగా 5.4 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపం, C కేంద్రంగా 4.8 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో మరొక చాపం గీచి, 'B' శీర్షానికి ఎదురుగా 'D' బిందువును గుర్తించాలి.



సోపానం 4: C,D ; B,D మరియు A,D లను కలుపగా చతుర్భుజం ABCD వస్తుంది.



ఆలోచించి, చర్చించి - రాయండి :

1. ఉదాహరణలో ఇచ్చిన ABCD చతుర్భుజాన్ని గీయడానికి ముందుగా ΔABD తో మొదలు పెట్టి నాల్గవ శీర్షం 'C' ని గుర్తించగలరా? కారణాలు తెలపండి.
2. PQ = 3 సెం.మీ, RS = 3 సెం.మీ, PS = 7.5 సెం.మీ, PR = 8 సెం.మీ మరియు SQ = 4 సెం.మీ. కొలతలతో PQRS చతుర్భుజం నిర్మించండి. నిర్మాణం ఏ విధంగా చేస్తారో వివరించండి.

అభ్యాసము - 3.3

క్రింది ఇవ్వబడిన కొలతలను ఉపయోగించి కావల్సిన చతుర్భుజాలను నిర్మించండి.

(a) GOLD అనే చతుర్భుజంలో OL = 7.5 సెం.మీ, GL = 6 సెం.మీ, LD = 5 సెం.మీ, DG = 5.5 సెం.మీ. మరియు OD = 10 సెం.మీ.

(b) PQRS చతుర్భుజంలో PQ = 4.2 సెం.మీ, QR = 3 సెం.మీ, PS = 2.8 సెం.మీ, PR = 4.5 సెం.మీ మరియు QS = 5 సెం.మీ.

3.2.4 నిర్మాణం : రెండు ఆసన్న భుజాలు మరియు మూడు కోణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.A.S.A.A)

కావలసిన చతుర్భుజ నిర్మాణాన్ని మనం ముందుగా చేసినట్లుగానే చేస్తాం. అయితే ఈ నిర్మాణంలో ఎక్కువ కోణాలను నిర్మించవలసి వున్నందున నిర్మాణంలో కొలబద్ద, వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి ప్రామాణిక కోణాలను నిర్మిస్తాం. మిగిలిన సందర్భాలలో కోణమానిని వినియోగించుకోవచ్చు.

ఉదాహరణ 6 : PQ = 4 సెం.మీ, QR = 4.8 సెం.మీ, $\angle P = 75^o$ $\angle Q = 100^o$ మరియు $\angle R = 120^o$ కొలతలతో PQRS చతుర్భుజం నిర్మించండి.

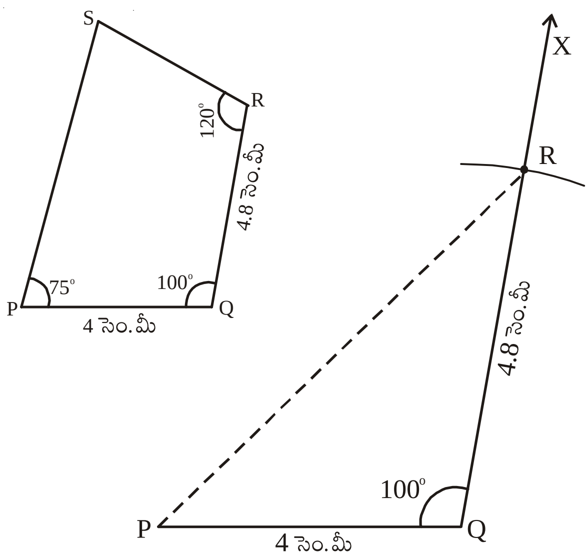
ప్రామాణిక కోణాలంటే $0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 120^o$ మరియు 180^o.

నిర్మాణం :

సోపానం 1 : చతుర్భుజం యొక్క చిత్తు పటంను గీచి కొలతలు గుర్తించాలి. నిర్మాణానికి సరిపడు పరికరాలు ఎన్నుకోవాలి.

సోపానం 2: భు.కో.భు త్రిభుజ నియమం ఆధారంగా PQ = 4 సెం.మీ, $\angle Q = 100^o$ మరియు QR = 4.8 సెం.మీ కొలతలతో ΔPQR నిర్మించాలి.

(PR ను చుక్కల గీతతో కలిపాం. ఎందుకు? దీనిని తర్వాత సోపానంలో తొలగించవచ్చు).



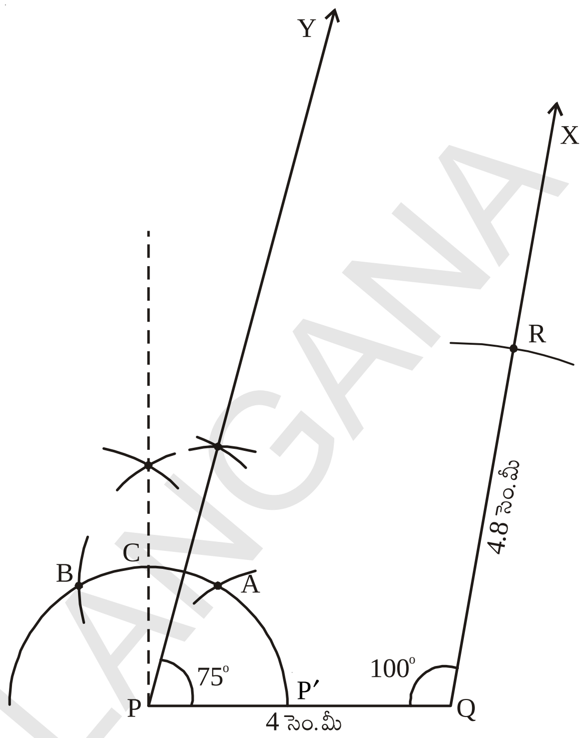
సోపానం 3: $\angle P=75^{0}$ కోణం నిర్మించి $\overrightarrow{PY}$ ను గీయాలి.

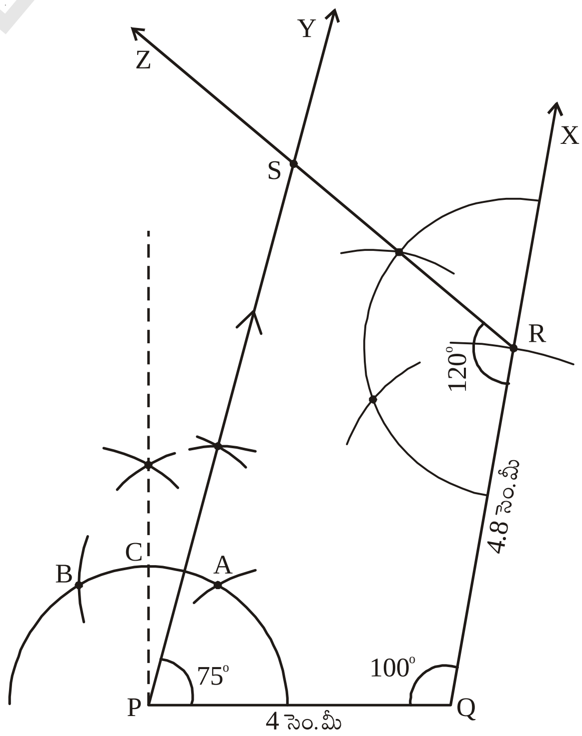
[75^{0} కోణం ఎలా నిర్మిస్తారో తెల్సుకుందాం.

(a) P కేంద్రంగా కొంత వ్యాసార్థంతో ఒక చాపం గీయాలి అది PQ ను P′ వద్ద ఖండించిందనుకొనుము. P′ కేంద్రంగా అదే వ్యాసార్థంతో మరి రెండు చాపములు గీస్తే అవి A, B ల వద్ద ఖండిస్తాయి. ఇచ్చట మనకు 60^{0} మరియు 120^{0} కోణం ఏర్పడు తుంది.

(b) A,B ల మధ్యకోణ సమద్విఖండన రేఖను గీస్తే అది మొదటి చాపాన్ని C వద్ద ఖండిస్తే అచ్చట 90^{0} కోణం అవుతుంది.

(c) A, C ల మధ్య తిరిగి కోణ సమద్విఖండన రేఖను గీస్తే(60^{0} మరియు 90^{0} ల మధ్య) మనకు 75^{0}కోణం చేసే కోణ రేఖ $\overrightarrow{PY}$ వస్తుంది.]





సోపానం 4: $\angle R = 120^{0}$ కోణం నిర్మించాలి. కోణరేఖ $\overrightarrow{RZ}$ ముందుగా గీచిన కోణరేఖ $\overrightarrow{PY}$ ను 'S' వద్ద ఖండిస్తుంది. మనకు కావలసిన చతుర్భుజం PQRS వస్తుంది.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి :

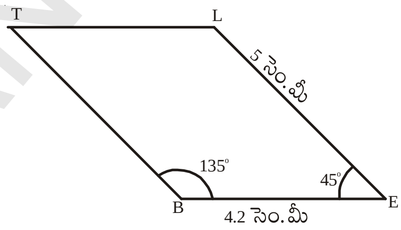
1. పై ఉదాహరణలో ఇచ్చిన కొలతలలో $\angle P = 75^o$ కు బదులు $\angle P = 100^o$ తీసుకుంటే PQRS చతుర్భుజం నిర్మించగలరా ? కారణాలు తెలపండి.

2. PL = 6 సెం.మీ, LA = 9.5 సెం.మీ, $\angle P = 75^o$, $\angle L = 15^o$ మరియు $\angle A = 140^o$ కొలతలతో PLAN చతుర్భుజం గీయగలరా?

   (ప్రతి సందర్భంలోనూ చిత్తు పటాలను గీచి, కొలతలను విశ్లేషించండి.) మీ యొక్క సమాధానాలకు తగిన కారణాలు తెలపండి.

ఉదాహరణ 7 : BE = 4.2 సెం.మీ, EL = 5 సెం.మీ, $\angle T = 45^o$ కొలతలతో BELT అనే సమాంతర చతుర్భుజం నిర్మించండి.

నిర్మాణం :



సోపానం 1: BELT సమాంతర చతుర్భుజానికి చిత్తు పటం గీచి, ఇవ్వబడిన కొలతలు గుర్తించండి..

(నిర్మాణానికి ఈ కొలతలు సరిపోతాయా ?)

విశ్లేషణ :

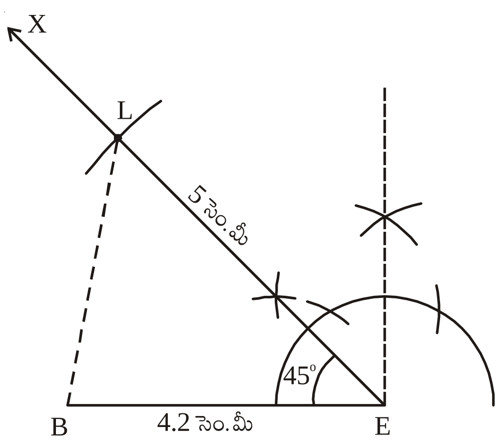
ఇచ్చిన కొలతలు పట నిర్మాణానికి చాలనందున సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాల ఆధారంగా మిగిలిన కొలతలు తెలుసుకోవాలి.

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదుటి కోణాలు సమానం కావున $\angle E = \angle T = 45^o$ అగును.

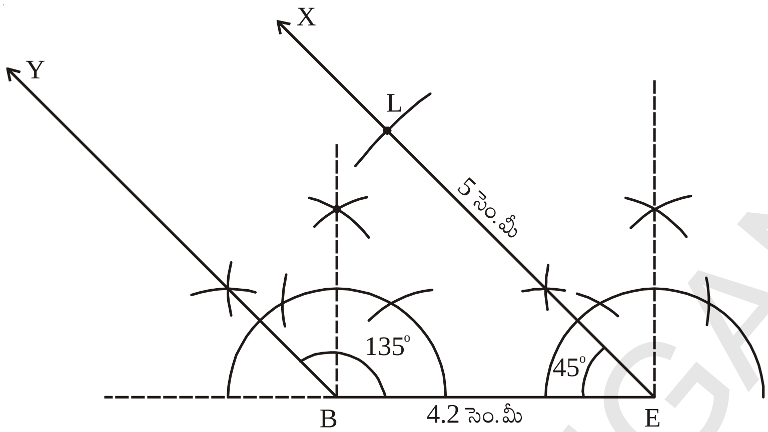
అదేవిధంగా ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు అయినందున $\angle L = 180^o - 45^o = 135^o$.

అందుచే $\angle B = \angle L = 135^o$ అగును.

సోపానం 2 : భు.కో.భు త్రిభుజ నియమం ఆధారంగా ΔBEL త్రిభుజాన్ని BE = 4.2 సెం.మీ, $\angle E = 45^o$ మరియు EL = 5 సెం.మీ కొలతలతో నిర్మించాలి.

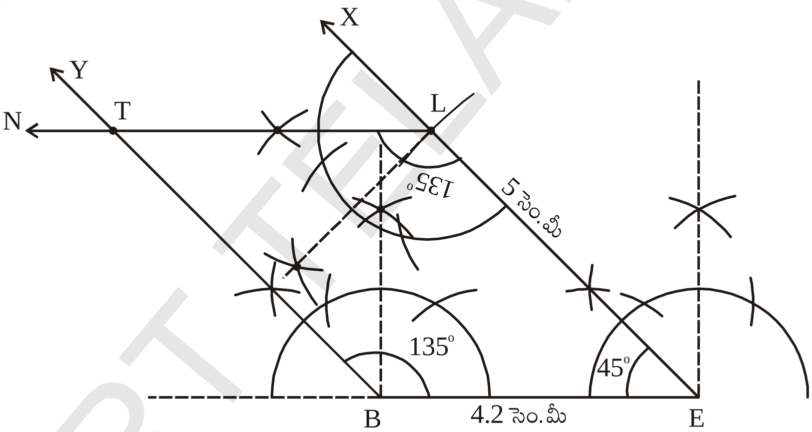


సోపానం 3 : $\angle B = 135^{0}$ కోణం నిర్మించి $\overrightarrow{BY}$ గీయాలి.



సోపానం 4 : $\angle L = 135^{0}$ కోణం నిర్మించి $\overleftrightarrow{LN}$ రేఖ $\overrightarrow{BY}$ రేఖను T వద్ద ఖండించునట్లు గీయాలి..

మనకు కావల్సిన BELT సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.



ఇది చేయండి.

BELT సమాంతర చతుర్భుజాన్ని, మరి ఏ ఇతర సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాల ఆధారంగా నిర్మించవచ్చో తెలిపి, నిర్మించి చూడండి.

అభ్యాసం - 3.4

క్రింది ఇవ్వబడిన కొలతల ఆధారంగా కావాల్సిన చతుర్భుజాలను నిర్మించండి.

(a) చతుర్భుజం HELP లో HE =6 సెం.మీ, EL= 4.5సెం.మీ, $\angle H=60^{0}$, $\angle E=105^{0}$ మరియు $\angle P= 120^{0}$.

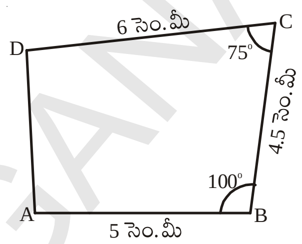
(b) సమాంతరచతుర్భుజం GRAM లో GR = AM = 5 సెం.మీ, RA = MG = 6.2 సెం.మీ మరియు $\angle R=85^{0}$.

(c) దీర్ఘచతురస్రం FLAG లో భుజం FL = 6 సెం.మీ మరియు LA = 4.2 సెం.మీ.

3.2.5 నిర్మాణం : మూడు భుజాల కొలతలు, రెండు మధ్య కోణాలు ఇచ్చినపుడు(S.A.S.A.S)

ఇటువంటి చతుర్భుజాల నిర్మాణంలో మనం భు.కో.భు. త్రిభుజ నియమం ఆధారంగా త్రిభుజం నిర్మిస్తాం. ప్రధానంగా ఉమ్మడి కోణాలను తీసుకుంటాం.

ఉదాహరణ 8 : AB = 5 సెం.మీ, BC = 4.5 సెం.మీ, CD = 6 సెం.మీ, $\angle B = 100^0$ మరియు $\angle C = 75^0$ కొలతలతో ABCD చతుర్భుజం నిర్మించండి.

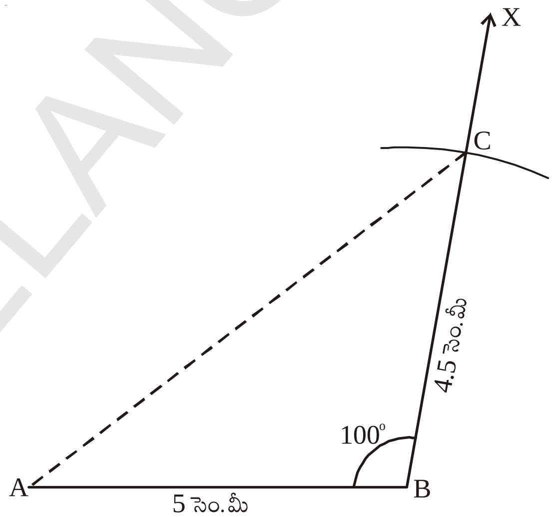


నిర్మాణం :

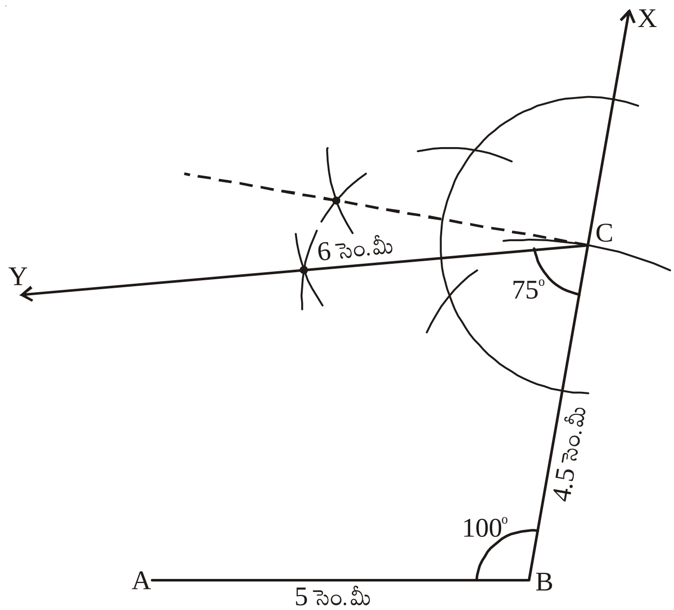
సోపానం 1 : ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తిస్తూ మొదట ABCD చతుర్భుజ చిత్తు పటాన్ని గీయాలి.

(చతుర్భుజ నిర్మాణానికి ఈ కొలతలు సరిపోతాయా? సరిపోవా? సరిపోతే ముందుకు సాగుదాం)

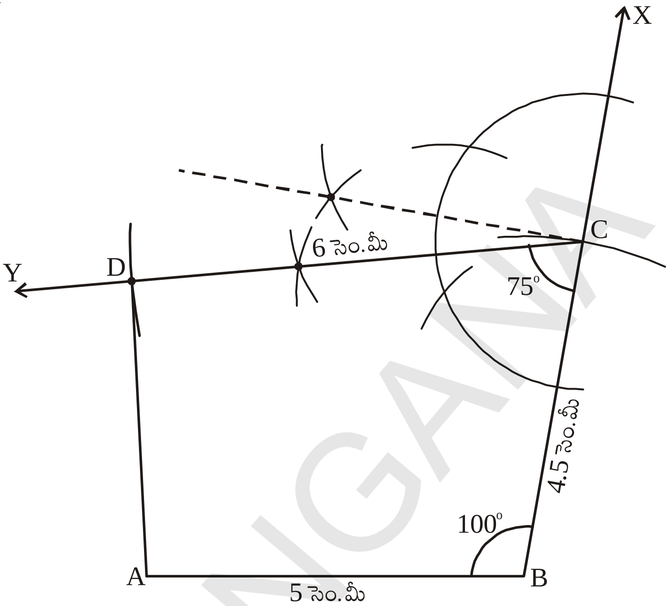
సోపానం 2 : AB= 5 సెం.మీ, $\angle B = 100^0$ మరియు BC = 4.5 సెం.మీ కొలతలతో భు.కో.భు. త్రిభుజ నియమం ప్రకారం ΔABC నిర్మించాలి.



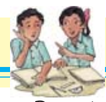
సోపానం 3 : $\angle C = 75^0$ కోణం నిర్మించి $\overrightarrow{CY}$ రేఖను గీయాలి.



సోపానం 4 : 'C' కేంద్రంగా 6 సెం.మీ వ్యాసార్థంతో ఒక చాపంను $\overline{CY}$ రేఖపై గీచి 'D' బిందువును గుర్తించాలి. A, D లను కలుపగా కావాల్సిన చతుర్భుజం ABCD వస్తుంది.



ఆలోచించి, చర్చించి - రాయండి :



పై ఉదాహరణలో ABCD చతుర్భుజాన్ని BC భూమిగా తీసుకొని (AB భూమిగా కాకుండా) నిర్మించగలరా ? చిత్తుపటం గీచి నిర్మాణ సోపానాలను వివరించుము.

అభ్యాసం - 3.5

క్రింది చతుర్భుజాలను ఇవ్వబడిన కొలతలతో నిర్మించండి.

(a) PQRS చతుర్భుజంలో PQ = 3.6 సెం.మీ, QR = 4.5 సెం.మీ, RS = 5.6 సెం.మీ, $\angle PQR = 135^o$ మరియు $\angle QRS = 60^o$.

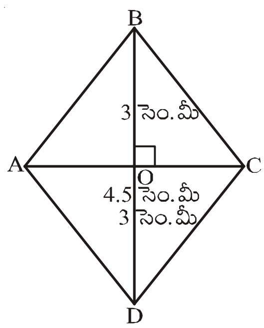
(b) LAMP చతుర్భుజంలో AM = MP = PL = 5 సెం.మీ, $\angle M = 90^o$ మరియు $\angle P = 60^o$.

(c) ABCD ట్రెపీజియం (సమలంబ చతుర్భుజం)లో AB || CD, AB = 8 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ, CD = 4 సెం.మీ మరియు $\angle B = 60^o$.

3.2.6 ప్రత్యేక చతుర్భుజ నిర్మాణాలు :

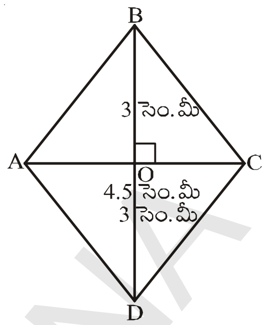
(a) రాంబస్ నిర్మాణం :

ఉదాహరణ 9 : కర్ణములు AC = 4.5 సెం.మీ మరియు BD = 6 సెం.మీ కొలతలతో ABCD రాంబస్ నిర్మించండి.



నిర్మాణం :

సోపానం 1 : ABCD రాంబస్ యొక్క చిత్తుపటంను గీచి ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి. (ఇచ్చిన కొలతలు కావలసిన రాంబస్ నిర్మాణానికి సరిపడేటట్లు ఉన్నాయా? పరిశీలించి రాంబస్ ధర్మాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి)

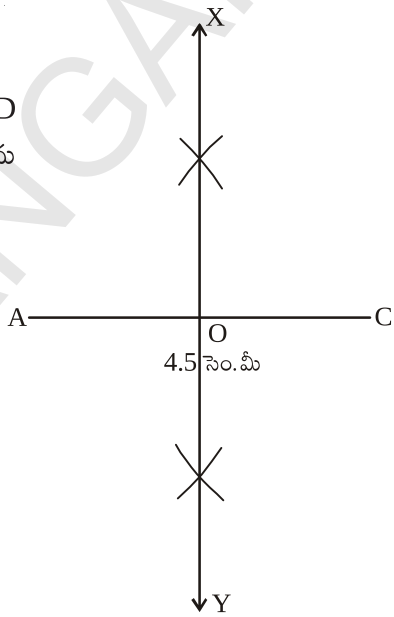


విశ్లేషణ: రాంబస్‌లో కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

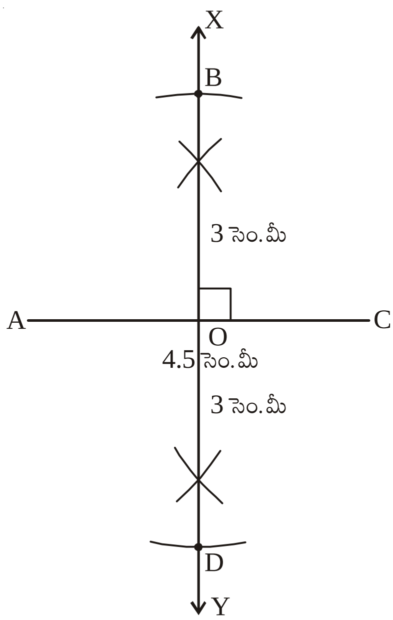
ABCD రాంబస్‌లో $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లు కర్ణాలు అవి 'O'వద్ద ఖండించుకున్నాయనుకుందాం. అంటే $\angle AOB = 90^o$ మరియు

$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ సెం.మీ}$$

ఇప్పుడు 2వ సోపానంకు వెళ్దాం.

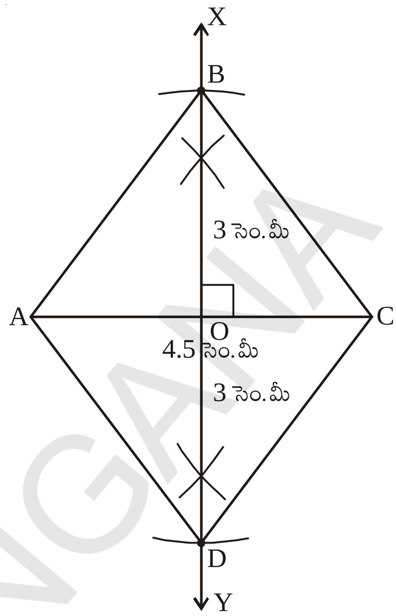


సోపానం 2: $\overline{AC}$ = 4.5 సెం.మీ కొలతతో రేఖాఖండం గీయాలి. (ఇది ABCD రాంబస్‌లో ఒక కర్ణం దానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖ $\overline{XY}$ లను గీచి, ఖండన బిందువును 'O' అని గుర్తించాలి.

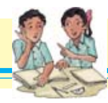


సోపానం 3: రెండవ కర్ణం $\overline{BD}$ మొదటి కర్ణం $\overline{AC}$ కు లంబంగా ఉంటుంది కావున, $\overline{BD}$, $\overline{XY}$ రేఖలో భాగం అవుతుంది. కావున 'O' కేంద్రంగా 3 సెం.మీ (OB = OD = 3 సెం.మీ) వ్యాసార్థంతో రెండు చాపములు $\overline{AC}$ కు ఇరువైపులా గీయాలి. ఖండన బిందువులకు B మరియు D అని గుర్తించాలి.

సోపానం 4: (i) A, B; B, C; C, D మరియు D, A లను కలుపగా ABCD రాంబస్ ఏర్పడుతుంది.



ఆలోచించి, చర్చించి – రాయండి :



1. పై ఉదాహరణలో ABCD రాంబస్‌ను AC భూమిగా కాకుండా BD ని భూమిగా తీసుకొని నిర్మించగలరా? లేదంటే కారణాలు తెలపండి.

2. రాంబస్‌లో రెండు కర్ణాల పొడవులు సమానం అయితే ఏ పటం ఏర్పడుతుంది ? చిత్తుపటం గీచి, తగు కారణాలను తెలపండి.

అభ్యాసము - 3.6

క్రింది ఇవ్వబడిన కొలతలతో కావల్సిన చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

(a) CART రాంబస్‌లో CR = 6 సెం.మీ, AT = 4.8 సెం.మీ.

(b) SOAP రాంబస్‌లో SA = 4.3 సెం.మీ, OP = 5 సెం.మీ.

(c) JUMP చతురస్రంలో కర్ణం 4.2 సెం.మీ.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఏకైక చతుర్భుజం నిర్మించాలంటే అయిదు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరం.
2. చతుర్భుజాలు ఏకైకంగా నిర్మించడానికి మనం వాడే కొలతలు
   (a) నాలుగు భుజాల పొడవులు, ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు
   (b) నాలుగు భుజాల పొడవులు, ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినపుడు
   (c) మూడు భుజాల పొడవులు మరియు రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు
   (d) రెండు ఆసన్న భుజాలు మరియు మూడు కోణాలు కొలతలు ఇచ్చినపుడు
   (e) మూడు భుజాల పొడవులు మరియు వాటి మధ్య రెండు కోణాలు ఇచ్చినపుడు
3. ప్రత్యేక చతుర్భుజాలైన రాంబస్ మరియు చతురస్రాలను వాటి రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు నిర్మించవచ్చు.

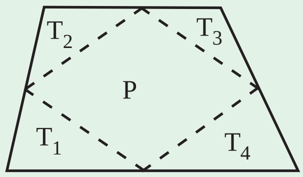
ఉపాధ్యాయులకు ప్రత్యేక సూచన:

కోణముల నిర్మాణానికి వృత్తలేఖిని వాడితే అవి ఖచ్చితమైన పటాలుగా ఏర్పడడమే కాక, తార్కికంగా నిరూపించవచ్చు. కోణమాని అనేది కోణాల కొలతలు సరిచూసుకోవడానికి మాత్రమే ఎక్కువగా ఉపయోగించాలి. అందుచే విద్యార్థులకు వృత్తలేఖిని ఎక్కువగా ఉపయోగించి అనుకూలమైన అన్ని రకాల కోణాలను నిర్మించే విధానాలను వివరంగా తెలియజేయాలి.

కాగితం కత్తిరింపుతో తమాషాలు

అమర్చి, ఆనందించు:

ఒక కాగితం నుండి ప్రక్కపటములో చూపిన విధంగా ఒక చతుర్భుజాన్ని కత్తిరించండి. భుజాల మధ్య బిందువులను గుర్తించి వరుస క్రమంలో కలిపి, కత్తిరించగా నాలుగు త్రిభుజాలు T_1, T_2, T_3, T_4 లు మరియు సమాంతర చతుర్భుజం P ఏర్పడుతుంది.



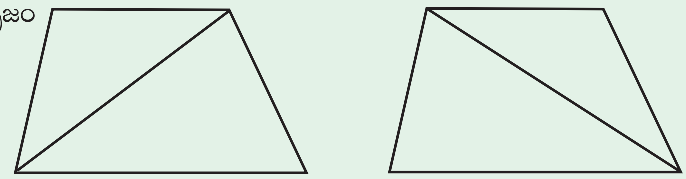
ఈ నాలుగు త్రిభుజాలతో సమాంతర చతుర్భుజాన్ని అమర్చగలరా?

చిన్న తమాషా:

చతుర్భుజం + చతుర్భుజం = సమాంతర చతుర్భుజమా?

ఒక కాగితాన్ని మధ్యకు రెండు భాగాలు మడిచి, కత్తెరతో రెండు కుంభాకార చతుర్భుజాలను ఏర్పరచండి. మొదటి చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణం వెంబడి కత్తిరించండి. రెండవ చతుర్భుజంలో రెండవ కర్ణం వెంబడి కత్తిరించండి.

ఈ నాలుగు త్రిభుజాలతో సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పరచవచ్చునని చూపండి.



అధ్యాయం **4**

ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు

4.0 పరిచయము

$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ మరియు

$3^m = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times$ .... (m సార్లు) అని మనకు తెలుసు.

సూర్యుని వ్యాసము 1,40,00,00,000 మీ. గా అంచనా వేయబడింది. మరియు

సూర్యుని ద్రవ్యరాశి 1, 989, 100, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 కి.గ్రా.

సూర్యునికి భూమికి మధ్యగల దూరము 149, 600, 000, 000 మీ. విశ్వము యొక్క వయస్సు 12,000,000,000 సం॥లుగా అంచనా వేయబడింది. భూమి మీద 1,353,000,000 ఘనకి.మీ. నీరు గలదు. అని మీకు తెలుసా!

ఒక చెస్ బోర్డుపై ప్రతి చదరంలో ధాన్యపు గింజలు వుంచబడినాయి. మొదటి చదరంలో ఒక గింజ వుంచబడింది. మిగిలిన ప్రతీ చదరంలో దాని ముందున్న చదరంలోని గింజలకు రెట్టింపు వుంచబడినాయి. ఇలా 64 చదరాలలో నింపడానికి ఎన్ని గింజలు కావాలో తెలుసా? ఇవి 18,446,744,073,709,551,615 గింజలు అవుతాయి.

ఇలాంటి సంఖ్యలను రాయటం, చదవటం, అర్థం చేసుకోవటం కష్టం అనిపించుట లేదా? ఇలాంటి వానిని ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ఎలా రాస్తామో గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

1,40,00,00,000 మీ. $= 1.4 \times 10^9$ మీ.

10^9 ను 10 యొక్క 9వ ఘాతమని చదువుతాం.

ఘాతాంకము

భూమి ← 10^9

ఇవి చేయండి

1. క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $3^7 \times 3^3$ (ii) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ (iii) $3^4 \times 4^3$

2. హైదరాబాద్ మరియు ఢిల్లీల మధ్య రైలు మార్గములో దూరము 1674.9 కి.మీ. దీనిని సెంటీమీటర్లలోకి మార్చి ఘాతాంక రూపంలో రాయండి? దీనిని శాస్త్రీయ రూపంలో కూడా రాయండి.

4.1 ఋణ ఘాతాంకాలతో కూడిన ఘాతాలు

సాధారణంగా మనము

సూర్యుని వ్యాసము = 1,40,00,00,000 మీ. = 1.4×10^9 మీ., అవగాడ్రో సంఖ్య = 6.023×10^{23} అని వ్రాస్తాము.

ఈ సంఖ్యలు పెద్ద సంఖ్యలు కనుక వీనిని సులభంగా ఘాతాంక రూపంలో రాయగలిగాము. అయితే అతి చిన్న సంఖ్యలను అనగా ఒక ప్రమాణం కంటే మరీ చిన్న సంఖ్యలను ఘాతాంక రూపంలో ఎలా రాస్తాము? అలా రాయాలంటే మనకు ఏమి అవసరమైతాయి ?

ఉదాహరణకు

తల వెంట్రుక మందము = 0.000005 మీ.

మైక్రో ఫిల్మ్ యొక్క మందము = 0.000015 మీ.

ఒక ప్రమాణం కంటే అతిచిన్నవైన ఇలాంటి సంఖ్యలను ఘాతాంకరూపంలో ఎలా రాయవచ్చు. పరిశీలించండి.

క్రింది తరగతులలో చర్చించిన అమరికలను ఒకసారి గుర్తు తెచ్చుకోండి.

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$10^2 = 10 \times 10 = 100 = 1000/10$

$10^1 = 10 = 100/10$

$10^0 = 1 = 10/10$

$10^{-1} = ?$

ఒక సంఖ్య యొక్క ఘాతాంకము 1 తగ్గిన ఆ సంఖ్య విలువ 10 వ భాగం తగ్గుతుంది.

పై అమరికను అదేవిధంగా కొనసాగిస్తే $10^{-1} = \frac{1}{10}$ అని చెప్పగలము.

అదేవిధంగా $10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

పై ఉదాహరణల నుంచి $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ లేదా $\frac{1}{10^{-n}} = 10^n$ అని చెప్పగలము.

క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

1 కి.మీ	1 హె.మీ	1 డె.మీ	1 మీ	1 డెసీ.మీ	1సెం.మీ	1 మి.మీ
1000మీ	100మీ	10మీ	1 మీ	$\frac{1}{10}$ మీ	$\frac{1}{100}$ మీ	$\frac{1}{1000}$ మీ
10^3 మీ	10^2 మీ	10^1మీ	10^0మీ	10^{-1}మీ	10^{-2}మీ	10^{-3}మీ

ఇది చేయండి

10^{-10} కు సమానమయ్యే విలువ ఎంత?

క్రింది మరొక అమరికను పరిశీలించండి.

(i) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(ii) $\frac{8}{2} = 4 = 2 \times 2 = 2^2$

(iii) $\frac{4}{2} = 2 = 2^1$

(iv) $\frac{2}{2} = 1 = 2^0$

(v) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

(vi) $\frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

దీనినుండి 'a' ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య అయిన $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ అని సామాన్యీకరించవచ్చు. ఇచ్చట a^{-m} ను a^m యొక్క గుణకార విలోమము అంటాము. ఎలా?

$$a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$$

ఇవి చేయండి.

క్రింది వాని గుణకార విలోమములను కనుగొనుము ?

(i) 3^{-5} (ii) 4^{-3} (iii) 7^{-4} (iv) 7^{-3}

(v) x^{-n} (vi) $\frac{1}{4^3}$ (vii) $\frac{1}{10^3}$

వీనిని గమనించండి!

వేగము $=$ $\frac{\text{దూరము}}{\text{కాలము}}$ అని మనకు తెలుసు. దీనిని సాంకేతికంగా $s = \frac{d}{t}$ అని రాయవచ్చు. దూరమును మీటర్లలో కాలమును సెకండ్లలో చెప్పినపుడు వేగ ప్రమాణమును $\mathbf{m} \times \mathbf{s}^{-1}$ లలో తెలియజేస్తాం. అదేవిధంగా త్వరణాన్ని $\frac{m}{s^2}$. అనగా $\mathbf{m} \times \mathbf{s}^{-2}$ చే సూచిస్తాం.

3456 వంటి సంఖ్యలను విస్తృత రూపంలో ఈక్రింది విధంగా తెలియజేస్తాం.

$$3456 = (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1)$$

$$3456 = (3 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (5 \times 10) + (6 \times 10^0)$$

అదేవిధంగా $7405 = (7 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (0 \times 10) + (5 \times 10^0)$

ఇదేవిధంగా 326.57 లాంటి దశాంశ సంఖ్యలను విస్తృత రూపంలో ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ఏ విధంగా రాయవచ్చు పరిశీలించండి.

$$326.57 = (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + \left(\frac{5}{10}\right) + \left(\frac{7}{10^2}\right)$$

$$= (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + (5 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2})$$

$\frac{1}{10} = 10^{-1}$ & $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ అని తెలుసు.

అదేవిధంగా $734.684 = (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + \left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{8}{10^2}\right) + \left(\frac{4}{10^3}\right)$

$$= (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + (6 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-2}) + (4 \times 10^{-3})$$

ఇవి చేయండి.

క్రింది సంఖ్యలను ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి విస్తృత రూపంలో రాయండి.

(i) 543.67 (ii) 7054.243 (iii) 6540.305 (iv) 6523.450

4.2 ఘాతాంక న్యాయాలు

'a' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు m, n లు ఏవేని సహజసంఖ్యలైన $a^m \times a^n = a^{m+n}$ అని మనము నేర్చుకున్నాం. అయితే ఈ నియమము ఋణఘాతాంకాలకు కూడా సరిపోతుందేమో పరిశీలిద్దాం.

(i) $3^2 \times 3^{-4}$ ను పరిగణనలోనికి తీసుకుందాం.

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ఇచ్చట 'a' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

కావున $3^2 \times 3^{-4} = 3^2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{3^2}{3^4}$ $\left(\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right)$

$= 3^{2-4} = 3^{-2}$

అనగా $3^2 \times 3^{-4} = 3^{-2}$

(ii) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ పరిశీలిద్దాం.

$$(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^3} \times \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)^{3+4}} \quad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$$

$$= \frac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7} \qquad (\because \frac{1}{a^m} = a^{-m})$$

కావున $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = (-2)^{-7}$ $\qquad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

(iii) $(-5)^2 \times (-5)^{-5}$ కు తీసుకుందాం.

$$(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^2 \times \frac{1}{(-5)^5}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{5-2}} = \frac{1}{(-5)^3} \qquad \left(\because \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}\right)$$

$$= (-5)^{-3}$$

కావున $(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^{-3}$ $\qquad$ ($2+(-5) = -3$ అని మనకు తెలుసు.)

పై ఉదాహరణల నుంచి $\boldsymbol{a}$ ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య మరియు m, n లు ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలైన $\boldsymbol{a}^m \times \boldsymbol{a}^n = \boldsymbol{a}^{m+n}$ అని నిర్ధారించగలము.

ఇవి చేయండి.

క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించి ఒకే ఘాతాంకముగా వ్యక్త పరుచుము?

(i) $2^{-3} \times 2^{-2}$ (ii) $7^{-2} \times 7^5$ (iii) $3^4 \times 3^{-5}$ (iv) $7^5 \times 7^{-4} \times 7^{-6}$

(v) $m^5 \times m^{-10}$ (vi) $(-5)^{-3} \times (-5)^{-4}$

ఇదే విధంగా క్రింది ఘాతాంక న్యాయాలను కూడ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ లు శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ లు ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలు అయినప్పుడు సరిచూడవచ్చును.

1. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a^m \times b^m) = (ab)^m$

ధనఘాతాంకాలకు (పూర్ణాంకాలు) ఈ న్యాయాలను క్రింది తరగతులలో సరి చూడడం జరిగింది.

4. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

5. $a^0 = 1$

a ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు $a \neq 1, a \neq -1$ అయినప్పుడు $a^m = a^n$ అయిన m, n లను గురించి నేవేమి చెప్పగలవు? వాని మధ్య ఎలాంటి సంబంధం వుంటుంది. క్రింది వానిని గమనించండి.

$a^m = a^n$ అనుకొనిన $\dfrac{a^m}{a^n} = 1$ (a^n చేత ఇరువైపులా భాగించగా)

అనగా $a^{m-n} = 1$. $a^{m-n} = a^0$

$\therefore m - n = 0$

$\therefore m = n$

> $a \neq 1$ ఎందుకు?
> a = 1, m = 7 మరియు n = 6 అయిన $1^7 = 1^6$
> $\Rightarrow 7 = 6$ ఇది సత్యమా?
> అందుచే $a \neq 1$, $a = -1$ అయితే ఏమవుతుంది?

> దీని నుండి $a^m = a^n$ అయిన $m = n$ అని నిర్ధారించగలము.

ఉదాహరణ 1: (i) 5^{-2} (ii) $\dfrac{1}{2^{-5}}$ (iii) $(-5)^2$ విలువలను కనుగొనుము.

సాధన : (i) $5^{-2} = \dfrac{1}{(5)^2} = \dfrac{1}{5 \times 5} = \dfrac{1}{25}$ $\left(\because a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}\right)$

(ii) $\dfrac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $\left(\because \dfrac{1}{a^{-m}} = a^m\right)$

$2^5 = 32$

(iii) $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

ఉదాహరణ 2 : క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించుము ?

(i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (ii) $\dfrac{4^7}{4^4}$ (iii) $\left(\dfrac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

సాధన : (i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ $(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$= (-5)^{4+(-6)} = (-5)^{-2}$

$= \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{(-5) \times (-5)} = \dfrac{1}{25}$ $\left(\because a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}\right)$

(ii) $\dfrac{4^7}{4^4}$ $\left(\because \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right)$

$= 4^{7-4} = 4^3 = 64$

(iii) $\left(\frac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

$= (3^{5-3})^5 \times 3^{-6}$ $\qquad (\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n})$

$= (3^2)^5 \times 3^{-6}$

$= 3^{10} \times 3^{-6} = 3^4 = 81$ $\qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$

ఉదాహరణ 3: క్రింది వాని ఘాతాంకాలు ధనాత్మకంగా వుండునట్లు వ్రాయుము ?

(i) 4^{-7} (ii) $\frac{1}{(5)^{-4}}$ (iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ (iv) $\frac{7^{-4}}{7^{-6}}$

సాధన : (i) 4^{-7} $\qquad (\because a^{-m} = \frac{1}{a^m})$

$= \frac{1}{(4)^7}$

(ii) $\frac{1}{(5)^{-4}}$ $\qquad (\because \frac{1}{a^{-m}} = a^m)$

$= 5^4$

(iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{4^{-3}}{7^{-3}}$ $\qquad \left(\because a^{-m} = \frac{1}{a^m};\ a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right)$

$= \frac{7^3}{4^3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3$

$\because \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

(iv) $\frac{7^{-4}}{7^{-6}}$

$= 7^{-4-(-6)}$

$= 7^{-4+6} = 7^2$

ఉదాహరణ 4 : 27^{-4} ను 3 భూమిగా గల ఘాతరూపంలో వ్యక్త పరచండి?

సాధన : 27 ను $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ గా రాయవచ్చు.

$\therefore \quad 27^{-4} = (3^3)^{-4}$

$= 3^{-12}$ $\qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$

ఉదాహరణ 5 : సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3}$ (ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

సాధన : (i) $\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3}$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ అని రాయవచ్చును.

కావున $\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3} = \frac{1}{3^3}\times 2^{-3}$ $\qquad \because \frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$= 3^{-3} \times 2^{-3}$ $\qquad \because a^m \times b^m = (ab)^m$

$= (3\times 2)^{-3} = \frac{1}{(3\times 2)^3}$

$= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

(ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

$= 4^4 \times (4^2)^{-2} \times 4^0$

$= 4^4 \times 4^{-4} \times 4^0$ $\qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$

$= 4^{4-4+0} = 4^0$ $\qquad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$=1$ $\qquad (\because a^0 = 1)$

ఉదాహరణ 6: $2^x = 1$ అయిన x విలువను ఊహించండి ?

సాధన : ఇంతకు ముందు చర్చించునట్లుగా $a^0 = 1$

$\therefore \quad 2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$\Rightarrow \quad x = 0$

ఉదాహరణ 7 : క్రింది వానిలో x విలువను కనుగొనుము ?

(i) $25 \times 5^x = 5^8$ (ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$ (iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

సాధన :

$25 \times 5^x = 5^8$ $(25 = 5 \times 5 = 5^2$ కావున)

$5^2 \times 5^x = 5^8$ కాని $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$5^{x+2} = 5^8$

$x + 2 = 8$ ($a^m = a^n$ అయిన $m = n$)

$\therefore x = 6$

(ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

$\Rightarrow \frac{1}{7^2} \times 7^{2x} = 7^8$

$7^{-2} \times 7^{2x} = 7^8$ $\left(\because \frac{1}{a^m} = a^{-m}\right)$

$7^{2x-2} = 7^8$

భూములు సమానం కావున

$2x - 2 = 8$ అగును.

$2x = 8 + 2$

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore x = 5$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$

$3^{24} = 3^{12x}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$24 = 12x$

భూములు సమానం కావున

$\therefore x = \frac{24}{12} = 2$ అగును

(iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+1+7} = (-2)^{12}$

$(-2)^{8+x} = (-2)^{12}$

భూములు సమానం కావున

$8 + x = 12$ అగును.

$\therefore x = 12 - 8 = 4$

ఉదాహరణ 8 : $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$ సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన : $\frac{25}{4} = \frac{5\times5}{2\times2} = \frac{5^2}{2^2}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-2} \qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{2^4}{5^4} = 5^{3-4} \times 2^{4-3}$$

$\boxed{\because \frac{1}{a^m} = a^{-m} \text{ కావున } \frac{1}{a^{-m}} = a^m}$

$$= 5^{-1} \times 2^1 = \frac{2}{5}$$

ఉదాహరణ 9 : $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$ సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన : $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$

$$= \left[\left(\frac{1^{-3}}{3^{-3}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right) \div \frac{1^{-2}}{5^{-2}}\right] \qquad \left(\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{3^3}{1^3} - \frac{2^3}{1^3}\right) \div \frac{5^2}{1^2}\right] = \left(\frac{27}{1} - \frac{8}{1}\right) \div 25 \qquad \left(\because a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \ a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right)$$

$$= (27 - 8) \div 25 = \frac{19}{25}$$

ఉదాహరణ 10 : $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ అయిన x^{-2} విలువను కనుగొనుము ?

సాధన : $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}} \qquad \left(\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right)$$

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{2+4}}{2^{2+4}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12} = \frac{3^{-12}}{2^{-12}} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

అభ్యాసము 4.1

1. సూక్ష్మీకరించి తగు కారణాలు తెల్పండి.

   (i) 4^{-3} (ii) $(-2)^7$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ (iv) $(-3)^{-4}$

2. క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించుము.

   (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$ (ii) $(-2)^7 \times (-2)^3 \times (-2)^4$

   (iii) $4^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{5^{-4}}{5^{-6}}\right) \times 5^3$ (v) $(-3)^4 \times 7^4$

3. సూక్ష్మీకరించుము (i) $2^2 \times \frac{3^2}{2^{-2}} \times 3^{-1}$ (ii) $(4^{-1} \times 3^{-1}) \div 6^{-1}$

4. సూక్ష్మీకరించి తగు కారణాలు తెల్పండి.

   (i) $(4^0 + 5^{-1}) \times 5^2 \times \frac{1}{3}$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

   (iii) $(2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}) \times \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{3^{-2}}{3} \times (3^0 - 3^{-1})$

   (v) $1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^0$ (vi) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2$

5. (i) $\left[(3^2-2^2)\div\frac{1}{5}\right]^2$ (ii) $((5^2)^3\times 5^4)\div 5^6$ సూక్ష్మీకరించి తగు కారణాలు తెల్పండి.

6. క్రింది వానిలో 'n' విలువను కనుగొనుము ?

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

(ii) $(-3)^{n+1}\times(-3)^5=(-3)^{-4}$

(iii) $7^{2n+1}\div 49=7^3$

7. $2^{-3}=\frac{1}{2^x}$ అయిన x విలువను కనుగొనుము?

8. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\div\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right]\times\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ సూక్ష్మీకరించుము.

9. $m=3$ మరియు $n=2$ అయిన క్రింది వాని విలువలను కనుగొనుము ?

(i) $9m^2-10n^3$ (ii) $2m^2n^2$ (iii) $2m^3+3n^2-5m^2n$ (iv) m^n-n^m

10. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-5}\times\left(\frac{7}{4}\right)^{-7}$ సూక్ష్మీకరించి తగు కారణాలు తెల్పండి.

4.3 ఘాతాంకాల వినియోగము - సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచటం

పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరిచే విధానాన్ని క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం.

ఉదాహరణకు 300,000,000 మీ. $=3\times10^8$ మీ.

ఇపుడు అతి చిన్న సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

కంప్యూటర్ చిప్‌లో వాడే తీగ మందము 0.000003 మీ. పరిశీలిస్తే

0.000003 మీ $=\frac{3}{1000000}$ మీ

$=\frac{3}{10^6}$ మీ

$=3\times10^{-6}$ మీ

$\therefore$ 0.000003 $=3\times10^{-6}$ మీ.

అదేవిధంగా ఒక మొక్క యొక్క కణ పరిమాణము 0.00001275 మీ. ను పరిశీలించండి.

$$0.00001275 \text{ మీ} = \frac{1275}{100000000}$$

$$= 1.275 \times \frac{10^3}{10^8}$$

$$= 1.275 \times 10^{-5} \text{ మీ.}$$

ఇవి చేయండి.

1. క్రింది వాక్యాలలోని సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చి వాక్యాలను తిరిగి వ్రాయండి.
   (i) భూమి నుంచి సూర్యుని దూరము 149,600,000,000 మీ.
   (ii) సూర్యుని సరాసరి వ్యాసార్థము 695000 కి.మీ.
   (iii) మనిషి తల వెంట్రుక యొక్క మందము 0.08 నుండి 0.12 మి.మీ వరకు వుంటుంది.
   (iv) ఎవరెస్టు శిఖరం యొక్క ఎత్తు 8848 మీ
2. ఈ క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండి.
   (i) 0.0000456 (ii) 0.000000529 (iii) 0.0000000085
   (iv) 6020000000 (v) 35400000000 (vi) 0.000437×10^4

4.4 అతి పెద్ద, అతి చిన్న సంఖ్యలను పోల్చటము

సూర్యుని యొక్క వ్యాసము 1400000000 మీ. మరియు భూమి యొక్క వ్యాసము 12750000 మీ. అని మనకు తెలుసు. అయితే భూమి కంటే సూర్యుని పరిమాణము ఎన్ని రెట్లు ఎక్కువో తెలుసు కోవాలంటే సూర్యుని వ్యాసమును భూమి వ్యాసముతో భాగించాలి.

$$\text{అనగా } \frac{1400000000}{12750000}.$$

ఈ భాగాహారమును చేయడం కష్టమనిపించుట లేదా?

అయితే ఈ సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చి, సులభంగా భాగాహరము చేసి సూర్యుడు, భూమి కంటే ఎన్ని రెట్లు ఎక్కువ పరిమాణము కలిగి వుంటాడో కనుగొనవచ్చు. ఇది ఏ విధంగా చూడండి.

సూర్యుని వ్యాసము = 1400000000 మీ = 1.4×10^9 మీ

భూమి వ్యాసము = 12750000 = 1.275×10^7 మీ

$$\therefore \frac{\text{సూర్యుని వ్యాసము}}{\text{భూ వ్యాసము}} = \frac{1.4\times10^2\times10^7}{1.275\times10^7} = \frac{1.4\times10^2}{1.275}$$

$$\simeq 10^2 = 100 \quad \text{(సుమారుగా)}$$

కావున సూర్యుని వ్యాసం, భూ వ్యాసం కంటే 100 రెట్లు ఎక్కువ కలదని చెప్పవచ్చు. అనగా సూర్యుడు, భూమి కంటే 100 రెట్లు ఎక్కువ పరిమాణము కలిగి ఉన్నదని అర్థం.

మరియొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

భూ ద్రవ్యరాశి = 5.97×10^{24} కి.గ్రా. మరియు చంద్రుని ద్రవ్యరాశి = 7.35×10^{22} కి.గ్రా. అయిన వాటి ద్రవ్యరాశుల మొత్తం ఎంత?

భూమి ద్రవ్యరాశి = 5.97×10^{24} కి.గ్రా.

చంద్రుని ద్రవ్యరాశి = 7.35×10^{22} కి.గ్రా.

$\therefore$ మొత్తం ద్రవ్యరాశి = 5.97×10^{24} కి.గ్రా. + 7.35×10^{22} కి.గ్రా.

= $(5.97 \times 10^{2} \times 10^{22}$ కి.గ్రా.$)$ + 7.35×10^{22} కి.గ్రా.

= $(5.97 \times 10^{2} + 7.35) \times 10^{22}$ కి.గ్రా.

= $(597 + 7.35) \times 10^{22}$ కి.గ్రా.

= 604.35×10^{22} కి.గ్రా.

= 6.0435×10^{24} కి.గ్రా.

రెండు ప్రామాణిక రూపాలలోని సంఖ్యలను కూడేటపుడు అవి రెండూ ఒకే ఘాతాంకాన్ని కలిగి ఉండునట్లుగా రాయాలి.

ఉదాహరణ 11 : క్రింది వానిని సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 4.67×10^{4} (ii) 1.0001×10^{9} (iii) 3.02×10^{-6}

సాధన : (i) $4.67 \times 10^{4} = 4.67 \times 10000 = 46700$

(ii) $1.0001 \times 10^{9} = 1.0001 \times 1000000000 = 1000100000$

(iii) $3.02 \times 10^{-6} = 3.02/10^{6} = 3.02/1000000 = 0.00000302$

అభ్యాసము - 4.2

1. క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి ?

   (i) 0.000000000947 (ii) 543000000000

   (iii) 48300000 (iv) 0.00009298 (v) 0.0000529

2. క్రింది సంఖ్యలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తీకరించండి.

   (i) 4.37×10^{5} (ii) 5.8×10^{7} (iii) 32.5×10^{-4} (iv) 3.71529×10^{7}

   (v) 3789×10^{-5} (vi) 24.36×10^{-3}

3. క్రింది సమాచారములోని సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండి ?

   (i) బాక్టీరియా పరిమాణము 0.0000004 మీ

   (ii) ఎర్రరక్త కణాల పరిమాణము 0.000007మి.మీ.

(iii) కాంతి వేగము 300000000 మీ/సెకండ్

(iv) భూమికి, చంద్రునికి మధ్య దూరము 384467000 మీ(సుమారుగా)

(v) ఎలక్ట్రాన్ ఆవేశం 0.00000000000000000016 కులూంబులు.

(vi) పేపర్ యొక్క మందము 0.0016 సెం.మీ.

(vii) కంప్యూటర్ చిప్‌లోని తీగ వ్యాసము 0.000005 సెం.మీ.

4. ఒక పుస్తకాల కట్టలో 20 మి.మీ. మందంగల 5 పుస్తకాలు, 0.016 మి.మీ. మందం గల 5 పేపర్లు కలవు. అయిన పుస్తకాల కట్ట (stack) యొక్క మొత్తం మందమును కనుగొనుము ?

5. ఘాతాంకాలు కలిగిన కొన్ని సమస్యలను రాకేష్ క్రింది విధంగా సాధించాడు. నీవు రాకేష్‌తో ఏకీభవిస్తావా ? నీ సమాధానమును సమర్థించుము ?

(i) $x^{-3} \times x^{-2} = x^{-6}$ (ii) $\dfrac{x^3}{x^2} = x^4$ (iii) $(x^2)^3 = x^{2^3} = x^8$

(iv) $x^{-2} = \sqrt{x}$ (v) $3x^{-1} = \dfrac{1}{3x}$

ప్రాజెక్టు పని :

మీ పాఠశాలలో 6 నుండి 10వ తరగతి వరకు కల సైన్సు పాఠ్యపుస్తకాలు పరిశీలించి, వాటిలో అతి చిన్న సంఖ్యలు, అతి పెద్ద సంఖ్యలు గల శాస్త్రీయ సమాచారము సేకరించి వాటిని ప్రామాణిక ఘాతాంక రూపాలలో వ్రాయండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఋణ ఘాతాంకాలు గలిగిన సంఖ్యలు ఈ క్రింది నియమాలను పాటించును.

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(c) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (d) $a^0 = 1$ (e) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

2. చాలా చిన్న సంఖ్యలను ఋణ ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ప్రామాణిక రూపంలో రాయుట.

3. అతిచిన్న, అతి పెద్ద సంఖ్యలను పోల్చుటము.

4. సాధారణ తప్పులను గుర్తించటము.

అధ్యాయము **5**

అనుపాతముతో రాశులను పోల్చుట

5.0 పరిచయం

మన రోజువారీ పనులలో మనం కొన్నిసార్లు రాశులను పోల్చవలసి వస్తుంది. ఇలా రాశులను పోల్చడానికి నిష్పత్తిని, శాతాలను ఉపయోగిస్తారని మనం నేర్చుకున్నాము. ఇప్పుడు ఈ కింది ఉదాహరణను చూడండి.

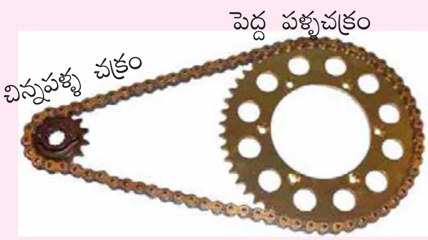
ఒక తరగతిలోని 40 మంది విద్యార్థులకు లీడర్ కొరకు ఎన్నిక నిర్వహించబడినది. స్నిగ్ధ 24 ఓట్లతో మొదటి లీడర్‌గాను, సిరి 16 ఓట్లతో రెండవ లీడర్‌గాను ఎన్నుకోబడ్డారు. వారి ఇరువురికి అనగా స్నిగ్ధ, సిరిలకు వచ్చిన ఓట్ల నిష్పత్తి 24:16. కనిష్ఠ పదాలలో ఈ నిష్పత్తిని చెప్పగలరా? అది 3 : 2.

పై దానికి విలోమంగా, సిరి మరియు స్నిగ్ధలకు వచ్చిన ఓట్ల నిష్పత్తి 2 : 3. నిష్పత్తి అంటే ఏమిటో మీరు చెప్పగలరా?

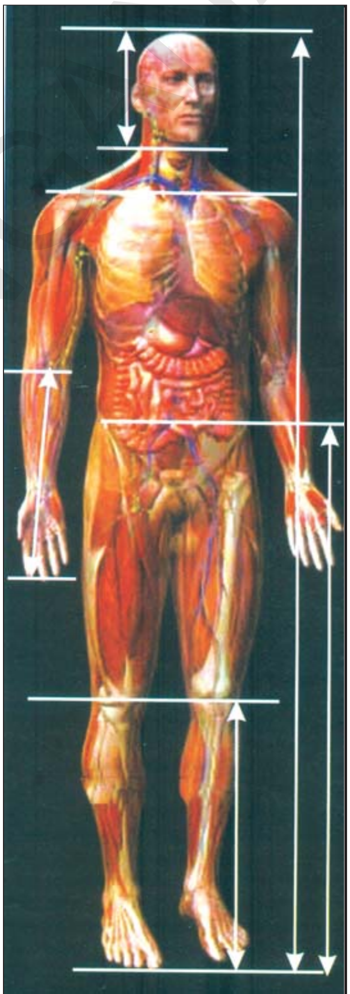
ఒకే ప్రమాణాలు గల రాశుల క్రమానుగత పోలికే నిష్పత్తి.

వీటిని ప్రయత్నించండి:

1. మీ సైకిల్ గేర్ల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
పెడల్ వద్ద నున్న పెద్ద పళ్ళచక్రం (chain wheel) పళ్ళను అలాగే వెనక చక్రం వద్ద నున్న చిన్నపళ్ళ చక్రం (sprocket wheel) పళ్ళను లెక్కపెట్టండి.
$\{$పెద్దపళ్ళ చక్రపు పళ్ళసంఖ్య$\}$: $\{$చిన్నపళ్ళ చక్రపు పళ్ళసంఖ్య$\}$ ను



కనుగొనండి. దీనినే మనం గేర్ నిష్పత్తి అంటాం. ఒక్కసారి పెడల్‌ను తిప్పడం వలన వెనక చక్రం ఎన్నిసార్లు తిరిగిందో గమనించి మీ నోట్ పుస్తకంలో రాయండి.
2. ఏవైనా ఐదు వివిధ సందర్భాలకు చెందిన శాతములను వార్తాపత్రికల నుండి సేకరించి మీ నోట్ పుస్తకంలో అంటించండి.



మానవ శరీరంలో గోల్డెన్ రేషియో

గోల్డెన్‌రేషియో 1.615:1

గోల్డెన్ రేషియో నుండి మానవులకు మినహాయింపులేదు. మనశరీరం "దివ్య అనుపాత" శిల్పమునకు సరియైన ఉదాహరణ.
క్రింది విషయములను గమనించండి.
- ఎత్తు : నాభినుండి పాదాగ్రం వరకు గల పొడవు.
- భుజరేఖ పొడవు : తల పొడవు
- చేతివేళ్ళ చివరి నుండి మోచేతికి దూరం: మణికట్టు నుండి మోచేతికి దూరం.
- నాభి నుండి మోకాల దూరం: మోకాల నుండి పాదం దూరం.

బహుళ నిష్పత్తి

కొన్ని సందర్భాలలో మనం రెండు నిష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా రాయవలసి వస్తుంది. ఎందుకు? దీనిని అర్థం చేసుకోవడానికి క్రింది ఉదాహరణను చూడండి.

రామయ్య మరియు గోపాలం వరుసగా ₹ 2000 మరియు ₹ 3000 పెట్టుబడులతో ఒక వ్యాపారమును ప్రారంభించిరి. సంవత్సరాంతమున వారికి వచ్చిన లాభమును వారు ఏ నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి?

పెట్టుబడుల నిష్పత్తి = 2000: 3000

= 2: 3

క్రింద ఇచ్చిన పటాన్ని పరిశీలించండి. వారు యిద్దరూ సంవత్సరమంతా పెట్టుబడులు పెట్టారు.

నెలలు	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జూలై	ఆగష్టు	సెప్టెంబరు	అక్టోబరు	నవంబరు	డిసెంబరు	మొత్తం వాటాలు
రామయ్య వాటాలు	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	24
గోపాలం వాటాలు	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	36

వారి వాటాల నిష్పత్తి = 24: 36

= 2: 3 మరియు వారి వాటాల పెట్టుబడి కాలముల నిష్పత్తి = 1:1

మీరు ఏమి గమనించారు? సమాన కాలములు పెట్టుబడి పెట్టినప్పుడు పెట్టుబడుల నిష్పత్తి, వారి వాటాల నిష్పత్తికి సమానము. కావున వారు వచ్చిన లాభాన్ని 2 : 3 నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి.

పై ఉదాహరణలో,

సందర్భం 1 : వారు వ్యాపారాన్ని ఒక్కొక్కరు ₹ 5000 పెట్టుబడితో ప్రారంభించారనుకొనుము. కాని రామయ్య తన పెట్టుబడిని 12 నెలలు వుంచగా గోపాలం కేవలం 9 నెలలు మాత్రమే పెట్టుబడి పెట్టాడు. వారిద్దరూ లాభాన్ని ఎలా పంచుకొంటారు? వారిద్దరూ సమాన మొత్తాలు పెట్టుబడి పెట్టారు కనుక వారు లాభాన్ని సమానంగా పంచుకోవాలని మీరు చెప్పగలరా? లేదు కదా! ఎందుకంటే రామయ్య ఎక్కువ కాలం పెట్టుబడి పెట్టాడు కదా.

వారి పెట్టుబడుల నిష్పత్తి = 5000: 5000 = 1:1

నెలలు	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జూలై	ఆగష్టు	సెప్టెంబరు	అక్టోబరు	నవంబరు	డిసెంబరు	మొత్తం వాటాలు
రామయ్య వాటాలు	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	12
గోపాలం వాటాలు	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹				9

వారి వాటాల నిష్పత్తి = 12 : 9 = 4 : 3

మరియు పెట్టుబడి కాలముల నిష్పత్తి = 12 : 9 = 4 : 3

పై సందర్భంలో మీరు గమనించిన విషయం వారి పెట్టుబడులు సమానం. కానీ వారి పెట్టుబడుల కాలాలు వేరు. కావున వారి లాభాన్ని పెట్టుబడి కాలముల నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి.

సందర్భం 2 : ఇంకను రామయ్య ₹ 2000 లను 12 నెలలు, గోపాలం ₹ 3000 లను 9 నెలలు పెట్టుబడి పెట్టారనుకొనుము. సంవత్సరాంతమున వచ్చిన లాభాన్ని వారు ఏ నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి? వారి పెట్టుబడుల నిష్పత్తిలోనా లేక వారి కాలవ్యవధుల నిష్పత్తిలోనా? రామయ్య తక్కువ పెట్టుబడిని ఎక్కువ కాలము పెట్టగా, గోపాలం ఎక్కువ పెట్టుబడిని తక్కువ కాలం పెట్టాడు. ఇక్కడ మనం వారి పెట్టుబడులకు, కాలవ్యవధులకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. కాని దీనిని ఎలా చేయాలి?

పెట్టుబడుల నిష్పత్తి = 2000 : 3000 = 2 : 3

పెట్టుబడి కాలముల నిష్పత్తి = 12 : 9 = 4 : 3

నెలలు	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జూలై	ఆగష్టు	సెప్టెంబరు	అక్టోబరు	నవంబరు	డిసెంబరు	మొత్తం వాటాలు
రామయ్య వాటాలు	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	24
గోపాలం వాటాలు	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹				27

వారి వాటాల నిష్పత్తి = 24 : 27 = 8 : 9

లాభాల నిష్పత్తి = $(2\times 12) : (3\times 9) = 8 : 9$

ఇక్కడ పెట్టుబడుల నిష్పత్తి 2 : 3 మరియు కాలవ్యవధుల నిష్పత్తి 4 : 3. కావున వాటాల నిష్పత్తి $(2 \times 12) : (3 \times 9) = 8 : 9$. కావున వారు సంవత్సరాంతమున వచ్చిన లాభాన్ని 8 : 9. నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి.

మీరు పెట్టుబడులు మరియు కాలముల నిష్పత్తులకు వాటాల నిష్పత్తికి మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని కనుగొన్నారా?

వారి వాటాల నిష్పత్తిని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$8:9 = \quad 2:3 \quad :: \quad 4:3$$ [2 : 3 మరియు 4 : 3 నిష్పత్తులకు]

పూర్వపదముల లబ్ధము   పరపదముల లబ్ధము

రెండు నిష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా తెలపడానికి మనం ఆ రెండు నిష్పత్తుల పూర్వపదముల లబ్ధము మరియు పర పదముల లబ్ధముల నిష్పత్తిని కనుగొంటాము. ఇలా వచ్చిన నిష్పత్తినే మనం ఆ రెండు నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తి అంటాము అనగా బహుళ నిష్పత్తి కనుగొనడానికి ఇచ్చిన నిష్పత్తులను సూచించే భిన్నాలను గుణిస్తున్నాము.

a : b మరియు c : d లు ఇచ్చిన రెండు నిష్పత్తులైన వాటి బహుళ నిష్పత్తి $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ అనగా ac: bd.

వీటిని ప్రయత్నించండి:

1. క్రింది నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

   (a) 3 : 4 మరియు 2 : 3   (b) 4 : 5 మరియు 4 : 5   (c) 5 : 7 మరియు 2 : 9

2. నిత్య జీవితంలో బహుళ నిష్పత్తికి కొన్ని ఉదాహరణలు తెల్పుము.

శాతము:

క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

M. K. నగర్ ఉన్నత పాఠశాల విద్యార్థులు ఒక ప్రదర్శన ఏర్పాటు చేసి టిక్కెట్లు అమ్మడం ద్వారా విరాళాలు సేకరించాలని నిర్ణయించుకొన్నారు. 8వ తరగతి విద్యార్థులు 300 టికెట్లను, 7వ తరగతి విద్యార్థులు 250 టికెట్లను అమ్మాలని నిర్ణయించబడినది. ప్రదర్శనకు ఒక గంట ముందు పరిశీలించగా 8వ తరగతి విద్యార్థులు 225 టికెట్లను, 7వ తరగతి విద్యార్థులు 200 టికెట్లను అమ్మినట్లు తెలిసినది. ఏ తరగతి విద్యార్థుల టికెట్లను అమ్మడంలో వారికి నిర్దేశించిన లక్ష్యానికి దగ్గరగా వచ్చారు?

ఏ తరగతి విద్యార్థులు వారి లక్ష్యానికి దగ్గరగా వచ్చారో తెలుసుకోవడానికి, మీరు 225 : 300 మరియు 200:250 నిష్పత్తులను పోల్చడానికి ప్రయత్నిస్తారు. 8వ తరగతి విద్యార్థుల టికెట్ల నిష్పత్తి 3 : 4 మరియు 7వ తరగతి విద్యార్థుల టికెట్ల నిష్పత్తి 4 : 5 మీరు వీటిని పోల్చి చెప్పగలరా? అర్థవంతమైన పోలిక కష్టమే కదా అందువలన చూడగానే చెప్పలేము కదా! వాటిని పోల్చడానికి వాటి తుల్య నిష్పత్తులు కావాలి. రాశులను పోల్చడానికి వాటిని శాతములలోనికి మార్చడము అనేది ఒక పద్ధతి.

శాతము అనగా ఒక సంఖ్యను 100 తో పోల్చడం. శాతము అనగా ప్రతీ వందకు లేదా ప్రతీ వందలో అని అర్థము.

$100\% = \frac{100}{100}$. శాతము అనగా 100 హారముగాగల భిన్నము.

8వ తరగతి విద్యార్థులచే అమ్మబడిన టిక్కెట్ల శాతము $= \frac{3}{4}\times\frac{100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$

7వ తరగతి విద్యార్థులచే అమ్మబడిన టికెట్ల శాతము $= \frac{4}{5}\times\frac{100}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$

దీనిని బట్టి మనం టికెట్లు అమ్మాలనే లక్ష్యంలో 7వ తరగతి విద్యార్థులు దగ్గరగా వచ్చారని అర్థం చేసుకోవచ్చు.

శాతము అనేది 100 లోని భాగముల సంఖ్య. కావున హారమును 100 కు సమానం చేయాలి. దీని కొరకు లవ, హారాలను 100 తో గుణించాలి.

శాతాలను మనం సాధారణ కొలమానంగా ఉపయోగించవచ్చును.

మొదటి ఉదాహరణలో మనం స్నిగ్ధ, సిరిలకు వచ్చిన ఓట్లను నిష్పత్తిలో పోల్చాము. దీనినే మనం శాతముతో కూడా పోలవచ్చును.

స్నిగ్ధకు 40 ఓట్లలో 24 వచ్చాయి. దీనినే మనం క్లుప్తంగా ప్రతీ 5 ఓట్లకు 3 ఓట్లు వచ్చాయి అని చెప్పవచ్చును. వచ్చిన శాతము $\frac{3}{5}\times 100\% = 60\%$	**మరొక పద్ధతి** 40 ఓట్లలో స్నిగ్ధకు వచ్చిన ఓట్లు 24. కావున 100 ఓట్లలో స్నిగ్ధకు వచ్చిన ఓట్లు = $\frac{24}{40}\times 100 = 60$ కావున ప్రతీ 100 ఓట్లలో 60 ఓట్లు ఆమెకు వచ్చాయి అనగా ఆమెకు వచ్చిన ఓట్లశాతం = 60%

మొత్తం విద్యార్థులందరూ ఓటు వేశారు కనుక

స్నిగ్ధకు వచ్చిన ఓట్ల శాతం + సిరికి వచ్చిన ఓట్ల శాతం = 100%

60% + సిరికి వచ్చిన ఓట్ల శాతము = 100%

సిరికి వచ్చిన ఓట్ల శాతం = 100% – 60% = 40%

5.1 శాతంలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను కనుగొనుట

క్రింది సందర్భాలను గమనించండి.

- తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్య 10 శాతం పెరిగినది.
- ఇండ్ల ధరలు 12 శాతం పడిపోయినవి.
- 2020 వ సంవత్సరం నాటికి CO_2 విడుదల 25% కి తగ్గవలసి ఉన్నది.

రాశులలోని మార్పులను తరచుగా మనం ఇచ్చిన రాశిలోని శాతంగా పేర్కొనడం జరుగుతుంది.

శాతములో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను లెక్కించుడానికి రెండు పద్ధతులు ఉన్నాయి. దీనిని అర్థం చేసుకోవడానికి క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

(1) ఒక కంపెనీ క్రిందటి నెల అమ్మకాలు మొత్తం ₹ 98,700. ఈ అమ్మకాల మొత్తాన్ని ఈ నెలలో 35% పెంచమని ఆ కంపెనీ అధికారి క్రింది సిబ్బందికి వివరించెను. ఆ సిబ్బంది ఈ నెలలో చేయవలసిన అమ్మకాల మొత్తము ఎంత?

క్రిందటి నెల అమ్మకాలు = ₹ 98,700. ₹ 98,700 లలో 35% = $\frac{35}{100}\times 98,700$ = ₹ 34545 ఈ నెల అమ్మకాల మొత్తం = ₹ 98,700 + 34,545 = ₹ 1, 33, 245.	**మరొక పద్ధతి** 35% పెరుగుదల అనగా ₹ 100 లో పెరుగుదల వలన ₹ 135. ₹ 98,700 పెరుగుదల వలన? పెరగవలసిన అమ్మకాలు = ₹ $\frac{135}{100}\times 98,700$ = ₹ 1,33,245.

శాతములో తగ్గుదల అనగా తగ్గించవలసిన మొత్తమును కనుగొని ఇచ్చిన మొత్తము నుండి దానిని తీసివేయాలి.

దీనిని అర్థం చేసుకొనుటకు ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

(2) ఒక జత బూట్ల ధర ₹ 550. వాటి అమ్మకంపై 10% తగ్గింపు ఉన్న, ఆ బూట్ల అమ్మకం ధర ఎంత?

బూట్ల ధర = ₹ 550.

తగ్గింపు = ₹ 550 లో 10% తగ్గింపు

$= \frac{10}{100} \times 550 =$ ₹ 55.

అమ్మకపు ధర = అసలు ధర – తగ్గింపు

= ₹ 550 – ₹ 55 = ₹ 495.

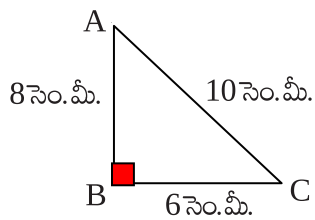
ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

1. ఒక సంఖ్యకు రెండు రెట్లు అనగా ఆ సంఖ్యలో పెరుగుదల 100% . మనం ఆ సంఖ్యలో సగము తీసుకొన్న దానిలో తగ్గుదల శాతము ఎంత?
2. ₹ 2400 కన్నా ₹ 2000 అనేది ఎంత శాతం తక్కువ. అలాగే ₹ 2000 లు కంటే ₹ 2400 లు ఎంత శాతము ఎక్కువ. ఈ రెండు శాతములు సమానమేనా?

అభ్యాసము - 5.1

1. క్రింది వాటికి నిష్పత్తులను కనుగొనుము.
   (i) స్మిత తన కార్యాలయంలో రోజుకు 6 గంటలు పనిచేయును. కాజల్ తన కార్యాలయములో రోజుకు 8 గంటలు పనిచేయును. అయిన వారి పనిగంటలు నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
   (ii) ఒక కుండలో 8 లీటర్ల పాలు, మరియొక దానిలో 750 మి.లీ. పాలు ఉన్నాయి. వాటి నిష్పత్తి ఎంత?
   (iii) ఒక సైకిలు వేగము గంటకు 15 కి.మీ. ఒక స్కూటర్ వేగము గంటకు 30 కి.మీ. వాటి వేగముల నిష్పత్తి ఎంత?
2. 5 : 8 మరియు 3 : 7 ల బహుళ నిష్పత్తి 45 : x అయిన x విలువ ఎంత?
3. 7 : 5 మరియు 8 : x ల బహుళ నిష్పత్తి 84 : 60 అయిన x విలువ ఎంత?
4. 3 : 4 మరియు 4 : 5 విలోమ నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తి 45 : x అయిన x విలువ ఎంత?
5. ఒక ప్రాథమిక పాఠశాలలో 60 మంది విద్యార్థులకు ముగ్గురు ఉపాధ్యాయులు ఉండవలెను. ఆ పాఠశాలలో 400 మంది విద్యార్థులు చేరిన ఇదే నిష్పత్తిలో ఎంతమంది ఉపాధ్యాయులు కావలెను?
6. ఇచ్చిన పటములో ABC ఒక త్రిభుజము, ప్రతీసారి ఒక జత భుజాల కొలతలు తీసుకొంటూ రాయడానికి వీలైన అన్ని నిష్పత్తులను రాయండి.

   (**సూచన :** AB, BC భుజాల నిష్పత్తి = 8 : 6)



7. 24 మంది విద్యార్థులలో 9 మందికి ఒక పరీక్షలో 75% కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చినవి 75% కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్యకు, 75% కంటే ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి ఎంత?

8. MISSISSIPPI' అనే పదములోని అచ్చుల సంఖ్యకు, హల్లుల సంఖ్యకు నిష్పత్తి కనుగొని, దానిని కనిష్ఠ పదాలలో తెలపండి.

9. రాజేంద్ర, రెహానాలు ఒక వ్యాపారము చేయుచున్నారు. రెహానా ప్రతీనెల వచ్చిన లాభములో 25% తీసుకొంటుంది. ఒక నెలలో రెహానా తీసుకొన్న మొత్తం ₹ 2080 అయిన ఆ నెలలో వారికి వచ్చిన మొత్తము లాభమును కనుగొనండి.

10. ΔABC లో AB = 2.2 సెం.మీ. BC = 1.5 సెం.మీ. మరియు AC = 2.3 సెం.మీ. ΔXYZ లో XY = 4.4 సెం.మీ. YZ = 3 సెం.మీ. మరియు XZ = 4.6 సెం.మీ. అయిన AB : XY, BC : YZ, AC : XZ లను కనుకొనండి. ΔABC భుజాల కొలతలు, ΔXYZ భుజాల కొలతలతో అనుపాతంలో ఉన్నాయా?

(సూచన : రెండు త్రిభజములలో సదృశ భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో వున్న ఆ త్రిభుజాలు అనుపాతంలో ఉండునని చెప్పవచ్చును)

11. మాధురి ఒక సూపర్ మార్కెట్‌కు పోగా అక్కడ సరుకుల మారిన ధరలు ఇలా ఉన్నాయి. బియ్యం ధరలో 5% తగ్గుదల, జామ్ మరియు పండ్లపై 8% తగ్గుదల మరియు నూనె, పప్పులపై 10% పెరుగుదల వున్నవి. అయిన ఆ మారిన ధరలు కనుగొనుటకు మాధురికి సహాయము చేయండి.

వస్తువు	అసలు ధర	మారిన ధర
బియ్యం	₹ 30	
జామ్	₹ 100	
యాపిల్ పళ్ళు	₹ 280	
నూనె	₹ 120	
పప్పు	₹ 80	

12. ఒక క్లబ్‌లో క్రిందటి సంవత్సరము 2075 మంది చేరినారు. ఈ సంవత్సరము చేరినవారి సంఖ్య 4% తగ్గిన
(a) తగ్గిన వారి సంఖ్యను (b) ఈ సంవత్సరము చేరిన వారి సంఖ్యను కనుగొనుము.

13. ఒక రైతుకు గత సంవత్సరము ప్రత్తి పంటలో 1720 బస్తాల దిగుబడి వచ్చినది. ఈ సంవత్సరములో ఆమె ప్రత్తి పంటపై దిగుబడి 20% ఎక్కువ వచ్చునని భావించుచ్చున్నది. అయిన ఈ సంవత్సరము ఆమె ఎన్ని బస్తాల దిగుబడిని ఆశిస్తున్నది.

14. P, Q లు AB రేఖాఖండంపై, $\overline{AB}$ యొక్క మధ్య బిందువుకు ఒకే వైపునకు గల బిందువులు. P బిందువు $\overline{AB}$ ను 2 : 3 లో, Q బిందువు $\overline{AB}$ ను 3 : 4 లో విభజించుచున్నవి. PQ = 2 సెం.మీ. అయిన AB రేఖాఖండపు పొడవును కనుగొనుము.

5.2 రుసుము (డిస్కౌంట్) లను కనుగొనుట

పెద్ద పెద్ద షాపులలో మరియు సూపర్ మార్కెట్‌లలో వస్తువులకు ధరల సూచీలను ఏర్పాటు చేస్తారు? ఆ ధరలను ఏమంటారో మీకు తెలుసా? ఫ్యాక్టరీలో ఉత్పత్తి అయిన వస్తువులకు వారు ఇచ్చిన జాబితాల ప్రకారం ధరలను నిర్ణయిస్తారు. దీనినే మనం జాబితా ధర లేదా క్యాటలాగు ధర లేదా ప్రకటన ధర అంటారు.

రవి ఒక వస్తువును కొనుటకు దుకాణమునకు వెళ్ళెను. ఆ పుస్తకముపై ముద్రించి వున్న ధర ₹ 80. ఆ షాపు యజమాని దానిపై 15% రుసుము ఇచ్చిన ఆ పుస్తకమును కొనుటకు రవి ఎంత సొమ్ము చెల్లించవలెను?

ఇలా మన దైనందిన జీవితంలో అనేక సందర్భాలలో మనకు వస్తువులపై రుసుము అనగా తగ్గింపు లభిస్తుంది.

ఈ ధరల తగ్గింపునే రుసుము లేదా ముదరా అని కూడా అంటారు. దీనిని ప్రకటన వెల లేదా జాబితా వెలపై నిర్ణయిస్తారు.

పై ఉదాహరణలో రవికి 15% రుసుము లభించినది. ముద్రిత వెల ₹ 80. అప్పుడు రుసుము $\frac{15}{100}\times 80 =$ ₹ 12.

కావున రవి చెల్లించవలసిన మొత్తము ₹ 80 – ₹ 12 = ₹ 68.

మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనించండి.

ఉదాహరణ 1: ఒక సైకిల్ ప్రకటన వెల ₹ 3600 మరియు అమ్మకపు వెల ₹ 3312 అయిన దానిపై తగ్గింపును, తగ్గింపు శాతమును కనుగొనండి.

సాధన: రుసుము = ప్రకటన వెల – అమ్మకపు వెల

= ₹ 3600 – ₹ 3312 = ₹ 288

రుసుమును ఎల్లప్పుడూ ప్రకటన వెలపై లెక్కించెదరు. కావున రుసుము శాతము కనుగొనుటకు ప్రకటన వెలను తీసుకోవాలి.

ప్రకటన వెల ₹ 3600 అయిన రుసుము ₹ 288

ప్రకటన వెల ₹ 100 అయిన రుసుము ఎంత?

తగ్గింపు శాతము = $\frac{288}{3600}\times 100 = 8\%$

అలాగే రుసుము శాతమును ఇచ్చిన మనము రుసుమును కూడా కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 2 ఒక పంకా (ఫ్యాన్) ప్రకటన వెల ₹ 1600. అమ్మకం దారు దానిపై 6% రుసుము ఇచ్చిన దాని అమ్మకం వెల ఎంత?

సాధన:

రాజు దానిని ఈ విధంగా లెక్కించెను.	లత దీనిని వేరొక పద్ధతిలో లెక్కించినది.
రుసుము = ₹ 1600 లలో 6%	6% తగ్గుదల అనగా
= $\frac{6}{100}\times 1600 =$ ₹96	₹ 100 తగ్గుదల తరువాత ₹ 94, అమ్మకం వెల
అమ్మకం వెల = ప్రకటన వెల – రుసుము	₹ 1600 తగ్గుదల తరువాత?
= ₹ 1600 – ₹ 96	అమ్మకం వెల = $\frac{94}{100}\times 1600 =$ ₹1504
= ₹ 1504.	

వీటిని ప్రయత్నించండి:

1. క్రింది పట్టికలో అమ్మకం ధరలను రాయండి.

వస్తువు	ప్రకటన వెల (₹ లలో)	రుసుము %	అమ్మకం వెల (₹ లలో)
	450	7%	
	560	9%	
	250	5%	
	15000	15%	

ఉదాహరణ 3 నీలిమ బట్టలు కొనుటకు ఒక దుకాణమునకు వెళ్ళినది. ఆమె ఎంచుకున్న దుస్తుల ప్రకటన వెల ₹ 1000. దుకాణదారు మొదట 20% తరువాత 5% రుసుము ఇచ్చెను అయిన ఆమెకు మొత్తము మీద ఎంత శాతము రుసుము లభించినదో కనుగొనండి.

సాధన: దుస్తుల ప్రకటన వెల = ₹ 1000.

మొదటి రుసుము శాతము = 20%

మొదటి తగ్గింపు = 20% of 1000

$$= \frac{20}{100} \times 1000 = ₹\ 200$$

మొదటి రుసుము తరువాత ధర = ₹ 1000 – ₹ 200

= ₹ 800.

రెండవ రుసుము శాతము = 5%

రెండవ రుసుము = 5% of ₹ 800

$$= \frac{5}{100} \times 800 = ₹\ 40$$

రెండవ రుసుము తరువాత ధర = ₹ 800 – ₹ 40 = ₹ 760.

అయిన అమ్మకపు ధర = ₹ 760.

> 20% రుసుము అనగా ₹ 100 ధర ₹ 80 కి తగ్గింపు
>
> 5% రుసుము అనగా ₹ 100 ధర ₹ 95 కి తగ్గింపు.
>
> ∴ మొత్తంపై అమ్మకపు ధర
>
> $$= 1000 \times \frac{80}{100} \times \frac{95}{100}$$
>
> = ₹ 760

ఇచ్చి రెండు రుసుములకు సమానమైన ఏకైక రుసుము = ₹ 1000 – ₹ 760 = ₹ 240.

₹ 1000 పై లభించిన మొత్తము రుసుము ₹ 240

₹ 240 పై లభించే రుసుము = $\frac{24\cancel{0}}{10\cancel{00}} \times \cancel{100}$ = 24%

మీరు ఏమి గమనించారు? ఆమెకు లభించిన రుసుము శాతము విడి, విడి రుసుము శాతములకు సమానమా?

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

ప్రీతి బట్టలు కొనుటకు ఒక దుకాణమునకు వెళ్ళినది. ఆమె ఎంచుకున్న దుస్తుల ప్రకటన వెల ₹ 2500. దుకాణదారుడు మొదట 5% రుసుము ఇచ్చినాడు మరలా అదుగగా మరొక 3% రుసుము ఇచ్చినాడు. అయిన ఆమెకు లభించిన మొత్తము రుసుము శాతము ఎంత? అది 8% కి సమానంగా వుంటుందా? ఆలోచించి మీ మిత్రులతో చర్చించి నోట్ పుస్తకములో రాయండి.

5.3 శాతములను అంచనా వేయడం

ఒక దుకాణములో మీరు చేసిన కొనుగోలు మొత్తం ₹ 477.80. దుకాణదారుడు మీకు 15% తగ్గించిన మీరు చెల్లించవలసిన మొత్తమును ఎలా అంచనా వేస్తారు?

బిల్లును దగ్గర పదులకు సవరించుము. ₹ 477.80 లు ₹ 480 కి సవరించబడినది.

ఇప్పుడు దానిలో 10% లెక్కకట్టుము. అది ₹ 48. దాని సగము లెక్కించుము అది ₹ 24. కనుక కావలసిన తగ్గింపు మొత్తము ₹ 48 + ₹ 24 = ₹ 72. చెల్లించవలసిన మొత్తము సుమారుగా ₹ 410.

వీటిని ప్రయత్నించండి:

(i) ₹ 357.30 లో 20% అంచనావేయండి. (ii) ₹ 375.50 లకు 15% అంచనా వేయండి.

5.4 లాభనష్టములు

అమ్మకములు మరియు కొనుగోళ్ళకు సంబంధించిన ధరలు (లాభ నష్టములు)

క్రింది సందర్భాలను పరిశీలించండి

- సీత ఒక కుర్చీని ₹ 750 లకు కొని ₹ 900 లకు అమ్మినది.
- మేరి గత సంవత్సరము 10 గ్రాముల బంగారమును ₹ 25000 లకు కొని ఈ సంవత్సరము ₹ 30,000 లకు అమ్మినది.
- రహీమ్ ఒక సైకిల్‌ను ₹ 1600 లకు కొని తరువాత సంవత్సరము ₹ 1400 లకు అమ్మెను.
- అనిత ఒక కారును ₹ 4.8 లక్షలకు కొని రెండు సంవత్సరముల తరువాత ₹ 4.1 లకు అమ్మెను.
- హరి ఒక ఇంటిని ₹ 9 లక్షలకు కొని, దాని మరమ్మత్తుల నిమిత్తం ₹ ఒక లక్ష ఖర్చుపెట్టెను. దానిని తరువాత ₹ 10.7 లక్షలకు అమ్మెను.

మొదటి నాలుగు ఉదాహరణలలో లాభము లేదా నష్టము అనేది వాటి అమ్మకపు వెల మరియు కొన్న వెలల భేదము కనుగొనుట ద్వారా తెలుసుకోవచ్చును.

చివరి ఉదాహరణలో, హరికి వచ్చిన లాభము ఎంత? ₹ 1.7 లక్షలు లాభమా కాదు కదా! దానిని అమ్మడానికి ముందర కొన్నవెల కాకుండా అదనంగా కొంత సొమ్మును ఖర్చు పెట్టెను. అటువంటి ఖర్చులను మనము ఏమని పిలుస్తాము?

కొన్ని సార్లు దుకాణదారులు వస్తువులను కొన్నవెలతో పాటు కొన్ని అదనపు ఖర్చులు అనగా రవాణా, నిల్వ చేయడం (గోడౌన్‌లకు), కూలీలు, మరమ్మత్తులు, కమీషన్‌లు మొదలగునవి చేయవలసివస్తుంది. అటువంటి అదనపు ఖర్చులను మనం అదనపు ఖర్చులు అంటాము. వీటిని కొన్న వెలకు కలపాలి. అప్పుడు లాభనష్టాలను ఈ మొత్తము కొన్నవెలపై లెక్కిస్తాము.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

అమ్మిన వెల కొన్న వెల సమానమైతే ఏమి జరుగుతుంది? మన నిత్య జీవితంలో అటువంటి పరిస్థితులు వస్తాయా?

పై సందర్భాలలో లాభము లేదా నష్టము కనుగొనుట చాలా తేలిక, కాని వాటిని శాత రూపంలో తెలిపితే మరింత అర్థవంతంగా ఉంటుంది. లాభము అనేది కొన్నవెలపై పెరుగుదల శాతము మరియు నష్టము అనేది కొన్న వెలపై తగ్గుదల శాతము

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూదండి.

ఉదాహరణ 4 రాధిక పాత వస్తువులను కొని అమ్మేవ్యాపారము చేయును. ఆమె ఒక పాత రిఫ్రిజిరేటర్‌ను ₹ 5000 లకు కొని ₹ 100 రవాణాకు, ₹ 500 మరమ్మత్తులకు ఖర్చుచేసెను. దానిని ఆమె ₹ 7000 లకు అమ్మిన (i) ఆ రిఫ్రిజిరేటర్ కొన్న వెలను (ii) లాభశాతము లేదా నష్టశాతమును కొనుగొనుము.

సాధన : (i) కొన్ని వెల మొత్తం = కొన్న ధర + రవాణా ఖర్చు + మరమత్తు ఖర్చులు.

$= ₹\ (5000 + 100 + 500) = ₹\ 5600$

కావున కొన్న వెల మొత్తం ₹ 5600.

(ii) అమ్మకపు వెల ₹ 7000. ఇక్కడ అమ్మకపు వెల > కొన్న వెల కావున లాభం వస్తుంది.

లాభం = అమ్మిన వెల – కొన్న వెల = ₹ 7000 – ₹ 5600 = ₹ 1400.

కొన్న వెల ₹ 5600 అయిన లాభము ₹ 1400

కొన్న వెల ₹ 100 అయిన లాభము ఎంత?

లాభశాతము $= \dfrac{1400}{5600} \times 100 = 25\%$

ఉదాహరణ 5 వినయ్ ఒక ప్లాట్‌ను ₹ 4,50,000 లకు కొని దాని మరమ్మత్తులు, రంగులు వేయుటకు ₹ 10,000 ఖర్చు చేసెను. తరువాత దానిని ₹ 4,25,500 లకు అమ్మిన అతనికి లాభమా, నష్టమా? ఎంత శాతము?

సాధన : మొత్తము కొన్న వెల = కొన్న వెల + మరమ్మత్తులు

$= ₹\ (4,50,000 + 10,000) = ₹\ 4,60,000.$

అమ్మకపు వెల ₹ 4,25,500. ఇక్కడ అమ్మకపు వెల < కొన్న వెల కావున నష్టము వస్తుంది.

నష్టము = కొన్న వెల – అమ్మిన వెల

= ₹ 4,60,000 – ₹ 4,25,500 = ₹ 34,500.

కొన్న వెల ₹ 4, 60, 000 అయిన నష్టము ₹ 34,500 కొన్నవెల ₹ 100 అయిన నష్టము ఎంత?

నష్టశాతము $= \frac{34,500}{4,60,000} \times 100 = 7.5\%$

ఉదాహరణ 6 వెంకన్న 50 డజన్ల అరటి పళ్ళను ₹ 1250 కి కొనెను. అతను రవాణా ఖర్చులకు ₹ 250 ఖర్చు చేసెను. 5 డజన్ల అరటిపళ్ళు కుళ్ళిపోవుటవలన వాటిని అమ్మలేకపోయెను. మిగిలిన అరటిపళ్ళను డజను ₹ 35 లకు అమ్మిన అతనికి లాభమా, నష్టమా? ఎంత శాతము?

సాధన : మొత్తము కొన్న వెల = అరటి పళ్ళు కొన్నవెల + రవాణా ఖర్చులు

= ₹ 1250 + ₹ 250 = ₹ 1500.

అమ్మిన అరటి పళ్ళు = కొన్న అరటి పళ్ళు – పాడయినవి

= 50 – 5 = 45 డజన్లు

కొన్న వెల = ₹ 35 × 45 = ₹ 1575

ఇక్కడ అమ్మిన వెల > కొన్న వెల కావున లాభము వచ్చును.

లాభము = అమ్మిన వెల – కొన్న వెల

= ₹ 1575 – ₹ 1500 = ₹ 75

కొన్న వెల ₹ 1500 లకు లాభము ₹ 75

కొన్నవెల ₹ 100 అయిన లాభము?

లాభ శాతము $= \frac{75}{1500} \times 100 = 5\%$

ఉదాహరణ 7 మాలిక్ రెండు టేబుళ్ళను ఒక్కొక్కటి ₹ 3000 లకు అమ్మెను. ఒక టేబుల్‌పై 20% లాభము, మరియొక దానిపై 20% నష్టము వచ్చిన మొత్తము మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతము?

సాధన:

మొదటి టేబుల్

అమ్మిన వెల = ₹ 3000

లాభశాతము = 20%

లాభశాతము అనగా కొన్నవెలపై పెరుగుదల శాతము

అమ్మకపు వెల ₹ 120 అయిన కొన్నవెల ₹ 100

అమ్మకపు వెల ₹ 3000 అయిన కొన్న వెల?

కొన్న వెల = ₹ $100 \times \frac{3000}{120} = $ ₹ 2500

రెండవ టేబుల్

అమ్మిన వెల = ₹ 3000

నష్ట శాతము = 20%

నష్ట శాతము అనగా కొన్నవెలపై తగ్గుదల శాతము

అమ్మకపు వెల ₹ 80 అయిన కొన్నవెల ₹ 100

అమ్మకపు వెల ₹ 3000 అయిన కొన్నవెల?

కొన్న వెల = ₹ $100 \times \frac{3000}{80} = $ ₹ 3750

రెండు టేబుళ్ళ కొన్న వెల = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

రెండు టేబుళ్ళ అమ్మకం వెల = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000.

ఇక్కడ కొన్నవెల > అమ్మిన వెల కావున నష్టం వస్తుంది.

నష్టం = కొన్నవలె – అమ్మిన వెల = ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹ 250

కొన్న వెల ₹ 6250 అయిన నష్టము ₹ 250

కొన్న వెల ₹ 100 అయిన నష్టము ఎంత?

నష్ట శాతము $= 250 \times \frac{100}{6250} = 4\%$

అనగా మొత్తము మీద అతనికి 4% నష్టము వచ్చును.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

ఒక దుకాణదారుడు రెండు TV లను ఒక్కొక్కటి ₹ 9,900 లకు అమ్మెను. మొదటిదానిపై 10% లాభము, రెండవ దానిపై 10% నష్టము వచ్చిన అతనికి మొత్తము మీద లాభమా? నష్టమా?

5.5 అమ్మకపు పన్ను / విలువ ఆధారిత పన్ను (Value Added Tax - (VAT))

ప్రభుత్వము వారు వస్తువుల అమ్మకములపై పన్ను వసూలు చేయును. దీనినే మనం విలువ ఆధారిత పన్ను (VAT) అంటాము. దుకాణదారుడు మన నుండి అంటే వినియోగదారుల నుండి ఈ పన్ను వసూలు చేసి ప్రభుత్వానికి చెల్లించును. అసలు ప్రభుత్వము ఈ పన్నులను ఎందుకు వేస్తుందో మీకు తెలుసా? ఇలా వసూలు చేసిన పన్ను మొత్తాలతో ప్రభుత్వము అనేక సంక్షేమ కార్యక్రమాలు చేస్తుంది.

అమ్మకం పన్ను అనేది రవాణా చేసే సరుకులపై మాత్రమే వేస్తారు. వ్యాట్ (VAT) అనేది కేవలం సరుకులపై వేసే పన్ను. దీనిని సేవలపై వేయరు. అమ్మకం పన్నునే యిప్పుడు VAT గా మార్చారు. ఇది అన్ని వస్తువులకు ఒకేలా వుండదు. నిత్యావసర వస్తువులపై VAT ఉండదు. 2012 సం॥ నాటికి బంగారము, వజ్రాలు మొదలైన వాటిపై 1%, పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల పెట్టుబడి సరుకులు, ఎక్కువ వినియోగమున్న వస్తువులపై 5% మిగిలిన అన్ని ఇతర వస్తువులపై 14.5% పన్నును కేంద్ర ప్రభుత్వం నిర్ణయించింది.

ఈ VAT ను ఎప్పుడూ అమ్మకపు పన్నుపై లెక్కిస్తారు. ఇంకా యిది మనము కట్టే బిల్లులో కలిపి ఉంటుంది. VAT అనేది అమ్మకపు వెలపై పెరుగుదల శాతము ఈ క్రింది వచ్చిన బిల్లును పరిశీలించండి. VAT కలిపి బిల్లు.
గణపతి ఒక మందుల దుకాణములో తన తల్లికి మందులు కొనెను. దుకాణదారుడు ఇచ్చిన బిల్లు ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది. బిల్లు మొత్తము ₹ 372.18. దీనిలో 5% VAT కలపబడి వున్నది.

VAT కలపకు ముందు గల బిల్లు మొత్తం కనుగొనండి.

Tax Invoice No. : 2012?301549007214 Date : 15-09-2012 20:48:31

Name : Ganpathi Age : 35 Gender : Doc:dr Do.Reg. No. :

Cus.ID:20121301549000617 Add: Sainathpura)

S.	Product	Mfgr	Sch	Batch	Exp.	MRP.	Rate	Qty	Amount
1	BETATROP TAB	SUN	H	BSK4198	12-14	5.9	5.9	60	318.60
2.	ECOSPRIN 150 MG TAB	USV	H	04004652	05-14	0.4242857	0.38	42	16.04
3.	LASIX 40 MG TAB	AVENTIS	H	0212016	03-16	0.44733334	0.40	15	6.04
4.	ELDERVIT PLUS CAD	ELDER	C	SE0022008	08-13	2.3333333	2.10	15	31.5

VAT ON ₹ 354.45 @ 5% = 17.72 Total : 372.18

Rounded Total : 372.00

బిల్లును పరిశీలించిన బిల్లు మొత్తం = ₹ 354.45 ,VAT @ 5% = ₹17.72

ఉదాహరణ 8 ఒక జత బూట్లు ₹ 450. దానిపై 6% అమ్మకపు పన్ను విధించిన కట్టవలసిన బిల్లు మొత్తము ఎంత?

సాధన : ₹ 100 లపై అమ్మకం పన్ను ₹ 6.

₹ 450 పై అమ్మకం పన్ను ఎంత?

అమ్మకం పన్ను = ₹ $\frac{6}{100} \times 450$ = ₹ 27.

బిల్లు మొత్తం = వస్తువు ఖరీదు + అమ్మకం పన్ను = ₹ 450 + ₹ 27 = ₹ 477.

5.6 వస్తువు సేవా పన్ను (Goods and Service Tax- GST)

ఇది వస్తువుల మరియు సేవల సరఫరాపై ఒకే పరోక్ష పన్ను. భారతదేశంలో విక్రయ పన్ను మరియు ఎక్సైజ్ లాంటి అనేక రకాల పన్నులను రద్దు చేయడం ద్వారా ఇది 2017 జులైలో ప్రవేశపెట్టబడింది. GST పరిధిలో, వస్తువుల

సేవల యొక్క కదలిక ప్రతి దశలో విలువ జోడింపు ఆధారంగా పన్ను విధించబడుతుంది. పన్ను రేట్లు వివిధ స్లాబ్లు 3%, 5%, 12%, 18% మరియు 28% దాదాపు అన్ని వస్తువులు మరియు సేవల మీద విధించబడతాయి. ఈ స్లాబ్ దేశవ్యాప్తంగా ఉంటుంది. నిర్ణయించిన స్లాబులలో 50% కేంద్ర ప్రభుత్వానికి మరియు 50% రాష్ట్ర ప్రభుత్వానికి చెందుతుంది.

ఉదాహరణ 9 విగ్నేష్ సరుకుల దుకాణమునకు వెళ్ళి సబ్బులకు సంబందించిన వస్తువులను కొన్నాడు. దుకాణదారుడు ఇచ్చిన బిల్లులో ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నది. బిల్లు మొత్తం ₹ 2200 దీనిలో 18% వస్తు సేవా పన్ను (GST) కలపబడింది. అయితే GST కలపక ముందు బిల్లు మొత్తం కనుగొనండి. GST లోని కేంద్ర, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాల వాటాల విలువలు ఎంతెంత?

వస్తువు పేరు	**పరిమాణం**	**రేటు**	**మొత్తం**
సబ్బు	100	20	2000
సర్ఫు ప్యాకెట్స్	2	100	200
బిల్లు మొత్తం			**2200**

సాధన :

బిల్లు మొత్తం విలువ = ₹ 2200

బిల్లులో GST విలువ = 18%

$$= 2200\times\frac{18}{100} = ₹\ 396$$

GST కలపక ముందు బిల్లు మొత్తం = 2200 – ₹ 396 = ₹ 1804

GST లో కేంద్రం (CGST) వాటా = 50%

GST లో రాష్ట్రం (SGST) వాటా = 50%

GST లో కేంద్రం (CGST) వాటా విలువ = $396\times\frac{50}{100} = ₹\ 198$

GST లో రాష్ట్రం (SGST) వాటా విలువ= $396\times\frac{50}{100} = ₹\ 198$

ఉదాహరణ 10 ఒక జత బూట్లు ₹1000. దానిపై 5% GST విధించిన కట్టవలసిన బిల్లు మొత్తం ఎంత?

సాధన : ₹ 100 పై GST ₹ 5

₹ 1000 పై GST ఎంత?

$$\text{GST} = ₹\frac{5}{100}\times 1000 = ₹\ 50$$

బిల్లు మొత్తం = వస్తువు ఖరీదు + GST = ₹1000 + ₹50 = ₹ 1050.

అభ్యాసము - 5.2

1. 2012 వ సంవత్సరములో ప్రపంచం మొత్తము మీద అంతర్జాలమును (Internet) ఉపయోగించువారి సంఖ్య 36.4 కోట్లుగా అంచనా వేయడమైనది. వచ్చే 10 సంవత్సరాలలో ఈ సంఖ్య 125% పెరుగునని అంచనా వేయబడినది. అయిన 2022 వ సంవత్సరములో అంతర్జాలమును ఉపయోగిస్తారని అంచనా వేయబడిన వారి సంఖ్య ఎంత?

2. ఒక గృహ యజమాని తన ఇంటి అద్దెను ప్రతీ సంవత్సరము 5% పెంచును. ప్రస్తుతము ఆ ఇంటి అద్దె ₹ 2500 అయిన రెండు సంవత్సరముల తరువాత ఆ ఇంటి అద్దె ఎంత?
3. ఒక కంపెనీ విలువ సోమవారమునాడు ₹ 7.50. మంగళవారము నాడు అది 6% పెరిగి, బుధవారమునాడు 1.5% తగ్గినది. మరల గురువారము నాడు 2% తగ్గిన, శుక్రవారము నాడు ఉదయం ఆ షేర్ విలువ ఎంత?
4. చాలా జిరాక్స్ యంత్రాలలో ప్రతీ సారి పరిమాణ శాతమును మార్చడం ద్వారా ఇచ్చిన ప్రతి యొక్క పరిమాణమును పెంచడం లేదా తగ్గించడం చేయవచ్చును. రేష్మా తన వద్ద నున్న 2 సెం.మీ. 4 సెం.మీ. బొమ్మను పరిమాణం పెంచాలని కోరుకున్నది. ఆమె జిరాక్స్ యంత్రములో 150% వేసి దాని ప్రతిని తీసుకొన్నది. అయిన ఆమెకు లభించిన ప్రతిలోని బొమ్మ పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనము.
5. ఒక పుస్తకము ముద్రిత వెల ₹ 150. దానిపై 15% రుసుము లభించిన ఆ పుస్తకమును కొనుటకు ఎంత మొత్తము చెల్లించవలెను?
6. ఒక కానుక ప్రకటన వెల ₹ 176 దానిని దుకాణదారుడు మీకు ₹ 165 లకు అమ్మిన మీకు లభించిన రుసుమును, రుసుము శాతమును కనుగొనండి.
7. ఒక దుకాణదారుడు ప్రతీ బల్బు ₹ 10 చొప్పున 200 బల్బులను కొనెను. కాని అందులో 5 బల్బుల కాలిపోయినందున వాటిని బయట పడేసినాడు. మిలిగిన బల్బులను ఒక్కొక్కటి ₹ 12 చొప్పున అమ్మిన మొత్తము మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతము?
8. ఈ క్రింది పట్టికలో సరియైన గడులను అవసరమైనచోట మాత్రమే నింపుము?

వ.సంఖ్య	కొన్న వెల	అదనపు ఖర్చులు	అమ్మకపు వెల	లాభము	నష్టము	లాభ శాతం	నష్ట శాతం
1	₹ 750	₹ 50		₹ 80			
2	₹ 4500	₹ 500			₹ 1,000		
3	₹ 46,000	₹ 4000	₹ 60,000				
4	₹ 300	₹ 50				12%	
5	₹ 330	₹ 20					10%

9. ఒక బల్లను ₹ 2,142 లకు అమ్మగా 5% లాభము వచ్చెను. దానిపై 10% లాభము రావలెనన్న దానిని ఎంతకు అమ్మవలెను?
10. గోపి ఒక గడియారమును 12% లాభమునకు ఇబ్రహీమ్‌కు అమ్మెను. ఇబ్రహీమ్ దానిని 5% నష్టమునకు జాన్‌కు అమ్మెను. జాన్ ఆ గడియారమునకు ₹ 1,330 చెల్లించిన గోపీ ఆ గడియారమును ఎంతకు అమ్మెను?
11. మధు మరియు కవిత ఒక క్రొత్త ఇంటిని ₹ 3,20,000 లకు కొనిరి. కొన్ని ఆర్థిక ఇబ్బందుల వల్ల ఆ ఇంటిని ₹ 2, 80,000 లకు అమ్మిన (a) వారికి వచ్చిన నష్టమును (b) నష్టశాతమును కనుగొనుము.
12. ఒక పాత కార్లను కొని, అమ్ము దుకాణదారుడు ఒక పాత కారును ₹ 1,50,000 లకు కొని దాని మరమ్మత్తులు మరియు రంగు వేయుటకు ₹ 20,000 ఖర్చు చేసెను. అతడు ఆ కారును ₹ 2,00,000 లకు అమ్మిన అతనికి లాభమా?, నష్టమా? ఎంతశాతము?
13. లలిత తన పుట్టిన రోజును స్నేహితులతో జరుపుకొనుటకు హోటలు నుండి పార్సెల్ తెప్పించినది. 5% VAT తో కలిపి ₹ 1,450 బిల్లు వేయబడినది. హోటలు వారు బిల్లు మొత్తముపై 8% రుసుము ఇచ్చిన లలిత హోటలు వాడికి కట్టవలసిన మొత్తమును కనుగొనుము.

14. క్రింది పట్టికలో GST తో కలిసిన బిల్లు మొత్తము ఈయబడినది. GST కలపక ముందు ఆ వస్తువుల ధరను కనుగొనుము.

వ.సంఖ్య	వస్తువు	GST %	బిల్లు మొత్తం (₹ లలో)	అసలు ధర (₹ లలో)
(i)	వజ్రము	3%	₹ 10,300	
(ii)	ప్రెజర్ కుక్కర్	12%	₹ 3,360	
(iii)	పౌడర్ డబ్బా	28%	₹ 256	

15. ఒక సెల్‌ఫోన్ కంపెనీ దారు సెల్‌ఫోన్ రేటును ₹ 4500గా నిర్ణయించాడు. దానిపై డీలర్ 12% GST చెల్లించి సెల్‌ఫోన్ ఖరీదు చేశాడు. అయితే డీలర్ సెల్‌ఫోన్‌పై ఎంత GST చెల్లించాడు. GST తో కలిపి సెల్‌ఫోన్ కొన్న ధర ఎంత?

16. ఒక సూపర్ బజారులోని వస్తువు వెలలు 4% అమ్మకపు పన్ను కలిపినను రూపాయలకు సవరింపు అవసరం లేక 'n' రూపాయలు అగునట్లు రూపాయలు మరియు పైసలలో నిర్ణయించెను. 'n' ధనసంఖ్య అయిన, 'n' విలువ కనిష్ఠంగా ఎంత ఉండవచ్చును?

5.7 చక్ర వడ్డీ

వడ్డీ అనేది సాధారణముగా మనం బ్యాంక్‌లో లేదా పోస్టాఫీస్‌లో డబ్బులు దాచుకొన్నప్పుడు ఇస్తారు. అంతేకాక ఎవరైనా డబ్బులు అప్పు తీసుకొన్నప్పుడు బాకీదారు అప్పు ఇచ్చినవారికి వడ్డీ చెల్లిస్తారు. వడ్డీ అనేది సంవత్సర వడ్డీ రేటుతో అసలు మీద వచ్చే అదనపు సొమ్ము.

కానీ ఈ వడ్డీని ఎలా లెక్కడతారు? వడ్డీని చెల్లించినంత కాలం తీసుకొన్న అసలుపై ఒకే విధంగా లెక్కడితే అటువంటి వడ్డీని ఏమంటారు? దానిని సాధారణ వడ్డీ అంటారు. కదా! ఇది కూడా మనము తీసుకున్న అసలుపై పెరుగుదల శాతమే. ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణ చూద్దాం.

ఉదాహరణ 11 ₹ 2500 లను 12% వడ్డీ రేటున 3 సంవత్సరాలకు వడ్డీకి తీసుకొనిన, దానిపై వడ్డీని, 3 సంవత్సరముల చివర కట్టవలసిన మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇక్కడ P = ₹ 2500, T = 3 సంవత్సరాలు, R = 12%

$$I = \frac{PTR}{100} \text{ కావున}$$

$$= \frac{2500 \times 3 \times 12}{100}$$

3 సంవత్సరాలకు అగు వడ్డీ = ₹ 900.

3 సంవత్సరముల చివర చెల్లించవలసిన మొత్తము = అసలు + వడ్డీ

= ₹ 2500 + ₹ 900 = ₹ 3400.

పై ఉదాహరణ నుండి మనం ఇలా చెప్పవచ్చు.

$$\text{మొత్తము} = \text{అసలు} + \text{వడ్డీ} = P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$$

$$T = 1 \text{ సంవత్సరము అయిన మొత్తము} A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

ప్రయత్నించండి:

క్రింది పట్టికను నింపుము.

వరుస సంఖ్య	అసలు (రూపాయలలో)	కాలము (సంవత్సరములలో)	వడ్డీరేటు % లో (R)	వడ్డీ (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ (రూపాయలలో)
1	3000	3	6	
2		2	5	50
3	1875		12	675
4	1080	2.5		90

రమేష్ ₹100 లను సంవత్సరమునకు 10% వడ్డీరేటు చొప్పున శ్రీను వద్ద చేబదులు తీసుకొనెను. 2 సంవత్సరముల తరువాత అప్పు తీర్చుటకు అతను శ్రీను వద్దకు వెళ్ళి ₹ 120 లను యిచ్చెను. శ్రీను అప్పుడు ఇంకొక రూపాయి యివ్వవలెనని అడుగగా, లెక్కలో ఎందుకు తేడా వచ్చినదో తెలుసుకొనుటకు ఇద్దరూ వారి లెక్కలను కాగితముపై ఈ క్రింది విధముగా చేశారు.

రమేష్ చేసిన పద్ధతి			శ్రీను చేసిన పద్ధతి		
1వ సంవత్సరము	అసలు వడ్డీ @ 10% మొత్తము	₹ 100 ₹ 10 ₹ 110	1 వ సంవత్సరము	అసలు వడ్డీ @ 10% మొత్తము	₹ 100 ₹ 10 ₹ 110
2వ సంవత్సరము	అసలు వడ్డీ @ 10% 2వ సంవత్సరము కట్టవలసిన మొత్తము	₹ 100 ₹ 10 = అసలు + 1వ సంవత్సర వడ్డీ + 2వ సంవత్సర వడ్డీ = 100+10+10 = ₹120	2వ సంవత్సరము	అసలు వడ్డీ @ 10% 2వ సంవత్సరము చివర కట్టవలసిన మొత్తము	₹ 110 ₹ 11 ₹ 121

ఈ రెండు పద్ధతులలో తేడా ₹1. వీటిలో తేడా ఎందుకు వచ్చింది? జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే రెండవ సంవత్సరానికి వడ్డీ లెక్కించడానికి రమేష్ అసలు ₹ 100 లని తీసుకొనగా శ్రీను రెండవ సంవత్సరానికి వడ్డీ లెక్కించడానికి అసలు ₹ 110 గా తీసుకొన్నాడు. ఇక్కడ రమేష్ లెక్కకట్టగా వచ్చిన వడ్డీని సాధారణ వడ్డీ అంటాము. మరి శ్రీను లెక్కించగా వచ్చిన వడ్డీని ఏమని పిలుస్తారో మీకు తెలుసా? ఇక్కడ వడ్డీని లెక్కకట్టడానికి అప్పటిదాకా జమ అయిన వడ్డీని అసలులో కలిపి దానిని

అసలుగా తీసుకొనడం జరిగింది. ఇలా కట్టే వడ్డీనే చక్రవడ్డీ అంటాము. చక్రవడ్డీ అంటే వడ్డీపై వేసే వడ్డీ. మీరు ఈ రెండు రకాల వడ్డీలలో దేనికి ఎప్పుడు ప్రాధాన్యత నిస్తారు?

5.8 చక్రవడ్డీకి సూత్రమును రాబట్టుట

పై ఉదాహరణలో శ్రీను చక్రవడ్డీని లెక్కించడాన్ని మనము చూసాము. 1, 2 సంవత్సరాలకు ఇలా లెక్కించడము సులభము, కాని చాలా సంవత్సరాలకు ఇలా లెక్కించడానికి ఏమి చేయాలి? దానికి ఏదైనా సులభ పద్ధతి వుందా, ఒక ఉదాహరణ ద్వారా దానిని ప్రయత్నిద్దాము.

T = 1సంవత్సరము అయినపుడు సాధారణ వడ్డీతో మొత్తమునకు సూత్రము మొత్తము $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$

P_1= ₹ 10,000, మరియు R = సంవత్సరమునకు 12% అనుకొనుము.

శ్రీను చేసిన పద్ధతి			అదే పద్ధతి సాధారణీకరించుట		
మొదటి సంవత్సరము	అసలు P_1 మొత్తము(A_1)	₹ 10,000 $10000\left(1+\frac{12}{100}\right)$ $= 10000\left(\frac{112}{100}\right)$ = ₹ 11,200	1వ సంవత్సరము	అసలు మొత్తము(A_1)	P_1 $A_1 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$
రెండవ సంవత్సరము	అసలుP_2 మొత్తము A_2	₹ 11,200 $11200\left(1+\frac{12}{100}\right)$ $= 11200\left(\frac{112}{100}\right)$ = ₹ 12,544	రెండవ సంవత్సరము	అసలు మొత్తముA_2	$P_2 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$ $A_2 = P_2\left(1+\frac{R}{100}\right)$ $= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$ $= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$

ఇదే పద్ధతిని కొనసాగించగా 'n' సంవత్సరముల తరువాత మొత్తమునకు సూత్రము $A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

చక్రవడ్డీ ప్రకారం మొత్తం $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ అని రాస్తాము.

ఈ సూత్రమును వుపయోగించడం వలన మనము 'n' సంవత్సరముల చివర కట్టవలసిన మొత్తము మాత్రమే తెలుస్తుంది. మరి చక్రవడ్డీ ఎంతో ఎలా తెలుస్తుంది? దానిని చాలా సులభంగా తెలుసుకోవచ్చును. వచ్చిన మొత్తము నుండి అసలును తీసివేసిన చక్రవడ్డీ ఎంతో తెలుస్తుంది.

$$\therefore \text{C.I} = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n} - P$$

సాధారణ వడ్డీకి, చక్రవడ్డీకి తేడా ఏమిటో తెలుసునా? సాధారణ వడ్డీ ప్రతి సంవత్సరము ఒకేలా వుంటుంది. కానీ చక్రవడ్డీ కాలముతోపాటు పెరుగుతూ వుంటుంది.

ఉదాహరణ 12 : ₹ 5000 లను సంవత్సరమునకు 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున 2 సంవత్సరములకు పొదుపు చేసిన వచ్చు చక్రవడ్డీని, మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన : P = ₹ 5000; R = 8% మరియు n = 2 సంవత్సరములు

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}$$

$$= 5000\left(1+\frac{8}{100}\right)^{2}$$

$$= 5000\times\frac{108}{100}\times\frac{108}{100} = ₹\ 5832.$$

చక్రవడ్డీ = మొత్తం – అసలు

= ₹ 5832 – ₹ 5000

= ₹ 832

ఇవి చేయండి.

1. ₹ 20 000 లపై 5% వడ్డీరేటు చొప్పున 6 సంవత్సరములకు వడ్డీ సంవత్సరమున కొకసారి తిరిగి లెక్కకట్టగా వచ్చే చక్రవడ్డీ ఎంత?
2. ₹ 12600 లపై 10% వడ్డీరేటు చొప్పున 2 సంవత్సరములకు వడ్డీ సంవత్సరమున కొకసారి లెక్కకట్టగా వచ్చే చక్రవడ్డీ ఎంత?

5.9 సంవత్సరమునకు లేదా అర్థ సంవత్సరమునకు చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టుట

పైన ఇచ్చిన లెక్కలను గమనించగా వడ్డీ సంవత్సరమునకు ఒకసారి లెక్కకట్టగా అని వున్నది. దీనికి ఏదైనా ప్రత్యేకత వున్నదా? వున్నది. ఎందుకంటే చక్రవడ్డీని అర్థ సంవత్సరమునకు (6 నెలలకు), మూడు నెలలకు కూడా లెక్కించబడును. చక్రవడ్డీని సంవత్సరమున కొక్కసారి లెక్కకట్టునపుడు వడ్డీని అసలుకు కలిపే కాలాన్ని ఏమంటారో మీకు తెలుసునా? దీనిని మనం వడ్డీని తిరిగి కట్టెడి కాలవ్యవధి అంటారు. వడ్డీని 6 నెలలకొకసారి లెక్కకట్టునపుడు మనకు సంవత్సరంలో రెండు కాల వ్యవధులు వుంటాయి. అపుడు వడ్డీ రేటును సంవత్సరవడ్డీ రేటులో సగము తీసుకోవాలి. కాలవ్యవధి సంవత్సరానికి రెండుగా తీసుకోవాలి.

ఉదాహరణ 13 ₹ 1000 పై సంవత్సరమునకు వడ్డీ రేటు 10% చొప్పున అర్థ సంవత్సరమనకొకసారి చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టగా 1సంవత్సరములో వచ్చే చక్రవడ్డీ ఎంత?

సాధన : చక్రవడ్డీ 6 నెలలకొకసారి లెక్క కట్టుచున్నాము. కావున 1 సంవత్సర కాలంలో 2 కాల వ్యవధులు ఉంటాయి.

అనగా n=2

కావున అర్థసంవత్సర వడ్డీ రేటు $= \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1000\left(\frac{105}{100}\right)^2$$

$= ₹\ 1102.50$

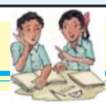
చక్రవడ్డీ $= A - P = 1102.50 - 1000 = ₹\ 102.50$

ఇవి చేయండి :

ఒక సంవత్సరములో చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టు కాలవ్యవధులను, వడ్డీ రేటును లెక్కకట్టుము.

1. కొంత మొత్తము 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున ప్రతీ 6 నెలలకు చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టుచూ $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరములకు అప్పుతెచ్చెను.
2. కొంత మొత్తమును 4% వడ్డీరేటు చొప్పున ప్రతీ 6నెలలకు చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టుచూ 2 సంవత్సరములకు అప్పుతెచ్చెను.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.



ప్రతీ మూడు నెలలకు వడ్డీని లెక్కకట్టిన చక్రవడ్డీ ఎలా మారును? ఒక సంవత్సరములో ఎన్ని కాలవ్యవధులు వస్తాయి? మూడు నెలలకు వడ్డీరేటు సంవత్సర వడ్డీ రేటులో ఎంతభాగము? మీ మిత్రులతో చర్చించండి.

ఉదాహరణ 14 ₹ 12000 లను 10% సంవత్సర వడ్డీ రేటు చొప్పున 6 నెలలకొకసారి చక్రవడ్డీ తిరిగి లెక్కకట్టే పద్ధతిలో అప్పుతెచ్చిన $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరములలో చెల్లించవలసిన మొత్తము ఎంత?

సాధన : వడ్డీ 6 నెలలకొకసారి తిరిగి లెక్కకట్టే పద్ధతి కావున $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరములలో వడ్డీని తిరిగి లెక్కకట్టే కాలవ్యవధులు 3, కావున n = 3

వడ్డీరేటు $= \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 12000\left(\frac{105}{100}\right)^3$$

$$= ₹\ 13891.50$$

చక్రవడ్డీ $= A - P$

$$= 13891.50 - 12000$$

$$= ₹\ 1891.50$$

ఉదాహరణ 15 యాదయ్య తన కుటుంబ అవసరాల నిమిత్తము ₹ 5120 లను $12\frac{1}{2}$% వడ్డీతో సంవత్సరమున కొకసారి వడ్డీ లెక్కకట్టు చొప్పున అప్పు తెచ్చుకొనెను. 2 సంవత్సరముల 9 నెలల తరువాత అతను అప్పు తీర్చుటకు ఎంతసొమ్ము చెల్లించవలెను. అతను చెల్లించిన వడ్డీ సొమ్ము ఎంత?

సాధన : రేష్మా! ఈ సమస్యను క్రింది పద్ధతిలో సాధించుటకు ప్రయత్నించినది.

ఆమె మొదటి 2 సం॥ల 9 నెలలను సంవత్సరములలోనికి మార్చినది

2 సంవత్సరముల 9 నెలలు = $2\frac{9}{12}$ సంవత్సరములు = $2\frac{3}{4}$ సంవత్సరములు

ఆమెకు తెలిసిన చక్రవడ్డీ సూత్రమునుపయోగించి దీనిని సాధించుటకు ప్రయత్నించినది

$$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^{2\frac{3}{4}}$$

ఆమెకు యిక్కడ సమస్య ఏర్పడినది. ఆమె తన ఉపాధ్యాయురాలిని ఘాతాంకములో భిన్నము వున్నప్పుడు ఎలా లెక్కకట్టాలని అడిగినది. ఆ ఉపాధ్యాయురాలు వడ్డీ కట్టు పద్ధతిని యిలా చెప్పినది. మొదటి పూర్ణాంకములకు అనగా 2 సంవత్సరములు చక్రవడ్డీ సూత్ర ప్రకారము లెక్కకట్టగా వచ్చు ఆ మొత్తమును అసలుగా తీసుకొని $\frac{3}{4}$ సంవత్సరములకు వడ్డీ లెక్కకట్టమని సలహా యిచ్చినది.

కావున $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^2$$

$$= 5120\left(\frac{225}{200}\right)^2$$

$$= ₹\ 6480$$

మిగిలిన 9 నెలల కాలానికి వడ్డీ $= 6480 \times \frac{25}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{100} = ₹\ 607.50.$

కావున యాదయ్య 2 సంవత్సరముల 9 నెలల తరువాత చెల్లించవలసిన మొత్తము

$$= 6480 + 607.50 = ₹\ 7087.50$$

కావున చెల్లించిన చక్రవడ్డీ $= 7087.50 - 5120 = ₹\ 1967.50$

5.10 చక్రవడ్డీ సూత్రము అనువర్తనములు

మనము ఈ చక్రవడ్డీ సూత్రమును ఎక్కడ వుపయోగించవచ్చును? కేవలం వడ్డీ లెక్కకట్టుటకే కాక, వివిధ సందర్భాలలో దీనిని ఉపయోగించుకోవచ్చును. ఉదాహరణకు

- జనాభా పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల
- బ్యాక్టీరియా పెరుగుదల రేటు తెలిసిన బాక్టీరియా పెరుగుదల తెలుసుకొనుటకు
- సంవత్సరాల మధ్యలో ఒక వస్తువు వెల పెరుగుతూ లేదా తగ్గుతూ వున్నపుడు ఆ వస్తువు విలువ తెలుసుకొనుటకు

ఉదాహరణ 16 ఒక గ్రామ జనాభా 6250. ఆగ్రామ జనాభా పెరుగుదల రేటు సంవత్సరమునకు 8% గా గుర్తించబడినది. అయిన రెండు సంవత్సరముల తరువాత ఆ గ్రామ జనాభా ఎంత?

సాధన : ఇక్కడ $P = 6250$ $R = 8\%$ $T = 2$ సంవత్సరములు

2 సంవత్సరముల తరువాత ఆ గ్రామజనాభా

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 6250\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 6250\left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 7290$$

ఉదాహరణ 17 ఒక రబ్బరు బంతిని కొంత ఎత్తు నుండి నేలమీదకు విడిచిన అది ప్రతిసారి ముందర ఎగిరిన ఎత్తులో 90% మాత్రమే పైకి ఎగురును. అది ఒక 25మీ ఎత్తయిన భవంతి పై నుండి క్రిందకు వేయబడిన నేలమీద రెండుసార్లు పడి పైకి ఎగిరిన ఎంత ఎత్తు వరకు ఎగురును?

సాధన : బంతి మొదటిసారి పైకి ఎగిరిన మొదట వేసిన ఎత్తులో 90% మాత్రమే పైకి ఎగురును. అనగా ప్రతిసారి పైకి ఎగిరిన 10% ఎత్తు తగ్గును.

కావున $R = -10\%$ తీసుకొని ఈ సమస్యను సాధన చేయవచ్చును.

$P = 25$ మీ మరియు $n = 2$ అయిన

నేలపై రెండు సార్లు పడి పైకి ఎగిరిన అది చేరు ఎత్తు

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 25\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 25\left(\frac{90}{100}\right)^2$$

$= 20.25$ మీటర్లు

అభ్యాసం - 5.3

1. సుధాకర్ తన ఇంటి మరమ్మత్తుల కొరకు బ్యాంకు నుండి ₹ 15,000 అప్పు తీసుకొన్నాడు. అతడు సంవత్సరమునకు 9% వడ్డీరేటు చొప్పున 8 సంవత్సరముల కాలానికి అప్పుతీసుకొనిన, అతడు ప్రతీనెల ఎంతమొత్తము చెల్లించాలి?
2. ఒక టెలివిజన్‌ని ₹ 21,000 లకు కొన్నారు. ఒక సంవత్సరము తరువాత దాని విలువ 5% తగ్గినది (వస్తువుల వాడకము, కాలమును బట్టి వాటి విలువ తగ్గును). ఒక సంవత్సరము తరువాత ఆ టెలివిజన్ విలువ ఎంత?
3. ₹ 8000 లపై 5% వడ్డీ రేటు చొప్పున ప్రతీ సంవత్సరమునకొకసారి వడ్డీ తిరగ కట్టబడిన రెండు సంవత్సరములకు అయ్యే చక్రవడ్డీని మొత్తమును కనుగొనుము.
4. ₹ 6500 లపై మొదటి సంవత్సరము 5% చొప్పున రెండవ సంవత్సరము 6% వడ్డీ రేటు చొప్పున ప్రతీ సంవత్సరము వడ్డీ తిరగకట్టబడిన 2 సంవత్సరములకు అయ్యే చక్రవడ్డీని, మొత్తమును కనుగొనుము.
5. ప్రతిభ ఒక ఋణ సంస్థ (ఫైనాన్స్ కంపెనీ) నుండి మొదటి కారును కొనడానికి ₹ 47000 లను 17% వడ్డీ రేటుతో 5 సంవత్సరములకు సాధారణ వడ్డీకి అప్పు తీసుకొన్నది. అయిన(a) ఆమె ఋణ సంస్థకు ఎంత మొత్తము చెల్లించాలి (b) ఆ మొత్తాన్ని సమాన వాయిదాలలో చెల్లించాలంటే ఆమె ప్రతీ నెల ఎంత మొత్తము చెల్లించాలి.
6. 2011వ సంవత్సరములో హైదరాబాదు నగర జనాభా 68,09,000. ప్రతీ సంవత్సరము 4.7% చొప్పున జనాభా పెరిగిన, 2015 వ సంవత్సరము చివరి నాటికి హైదరాబాదు జనాభా ఎంత అవుతుంది?
7. ₹ 10000 లను $8\frac{1}{2}$% చొప్పున సంవత్సరమున కొకసారి వడ్డీ తిరిగి లెక్కకట్టు పద్ధతిలో పొదుపుచేసిన 1 సంవత్సరము 3 నెలలకాలంలో వచ్చే చక్రవడ్డీని కనుగొనండి.
8. ఆరిఫ్ ఒక బ్యాంక్ నుండి ₹ 80,000 లను వడ్డీరేటు 10% చొప్పున అప్పు తీసుకొనెను. (i) సంవత్సరము మరియు (ii) 6 నెలల తిరిగి వడ్డీ కట్టు కాలవ్యవధులుగా తీసుకొని $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరములకు వడ్డీ కట్టిన ఆ రెండు మొత్తముల భేదమును కనుగొనుము.
9. నేను ప్రసాదు వద్ద నుండి ₹ 12000 లను 6% వడ్డీ రేటు చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి 2 సంవత్సరముల కాలానికి అప్పు తీసుకొన్నాను. నేను అదే మొత్తమును 6% వడ్డీ రేటు చొప్పున సంవత్సరమున కొకసారి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిన చక్రవడ్డీ అప్పు తీసుకొన్నచో ఎంతసొమ్ము అదనంగా చెల్లించవలసి వస్తుంది.
10. ఒక ప్రయోగశాలలో, ప్రయోగమును నిర్వహించి బ్యాక్టీరియాలో పెరుగుదల రేటు గంటకు 2.5% అని గుర్తించినారు. ప్రారంభంలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య 5, 06,000లు వున్నచో రెండు గంటల తరువాత ఆ బ్యాక్టీరియా సంఖ్య ఎంత?
11. కమల బ్యాంకు నుండి స్కూటరు కొనే నిమిత్తం ₹ 26400లను 15% వడ్డీ రేటు చొప్పున సంవత్సరమున కొకసారి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిలో చక్రవడ్డీ అప్పు తెచ్చుకొన్నది. 2 సంవత్సరముల 4 నెలల తరువాత అప్పు మొత్తము తీర్చి వేయవలెనన్న ఆమె చెల్లించవలసిన మొత్తమును కనుగొనుము.
12. భారతి ₹ 12500 లను 12% వడ్డీ రేటు చొప్పున 3 సంవత్సరముల కాలానికి సాధారణ వడ్డీకి అప్పు తీసుకొన్నది. మాధురి అదే మొత్తాన్ని అదేకాలానికి 10% వడ్డీ రేటుతో సంవత్సరమునకొకసారి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిన చక్రవడ్డీ అప్పుతెచ్చినది. ఆ ఇద్దరిలో ఎవరు ఎక్కువ వడ్డీని చెల్లించెదరు? ఎంత ఎక్కువ వడ్డీని చెల్లించెదరు?
13. ₹ 10000 ల విలువ గల యంత్ర సామగ్రిలో తరుగుదల రేటు 5%. అయిన 1 సంవత్సరము తరువాత దాని విలువ ఎంత?

14.. ఒక పట్టణ ప్రస్తుత జనాభా 12లక్షలు. సంవత్సరమునకు 4% చొప్పున జనాభా పెరుగుతూ వుంటే 2 సంవత్సరముల తరువాత ఆ పట్టణ జనాభా ఎంత?

15. ₹ 1000 లను 10% వడ్డీరేటు చొప్పున త్రైమాసికంగా తిరిగి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిన 1 సంవత్సర కాలానికి అయ్యే చక్రవడ్డీని కనుగొనండి.

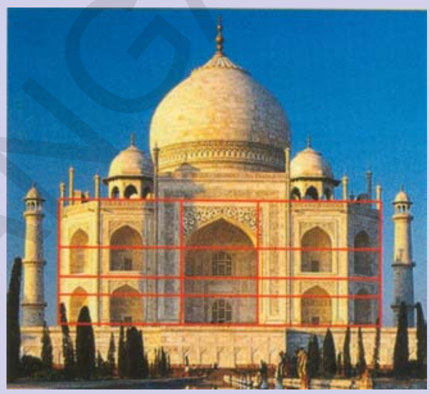
మనం ఏమి చర్చించాం

1. రెండు నిష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా తెలపడానికి ఆ రెండు నిష్పత్తుల పూర్వపదముల లబ్ధము మరియు పరపదముల లబ్ధముల నిష్పత్తి కనుగొంటాము. దీనినే మనం బహుళ నిష్పత్తి అంటాము. a:b, c:d లు రెండు నిష్పత్తులైన వాటి బహుళనిష్పత్తి $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ లేదా ac:bd.
2. శాతము అనగా ఒక సంఖ్యను 100తో పోల్చడం. శాతము అనగా ప్రతీ వందకు లేదా ప్రతీ వందలో అని అర్థము. $100\% = \frac{100}{100}$ శాతము అనేది హారము 100గా గల భిన్నము.
3. డిస్కౌంట్ అనేది ప్రకటన వెలపై తగ్గుదలశాతము. వస్తువు ప్రకటన వెలలో తగ్గింపును తగ్గింపు లేదా డిస్కౌంట్ అంటారు. దీనిని మనం వస్తువు ప్రకటన వెల లేదా జాబితా వెలపై లెక్కిస్తాము.
4. లాభము లేదా నష్టము అనేది ఎల్లప్పుడూ కొన్నవెలపై లెక్కిస్తారు. లాభము అనేది కొన్నవెలపై పెరుగుదల శాతము. నష్టము అనేది కొన్న వెలపై తగ్గుదల శాతము.
5. VAT ను వస్తువు అమ్మకం వెలపై లెక్కిస్తారు. దీనిని బిల్లులో కలిపి లెక్కిస్తారు.
   VAT అనేది అమ్మకం వెలపై పెరుగుదల శాతము.
6. సాధారణ వడ్డీ అనేది అసలుపై పెరుగుదల శాతము
7. సాధారణ వడ్డీ (1) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ దీనిలో P = అసలు T = కాలము(సంవత్సరములలో) R = వడ్డీరేటు
8. మొత్తము = అసలు + వడ్డీ = $P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1+\frac{T \times R}{100}\right)$
9. చక్రవడ్డీ అనేది వడ్డీపై వడ్డీని లెక్కిస్తుంది.
10. సంవత్సరముకొకసారి తిరిగి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిన చక్రవడ్డీ ప్రకారం 'n' సంవత్సరములకు అయ్యే మొత్తము $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$
11. ఎంత కాలము తరువాత వడ్డీని అసలుకు కలుపుతామో దానిని తిరిగి వడ్డీ కట్టెడి కాలవ్యవధి అంటారు. 6 నెలలకొకసారి చక్రవడ్డీని కనుగొనునపుడు సంవత్సరములో తిరిగి వడ్డీ కట్టెడి కాలవ్యవధులు రెండు వుంటాయి. అప్పుడు అర్ధ సంవత్సర వడ్డీరేట్లు సంవత్సర వడ్డీ రేటులో సగముంటుంది.

మీకు తెలుసా?

ప్రాచీన గ్రీసులో, చిత్రకారులు, వాస్తు శిల్పులు (ఆర్కిటెక్ట్స్) ఒక ప్రత్యేకమైన దీర్ఘచతురస్ర ఆకృతి కంటికి యింపుగా కనిపిస్తుందని భావించే వారు. ఇటువంటి దీర్ఘచతురస్రాలకు పొడవు, వెడల్పులనిష్పత్తి సుమారుగా **1.615:1** గా వుంటుంది. ఇది మనకు తెలిసిన "గోల్డ్‌న్‌రేషియో" కి చాలా దగ్గరగా వుంది. క్రీ.పూ. 5వ శతాబ్దిలో గ్రీసులో నిర్మించిన ప్రఖ్యాత "పార్థెనాన్ దేవాలయము" ఈ "గోల్డెన్ రేషియో"కి అనుగుణంగా నిర్మించబడినది.

భారతదేశములో గల తాజ్‌మహల్ కూడా గోల్డెన్ రేషియోతో నిర్మించబడిన నిర్మాణానికి ఉదాహరణ.



సమాన నిష్పత్తుల సంకలనము

1. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\ldots, \frac{100}{200}$ ల మొత్తం ఎంత?

మనం ఇలా సంకలనం చేయవచ్చా?

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots\ldots = \frac{100}{200} \quad = \frac{1+2+3+4+\ldots\ldots+100}{2+4+6+8+\ldots\ldots+200}$$

$$= \frac{5050}{2\times 5050} = \frac{1}{2}$$

$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \ldots\ldots = \frac{p_n}{q_n}$ అయితే $\frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots. + p_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots.. + q_n} = \frac{p_1}{q_1}$

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయితే $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ $\quad (b, d > 0)$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ అయితే $\frac{1+2}{2} = \frac{3+6}{6}$

$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ గా మరియు $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$...... గా రాయవచ్చును.

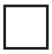
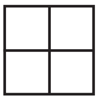
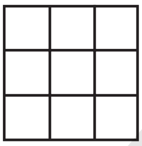
అధ్యాయం 6

వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు

6.0 పరిచయం

ఒక చతురస్రంలోని భుజం పొడవు '1' ప్రమాణం అయిన అది ప్రమాణ చతురస్రం

ప్రమాణ చతురస్రాలను ఉపయోగించి కొన్ని చతురస్రాకారాలను తయారు చేద్దాము.

వ.సం	పటం	భుజం పొడవు ప్రమాణాలు	ఉపయోగించిన ప్రమాణ చతురస్రాల సంఖ్య
1		1	1
2		2	4
3		3	9

ఇదే క్రమములో తరువాత వచ్చే రెండు చతురస్రాలను తయారు చేయండి.

భుజం పొడవు 6 ప్రమాణాలు గల చతురస్రాన్ని తయారు చేయుటకు ఎన్ని ప్రమాణ చతురస్రాలు అవసరమో ఊహించగలవా?

పైన తెలిపిన పట్టికను పరిశీలించిన 1, 4, 9, 16, 25 ... ప్రమాణ చతురస్రాలతో చతురస్రాలను ఏర్పరచగలిగినాము. 1, 4, 9, 16, 25, ... సంఖ్యలను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$1 = 1 \times 1 = 1^2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$16 = 4 \times 4 = 4^2$

25 = ... × ...... = ...

36 = ... × ...... = ...

....

....

$m = n \times n = n^2$ (ఇక్కడ m, n లు పూర్ణసంఖ్యలు)

ప్రతి సందర్భంలో సంఖ్యల కారణాంకాలను పరిశీలించండి.

పై అమరికలో ప్రతి సంఖ్య రెండు సమాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయబడిందని మీరు గమనించి ఉంటారు.

ఇటువంటి సంఖ్యలను పరిపూర్ణ వర్గాలు అంటాము.

క్రింది కొన్ని పరిపూర్ణ వర్గాలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా: (i) $9 = 3\times 3$ (ii) $49 = 7\times 7$ (iii) $1.44 = 1.2\times 1.2$

(iv) $2.25 = 1.5\times 1.5$ (v) $\frac{9}{16}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{4}{12.25}=\frac{2}{3.5}\times\frac{2}{3.5}$

(i) మరియు (ii) సందర్భాలలో పరిపూర్ణవర్గాలైన 9 మరియు 49 లు పూర్ణసంఖ్యలు. ఇటువంటి సంఖ్యలను $m = n \times n$ అని (దీనిలో m, n లు పూర్ణ సంఖ్యలు) పరిపూర్ణ వర్గాలుగా రాస్తాము.

(iii), (iv) మరియు (v), (vi) లలో పరిపూర్ణ వర్గాలు పూర్ణసంఖ్యలు కావు. అందుచే వీటిని వర్గ సంఖ్యలుగా పరిగణించము.

ఒక పూర్ణసంఖ్య 'm' ను 'n^2' (మరొక పూర్ణ సంఖ్య)గా వ్రాయగలిగితే అప్పుడు m ను వర్గ సంఖ్య అనియూ లేదా n యొక్క వర్గము 'm' అని వ్రాస్తాము.

ఖచ్చితవర్గము : ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరొక అకరణీయ సంఖ్య వర్గానికి సమానము.

వర్గసంఖ్య : ఒక పూర్ణసంఖ్య మరొక పూర్ణ సంఖ్య వర్గానికి సమానము.

అందుచే అన్ని వర్గ సంఖ్యలు ఖచ్చిత వర్గాలే కాని అన్ని ఖచ్చిత వర్గాలు వర్గసంఖ్యలు కావు.

ఉదా: 2.25 అనేది ఖచ్చిత వర్గము ఎందువలన అంటే $2.25 = (1.5)^2 = 1.5\times 1.5$, ఇది ఒక పూర్ణసంఖ్య కాదు అందుచే ఇది వర్గ సంఖ్యకాదు.

42 ఒక వర్గ సంఖ్య అగునా ?

మనకు $6^2 = 36$ మరియు $7^2 = 49$ అని తెలుసు. ఒకవేళ 42 వర్గ సంఖ్య అయితే అది తప్పనిసరిగా ఒక పూర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గము మరియు 6, 7 ల మధ్య ఉండాలి. కాని 6 మరియు 7 ల మధ్య ఎటువంటి పూర్ణసంఖ్య లేనందున 42 వర్గ సంఖ్య కాదు.

క్రింది పట్టికలోని వర్గ సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

పట్టికలో చుట్టబడిన సంఖ్యలు కాకుండా ఇంకేమైన వర్గ సంఖ్యలు కలవా ?

ఇవి చేయండి:

1. క్రింది సంఖ్యల మధ్య నున్న వర్గసంఖ్యలు ఏవి (i)100 మరియు 150 (ii) 150 మరియు 200
2. 56 పరిపూర్ణ వర్గమా? కారణాలు తెలపండి?

6.1 వర్గసంఖ్యల ధర్మాలు

క్రింది పట్టికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.

సంఖ్య	వర్గం
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	....
7	49
8	64
....	81
10	100

సంఖ్య	వర్గం
11	121
12	144
13	....
14	196
15	225
16	....
17	289
18	324
19	361
20	400

సంఖ్య	వర్గం
21	441
22	....
23	529
....	576
25	625
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

పై పట్టికలోని వర్గ సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలను గమనించండి. వాటన్నింటి ఒకట్ల స్థానంలో 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 ఉండును. ఏది కూడ ఒకట్ల స్థానంలో 2, 3, 7 లేదా 8 తో అంతం కాలేదు.

కావున ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 2, 3, 7 లేదా 8 ఉంటే అవి వర్గ సంఖ్యలు కావు.

మరి 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 లు ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న సంఖ్యలన్నియూ వర్గ సంఖ్యలు అనుట సరియేనా? ఆలోచించండి.

ప్రయత్నించండి:

1. క్రింది వాటిలో ఏవి వర్గ సంఖ్యలు అవుతాయో ఊహించండి. పై పట్టిక ఆధారంగా సరిచూడండి.

(i) 84 (ii) 108 (iii) 271 (iv) 240 (v) 529

1, 9, 11, 19, 21 సంఖ్యలకు వర్గాలు వ్రాయండి.

పై సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెకు, దాని వర్గంలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెకు గల సంబంధాన్ని గుర్తించారా?

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 1 లేదా 9 ఉన్నట్లయితే దాని వర్గంలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఎల్లప్పుడు 1 ఉంటుంది.

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 4 లేదా 6 ఉన్నట్లయితే దాని వర్గంలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఎల్లప్పుడు 6 ఉంటుంది.

అదేవిధంగా

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్లస్థానంలో 0,2,3, 5, 7 మరియు 8 ఉన్నట్లయితే దాని వర్గంలోని ఒకట్లస్థానంలోని అంకె ఏవిధంగా ఉంటుందో అన్వేషించండి.

ప్రయత్నించండి:

1. క్రింది వర్గ సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలో 1 వచ్చే సంఖ్యలు ఏవి?

   (i) 126^2 (ii) 179^2 (iii) 281^2 (iv) 363^2

2. క్రింది వర్గసంఖ్యలలో ఒకట్ల స్థానంలో 6 వచ్చే సంఖ్యలు ఏవి?

   (i) 116^2 (ii) 228^2 (iii) 324^2 (iv) 363^2

ఆలోచించండి, చర్చించి - రాయండి:

"సరిసంఖ్యల వర్గం సరిసంఖ్య మరియు బేసి సంఖ్యల వర్గం బేసిసంఖ్య" అని వైష్ణవి చెప్పింది. దానిని నీవు అంగీకరిస్తావా? కారణం చెప్పండి.

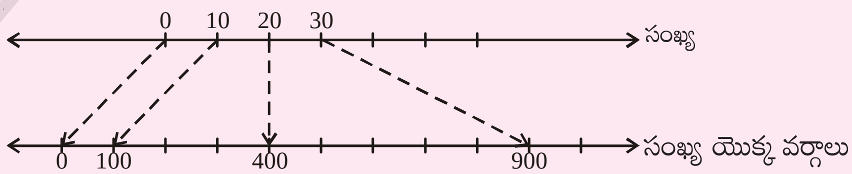
క్రింది పట్టికను పరిశీలించి పూరించండి.

సంఖ్యలు	వర్గంలోని అంకెల సంఖ్య	
	కనిష్ఠంగా	గరిష్ఠంగా
1-9	1	2
10-99	....	4
100-999	5	....
1009-9999	7	8
n అంకెలు గల సంఖ్య	....	....

ప్రయత్నించండి:

1. క్రింది సంఖ్యల వర్గాలలో ఎన్ని అంకెలు ఉంటాయో ఊహించండి.

   (i) 72 (ii) 103 (iii) 1000

2. 

   27 ; 20 మరియు 30 కి మధ్య ఉంటుంది.

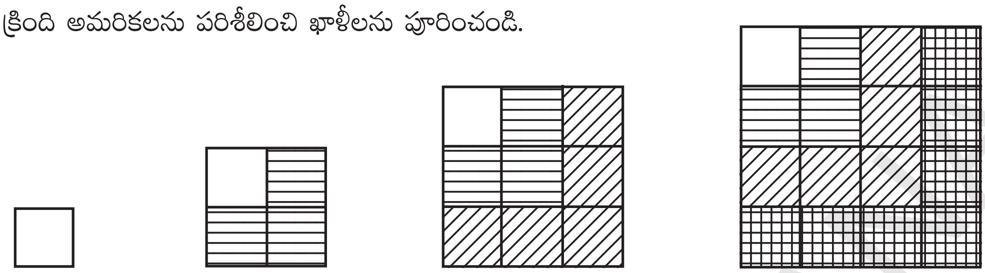
   27^2, 20^2 మరియు 30^2 కి మధ్య ఉంటుంది.

   అయిన క్రింది వాటిలో 27^2 యొక్క విలువ ఏది?

   (i) 329 (ii) 525 (iii) 529 (iv) 729

6.2. కొన్ని ఆసక్తికరమైన చతురస్ర అమరికలు

1. క్రింది అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.



$1 = 1^2$ $\quad$ $1+3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ $\quad$ $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \ldots\ldots\ldots = (\ )^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \ldots\ldots\ldots = (\ )^2$

పై దాని నుండి మొదటి 'n' బేసిసహజ సంఖ్యల మొత్తం. 'n^2' అని సాధారణీకరించవచ్చు.

2. క్రింది అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరింపుము.

$(11)^2 = 121$

$(101)^2 = 10201$

$(1001)^2 = 1002001$

$(10001)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1000001)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. క్రింది అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరింపుము.

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$111111^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

> పాలిండ్రామ్ అనగా ఒక పదం, వాక్యం, లేదా సంఖ్యను ఎటువైపు నుండి చదివినా ఒకే విధంగా ఉంటుంది. ఉదా. నందసదనం, జలజ, 15651

పై సంఖ్యలను పాలిండ్రోమ్ సంఖ్యలు లేదా ద్విముఖ సంఖ్యలు అంటారు.

4. క్రింది అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరింపుము.

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + (\ )^2 = 21^2$

$5^2 + (\ )^2 + 30^2 = (\ )^2$

$6^2 + 7^2 + (\ )^2 = (\ )^2$

> వర్గాల మొత్తాలను పరిశీలించండి.
>
> వర్గాల భూముల మధ్య ఏదైన సంబంధాన్ని గమనించారా?
> మూడవ వర్గం యొక్క భూమికి, మరియు మొదటి, రెండవ వర్గాల భూముల మధ్య సంబంధం ఏమి?
>
> ఫలిత వర్గం యొక్క భూమి, మూడవ వర్గం భూమికి గల సంబంధం ఏమి?

5. అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.

$3^2 = 9 = 4 + 5$ $\qquad \left(\dfrac{3^2-1}{2} + \dfrac{3^2+1}{2}\right)$

$5^2 = 25 = 12 + 13$ $\qquad \left(\dfrac{5^2-1}{2} + \dfrac{5^2+1}{2}\right)$

$7^2 = 49 = 24 + 25$ $\qquad (\qquad + \qquad)$

$11^2 = 121 = \ldots.. + \ldots..$ $\qquad \left(\dfrac{11^2-1}{2} + \dfrac{11^2+1}{2}\right)$

$15^2 = 225 = \ldots.. + \ldots..$ $\qquad (\qquad + \qquad)$

పై అమరికలను నుండి "ఏదైన ఒక బేసి సంఖ్య n యొక్క వర్గాన్ని రెండు వరుస సంఖ్యలు మొత్తంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\left(\frac{n^2-1}{2} + \frac{n^2+1}{2}\right)$$

6. **రెండు వరుస వర్గ సంఖ్యల మధ్యగల పూర్ణసంఖ్యలు**

క్రింది పట్టికను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.

వరుసపూర్ణసంఖ్యల వర్గాలు	వరుస పూర్ణ సంఖ్యల వర్గాల మధ్య గల పూర్ణసంఖ్యలు	సంబంధం
$1^2 = 1;\ 2^2 = 4$	2, 3 (1 మరియు 4 ల మధ్యనున్నసంఖ్యలు 2)	2×మొదటివర్గసంఖ్య 1 భూమి, (2×1=2)
$2^2 = 4;\ 3^2 = 9$.	5, 6, 7, 8 (4 మరియు 9 లమధ్యనున్న సంఖ్యలు 4)	2× మొదటివర్గసంఖ్య 2 భూమి, (2×2=4)
$3^2 = 9;\ 4^2 = 16$	10,11,12,13,14,15 (9 మరియు 16 ల మధ్య నుండి పూర్ణసంఖ్యలు 6)	2× మొదటివర్గసంఖ్య 3 భూమి (2×3=6)
$4^2 = 16;\ 5^2 = 25$	....	2× మొదటివర్గసంఖ్య 4 భూమి, (2×4=8)
$5^2 = 25;\ 6^2 = 36$	....	....
....	....	....

పై పట్టిక నుండి రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల వర్గాలకు, వాటి మధ్య నున్న పూర్ణ సంఖ్యకు ఏదైన సంబంధాన్ని గమనించారా?

పట్టిక సహాయంతో n^2 మరియు $(n + 1)^2$ మధ్యనున్న వర్గసంఖ్యలు కాని పూర్ణసంఖ్యలు ఎన్ని ?

n^2 మరియు $(n + 1)^2$ లమధ్య '2n' వర్గ సంఖ్యలు కాని పూర్ణసంఖ్యలుంటాయి.

ఇది చేయండి :

1. 9^2 మరియు 10^2 మధ్య ఎన్ని పూర్ణసంఖ్య లున్నాయి ?
2. 15^2 మరియు 16^2 మధ్య ఎన్ని పూర్ణసంఖ్య లున్నాయి?

ప్రయత్నించండి :

9^2 మరియు 11^2 మధ్య 37 పరిపూర్ణ వర్గంలేని సంఖ్యలు ఉన్నాయని రేహాన్ చెప్పాడు. ఇది సరియేనా? కారణం తెల్పండి.

అభ్యాసం - 6.1

1. క్రింది సంఖ్యల వర్గాలలో, ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలువేవి?

   (i) 39 (ii) 297 (iii) 5125 (iv) 7286 (v) 8742

2. క్రింది సంఖ్యలలో పరిపూర్ణ వర్గాలు ఏవి ?

   (i) 121 (ii) 136 (iii) 256 (iv) 321 (v) 600

3. క్రింది సంఖ్యలు, పరిపూర్ణ వర్గాలు కావు. కారణాలు తెల్పండి.

   (i) 257 (ii) 4592 (iii) 2433 (iv) 5050 (v) 6098

4. క్రింది సంఖ్యల వర్గాలు సరిసంఖ్యలా? లేదా బేసి సంఖ్యలా?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 8204 (iv) 17779 (v) 99998

5. క్రింది సంఖ్యల వర్గాల మధ్య ఎన్ని పూర్ణ సంఖ్యలుంటాయి ?

   (i) 25; 26 (ii) 56; 57 (iii) 107;108

6. కూడకుండానే కింది వాటి మొత్తాన్ని కనుగొనండి.

   (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$

   (ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 =$

   (iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 =$

6.3 పైథాగోరియన్ త్రికాలు (Pythagorean Triplets)

క్రింది వాటిని గమనించండి.

(i) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(ii) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

సంఖ్యలు (3, 4, 5) మరియు (5, 12, 13) పైథాగోరియన్ త్రికాలకు ఉదాహరణలు.

a, b, c లు మూడు ధనపూర్ణసంఖ్యలు అయిన $a^2 + b^2 = c^2$ అయితే a, b, c లను పైథాగోరియన్ త్రికాలు అంటారు.

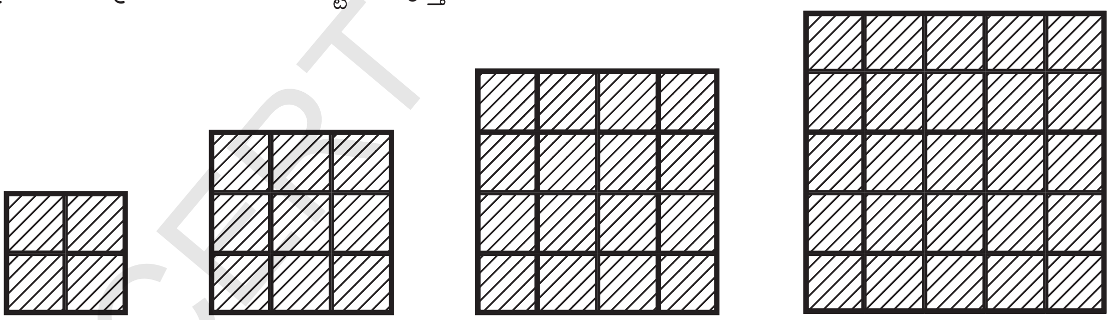
a,b,c లకు 1 తప్ప వేరే ఉమ్మడి కారణాంకం లేకపోతే (a,b,c) ని ప్రాథమిక త్రికం అంటాము.

ఇవి చేయండి :

1. క్రింది సంఖ్యలు పైథాగోరియన్ త్రికాలు అవుతాయోమో సరిచూడండి.
   (i) 2, 3, 4 (ii) 6, 8, 10 (iii) 9, 10, 11 (iv) 8, 15, 17
2. ఒక పైథాగోరియన్ త్రికాన్ని తీసుకొని వాటి గుణిజాలను వ్రాయండి. గుణిజాలతో ఏర్పడిన త్రికాలు పైథాగోరియన్ త్రికాలు అవుతాయేమో సరిచూడండి.

6.4 వర్గమూలాలు

క్రింది చతురస్రాలను పరిశీలించి పట్టికను పూర్తి చేయండి.



A = 4 A = 9 A = 16 A = 25

చతురస్ర వైశాల్యం (సెం.మీ^{2}లలో) (A)	చతురస్ర భుజం (సెం.మీ) (S)
4 = 2 × 2	2
9 = 3 × 3	3
16 = 4 × 4	_____
25 = 5 × 5	_____

ఒక చతురస్రంలోని అడ్డు/నిలువు వరుసలో ఉన్న ప్రమాణ చతురస్రాల సంఖ్యయే; ఆ చతురస్రం యొక్క భుజం పొడవు.

చతురస్రం వైశాల్యం మరియు దాని భుజముల మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని గమనించావా?

మనకు చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం × భుజం = (భుజం)^2 అని తెలుసు

ఒకవేళ చతురస్రం వైశాల్యం 169 సెం.మీ^{2} అయిన దాని భుజమెంత?

చతురస్ర భుజం పొడవు x సెం.మీ అనుకొంటే

$\Rightarrow$ $169 = x^2$

చతురస్రభుజం కనుగొనాలంటే, 169 ఏ సంఖ్య యొక్క వర్గమో కనుగొనాలి.

మనకు $169 = 13^2$ అని తెలుసు. కాబట్టి చతురస్రభుజం పొడవు = 13 సెం.మీ.

ఒక వర్గ సంఖ్యను సమాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాసిన, ఆకారణాంకాన్ని వర్గసంఖ్యకు వర్గమూలం అంటారు. కావున ఒక వర్గ సంఖ్యను రెండు సమాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసినపుడు, అందులో ఒక కారణాంకాన్ని ఆ వర్గ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం అంటారు. అంటే 169 యొక్క వర్గమూలం 13 అవుతుంది. దీనిని $\sqrt{169} = 13$ గా రాస్తాం. ($\sqrt{}$ వర్గమూలంనకు గుర్తు). కాబట్టి వర్గమూలం అనునది వర్గంనకు వ్యతిరేక పరిక్రియ.

ఉదాహరణ 1: $3^2 = 9$ కావున 9 యొక్క వర్గమూలం 3 ($\sqrt{9} = 3$)

$4^2 = 16$ కావున 16 యొక్క వర్గమూలం 4 ($\sqrt{16} = 4$)

$5^2 = 25$ కావున 25 యొక్క వర్గమూలం 5 ($\sqrt{25} = 5$)

$y^2 = x$ అయిన x యొక్క వర్గమూలం y $\left(\sqrt{x} = y\right)$

> 25 అనునది 5 మరియు −5 ల వర్గము. 25 యొక్క వర్గమూలాలు −5 మరియు 5 లు కాని ఈ అధ్యాయంలో ధనవర్గమూలాన్ని మాత్రమే వాడుచున్నాము. ధన వర్గమూలాన్ని ప్రధాన వర్గ మూలం అంటాము.
> దీనిని ఈ విధంగా రాస్తాము
> $\therefore \sqrt{25} = 5.$

ఉదాహరణ 2:
1. $\sqrt{4} = 2$ ఎందుకనగా $2^2 = 4$
2. $\sqrt{16} = 4$ ఎందుకనగా $4^2 = 16$
3. $\sqrt{225} = 15$ ఎందుకనగా $15^2 = 225$ మొదలగునవి.

క్రింది పట్టికను పూరించండి.

వర్గం	వర్గమూలం
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} =$ ……..
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} =$ ……..
$7^2 =$ …......	$\sqrt{} =$ ……..
$8^2 =$ ……..	$\sqrt{} =$ ………
$9^2 =$ ……..	$\sqrt{} =$ ………
$10^2 =$ ……..	$\sqrt{} =$ ………

6.5 వరుసబేసి సంఖ్యల వ్యవకలనం ద్వారా వర్గమూలం కనుగొనుట

ప్రతి వర్గసంఖ్యను 1తో మొదలుకొని వరుసగా వచ్చు బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయవచ్చని మనం తెలుసుకున్నాము..

పరిశీలించుము, $1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

పై అమరిక యొక్క వ్యతిరేక క్రమములో వర్గమూలంను కనుగొంటాము.

ఉదా. $\sqrt{49}$ విలువ కనుగొనుట

సోపానం 1 $49 - 1 = 48$ (మొదటి బేసి సంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం 2 $48 - 3 = 45$ (రెండవ బేసి సంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం 3 $45 - 5 = 40$ (మూడవ బేసి సంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం 4 $40 - 7 = 33$

సోపానం 5 $33 - 9 = 24$

సోపానం 6 $24 - 11 = 13$

సోపానం 7 $13 - 13 = 0$

గమనించండి.
$1+3+5+7+9+11+13 = 7^2 = 49$
$49 - [1+3+5+7+9+11+13] = 0$
$\therefore$ 49 పరిపూర్ణ సంఖ్య

1 నుండి మొదలుకొని 7 వరుస బేసిసంఖ్యలు, 49 నుండి తీసివేయడం ద్వారా 0 వచ్చింది (7వ సోపానం).

$$\therefore \sqrt{49} = 7$$

సూచన : పై పద్ధతిలో చివరగా సూన్నా రానట్లయితే ఇచ్చిన సంఖ్య పరిపూర్ణ వర్గం కాదు.

ఇది చేయండి :

(i) వరుస బేసి సంఖ్యల వ్యవకలనం ద్వారా క్రింది సంఖ్యలు (పరిపూర్ణ) వర్గ సంఖ్యలు అవుతాయో, లేదో కనుగొనండి.

(i) 55 (ii) 90 (iii) 121

(పరిపూర్ణ) వర్గ సంఖ్యల వర్గమూలాలను పునరావృత వ్యవకలనం ద్వారా సులభంగా కనుగొనవచ్చు. కాని ఈ పద్ధతి 625, 729.......... లాంటి పెద్ద సంఖ్యల వర్గ మూలాలు కనుగొనడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. ఇటువంటి పెద్ద సంఖ్యల వర్గమూలాలు కనుగొనడానికి కొన్ని సులభమైన పద్ధతులను తెలుసుకుందాం.

ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనడానికి ప్రధానంగా రెండు పద్ధతులు కలవు. అవి

(i) ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి

(ii) భాగాహార పద్ధతి

6.6 ప్రధానకారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలాన్ని కనుగొనుట

2	484
2	242
11	121
11	11
	1

484 యొక్క వర్గమూలాన్ని ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొందాము.

సోపానం 1: 484 ని ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించి

$$484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$$

సోపానం 2: సమాన కారణాంకాలను జతలుగా వ్రాయండి.

$$484 = (2 \times 2) \times (11 \times 11)$$

సోపానం 3: ప్రతి జత సమానకారణాంకాల నుండి ఒక కారణాంకాన్ని తీసుకొనగా

$$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$$

కావున 484 యొక్క వర్గమూలం 22.

$$484 = (2 \times 11) \times (2 \times 11) = (2 \times 11)^2$$
$$\sqrt{484} = \sqrt{(2\times 11)^2}$$
$$= 2 \times 11$$
$$= 22$$

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 3 : 1296 వర్గమూలాన్ని ప్రధానకారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.

సాధన : 1296 ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించగా

2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$$1296 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$$

$$\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

ఉదాహరణ 4 : 2025 వర్గమూలం కనుగొనండి.

సాధన : 2025 ని ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించిన

5	2025
5	405
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$$2025 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (5 \times 5)$$

$$\sqrt{2025} = 3 \times 3 \times 5$$

$$\therefore \sqrt{2025} = 45$$

ఉదాహరణ 5: 720 ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

సాధన : 720 ని ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించిన

$720 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$

2, 2, 3 లకు జతలు ఉన్నాయి. కాని 5 కి జత లేదు.

కావున ఇచ్చిన సంఖ్యను 5 చే గుణించిన పరిపూర్ణవర్గం అగును.

$\therefore$ పరిపూర్ణ వర్గం $= 720 \times 5 = 3600$

2	720
2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

ఉదాహరణ 6: 6000ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును. ఫలిత సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం కనుగొనుము.

సాధన : 6000 ని ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించిన

$6000 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{5 \times 5} \times 5$

పై విభజనలో 2, 2, 5 లు జతలుగా కారణాంకాలు ఉన్నాయి. 3 మరియు 5 లు అవే కారణాంకాలు జతలుగా లేవు.

కావున $3 \times 5 = 15$ చే 6000ని భాగించగా పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

పరిపూర్ణవర్గం $= 6000 \div 15 = 400$

2	6000
2	3000
2	1500
2	750
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

కావున 400 యొక్క వర్గమూలం

$$\sqrt{400} = \sqrt{(2\times2)\times(2\times2)\times(5\times5)}$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$= 20$$

2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

అభ్యాసము - 6.2

1. ప్రధానకారణాంకాల పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రింది వాటి వర్గమూలాలు కనుగొనుము.

   (i) 441 (ii) 784 (iii) 4096 (iv) 7056

2. 3645 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.
3. 2400 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించగా పరిపూర్ణ వర్గం అగును. వచ్చిన ఫలిత సంఖ్య వర్గమూలం కనుగొనుము.
4. 7776 ఏకనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించగా పరిపూర్ణ వర్గం అగును.
5. ఒక తోటలో ఉన్న 1521 చెట్లు కొన్ని వరుసలలో కలవు. ప్రతి వరుసలో ఉన్న చెట్ల సంఖ్య, వరుసల సంఖ్యకు సమానం. అయిన ప్రతి వరుసలోని చెట్ల సంఖ్య, తోటలోని వరుసల సంఖ్య కనుక్కోండి.
6. ఒక పాఠశాలలో విద్యార్థుల నుండి ఫీజు రూపంలో ₹ 2601 వసూలు చేశారు. పాఠశాలలోని విద్యార్థుల సంఖ్య, ప్రతి విద్యార్థి చెల్లించిన ఫీజుకి సమానం అయిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?
7. రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 1296. వాటిలో మొదటి సంఖ్య, రెండవ సంఖ్యకు 16 రెట్లు అయిన ఆ రెండు సంఖ్యలు ఏవి?
8. 7921 మంది సైనికులు ఒక సమావేశమందిరం (ఆడిటోరియం) లో కొన్ని వరుసలలో కూర్చొని ఉన్నారు. ప్రతి వరుసలోని సైనికుల సంఖ్య వారు కూర్చున్న వరుసల సంఖ్యకు సమానం. అయిన ప్రదర్శన శాలలో ఉన్న వరుసల సంఖ్య ఎంత ?
9. ఒక చతురస్ర పొలం వైశాల్యం 5184 మీ^{2}. చతురస్రపు చుట్టుకొలతకు సమాన చుట్టూకొలత గల దీర్ఘచతురస్రం కలదు. దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పుకు రెట్టింపు అయిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం ఎంత?

6.7 భాగాహార పద్ధతిన వర్గమూలం కనుగొనుట

మనం ప్రధానకారణాంకాల విభజన పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలాన్ని కనుగొనడం నేర్చుకొన్నాము. పెద్దసంఖ్యలకు ఈ పద్ధతి దీర్ఘమైనది మరియు కష్టమైనది. అందువలన ఈ సమస్యను అధిగమించడానికి వర్గమూలాలు కనుగొనుటలో భాగాహార పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు.

ఇప్పుడు మనం 784 వర్గమూలాన్ని భాగహార పద్ధతిలో కనుగొందాం.

$$\begin{array}{|c|} 7\overline{84} \end{array}$$

సోపానం 1 : ఇచ్చిన సంఖ్యను ఒకట్ల స్థానం మొదలుకొని, రెండేసి సంఖ్యల సమూహాలుగా విభజించండి. ఆ జతపైన (అడ్డుగీత లేదా బార్) ప్రక్కన చూపినట్లు వ్రాయండి.

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & 7\overline{84} & 2 \end{array}$$

సోపానం 2 : మొదటి జత లేదా అంకె కు (ఎడమ నుండి కుడికి) సమానమైన లేదా తక్కువైన పరిపూర్ణ వర్గసంఖ్యను కనుగొనండి. దాని వర్గమూలాన్ని విభాజకంలో, భాగఫలంలో వ్రాయండి.

$$\begin{array}{c|l|c} 2 & 7\overline{84} & 2 \\ & 4 & \\ \hline & 3 & \end{array}$$

సోపానం 3 : విభాజకం మరియు భాగఫలాల లబ్ధాన్ని$(2 \times 2 = 4)$ మొదటి జత లేదా అంకె నుండి తీసివేయండి. (i.e. $7 - 4 = 3$)

$$\begin{array}{c|l|c} 2 & 7\overline{84} & 2 \\ & -4 & \\ \hline & 384 & \end{array}$$

సోపానం 4 : శేషానికి కుడివైపున రెండవ జతను వ్రాయాలి. (384) ఇది కొత్త విభాజ్యం అవుతుంది.

$$\begin{array}{c|l|c} 2 & 7\overline{84} & 2 \\ & -4 & \\ \hline 4\square & 384 & \end{array}$$

సోపానం 5 : విభాజ్యానికి సరిపోయే కొత్త విభాజకం కొరకు, భాగఫలాన్ని రెట్టింపు చేసి దాని ప్రక్క ఖాళీగా ఒక గడిని వ్రాయండి. (i.e $2 \times 2 = 4$)

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & \overline{7}\,\overline{84} & 28 \\ & -4 & \\ \hline 4\boxed{8} & 384 & \\ & 384 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

సోపానం 6 : ఖాళీగడిలో వ్రాయడానికి ఒక అంకెను ఊహించండి. ఈ అంకెతో ఏర్పడిన కొత్త విభాజకం మరియు అనుకున్న అంకెలలబ్ధం, విభాజ్యానికి సమానంగా లేదా తక్కువగా ఉండేటట్లు ఒక అంకెను ఎన్నుకోండి. భాగించి శేషాన్ని రాబట్టండి ($48 \times 8 = 384$).

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & \overline{7}\,\overline{84} & 28 \\ & -4 & \\ \hline 48 & 384 & \\ & -384 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

సోపానం 7 : తీసివేసిన వచ్చు శేషం 0.

తుదిభాగఫలం 28, 784 యొక్క వర్గమూలం

$$\therefore \sqrt{784} = 28$$

ఆలోచించండి, చర్చించండి.

క్రింది భాగాహారాలను పరిశీలించండి. పై ఉదాహరణలో విభాజకంలో 48 లో $\boxed{8}$ ఎందుకు తీసుకొన్నామో సకారణంగా తెలపండి?

$$\begin{array}{r|l} 4 & 384 \;\; (9 \\ & 36 \\ \hline & 24 \\ & 81 = 9^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 384 \;\; (8 \\ & 32 \\ \hline & 64 \\ & 64 = 8^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 384 \;\; (7 \\ & 28 \\ \hline & 104 \\ & 49 = 7^2 \end{array}$$

మరిన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 7: 1296 యొక్క వర్గమూలం ఎంత?

సాధన :

సోపానం 1 $\quad \left|\overline{12}\,\overline{96}\right|$

సోపానం 2

$$\begin{array}{r|l|l} 3 & \overline{12}\;\overline{96} & 3 \\ & 9 & \\ \hline \end{array}$$

సోపానం 3

$$\begin{array}{r|l|l} 3 & \overline{12}\;\overline{96} & 3 \\ & -9 & \\ \hline \end{array}$$

సోపానం 4

$$\begin{array}{r|l|l} 3 & \overline{1296} & 3 \\ & -9 & \\ \hline 6 & 396 & \end{array}$$

సోపానం 5

$$\begin{array}{r|l|l} 3 & \overline{12}\;\overline{96} & 36 \\ & -9 & \\ \hline 66 & 396 & \\ & -396 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

పరిశీలించండి

$$\begin{array}{r|l} 6 & 396 \;\; (6 \\ & 36 \\ \hline & 36 \\ & 36 = 6^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

ఉదాహరణ 8: 8281 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనుము.

సాధన :

9	$\overline{82}\ \overline{81}$	91
	-81	
181	181	
	-181	
	0	

$\therefore\ \sqrt{8281} = 91$

పరిశీలించండి

$$\begin{array}{r|l}
18 & 181\ (1 \\
 & 18 \\
\hline
 & 1 \\
 & 1 = 1^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

ఉదాహరణ 9: నాల్గు అంకెలుగల అతిపెద్ద వర్గసంఖ్యను వ్రాయండి.

సాధన : నాలుగు అంకెలు గల అతి పెద్ద సంఖ్య 9999

భాగహార పద్ధతిని 9999 వర్గమూలం కనుగొనగా

శేషం =198 అనగా 9999 కంటె 198 తక్కువగా నున్న సంఖ్య పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

అనగా 9999 నుండి 198 తీసివేయగా, పరిపూర్ణవర్గం వచ్చును.

$\therefore$ 9999 – 198 = 9801 పరిపూర్ణ వర్గం.

$\therefore$ 9801 మనకు కావలసిన పరిపూర్ణ వర్గం.

9	$\overline{99}\ \overline{99}$	99
	-81	
189	18 99	
	-17 01	
	1 98	

ఉదాహరణ 10: 4215 నుండి ఏ, కనిష్ఠ సంఖ్యను తీసివేసిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

సాధన : భాగహారపద్ధతిన వర్గమూలం కనుగొనిన

శేషం = 119

అనగా 4215 నుండి 119 తీసివేయగా వర్గసంఖ్య వస్తుంది.

అందువలన, తీసివేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య =119.

6	$\overline{42}\ \overline{15}$	64
	-36	
1	6 15	
124	-4 96	
	1 19	

6.8 భాగహారపద్ధతిని ఉపయోగించి దశాంశాల వర్గమూలం కనుగొనుట

ఒక ఉదాహరణ $\sqrt{17.64}$ ద్వారా చూద్దాం.

సోపానం 1: ఇంతకు ముందు చర్చించిన విధంగానే పూర్ణంక భాగం అయిన 17 పై బార్ గీయండి. దశాంశ భాగంలో రెండేసి సంఖ్యల సమూహం (ఎడమ నుండి కుడికి) బార్‌ని గీయండి.

$|\overline{17}.\overline{64}|$

సోపానం 2: ఏ గరిష్ఠ సంఖ్య (అనగా 4) వర్గం పూర్ణాంక భాగం(అనగా 17) నకు సమానంగా లేదా అంతకన్నా తక్కువగా ఉంటుందో ఆ సంఖ్యను కనుక్కోండి.

4 ని విభాజకంగా 17ని విభాజ్యంగా తీసుకొని శేషాన్ని (అనగా 1ని) రాబట్టండి.

4	$\overline{17}\ .\ \overline{64}$	4
	-16	
	1	

సోపానం 3: తరువాత రెండంకెల జత (64) ను శేషం నకు కుడివైపున వ్రాయగా వచ్చు కొత్త విభాజ్యం 164.

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
	1.64	

సోపానం 4: భాగఫలాన్ని రెట్టింపు చేయగా వచ్చు 8కి కుడివైపున ఖాళీ గడిని ఉంచండి. 64 అనునది దశాంశభాగం కావున భాగఫలంలో దశాంశాన్ని ఉంచండి.(అనగా. 4)

$$\begin{array}{r|l|l}
4 & \overline{17}.\overline{64} & 4 \\
 & -16 & \\ \hline
8\square & -\ 164 &
\end{array}$$

సోపానం 5: ఖాళీలో వ్రాయడానికి ఒక అంకె ఊహించండి. ఈ అంకెతో ఏర్పడిన కొత్త విభాజకం మరియు ఆ అంకె లబ్ధం విభాజ్యానికి సమానంగా (164) లేదా అంతకన్నా తక్కువగా ఉండేటట్లు ఎన్నుకోండి.

$$\begin{array}{r|r|l}
4 & \overline{17}.\overline{64} & 4.2 \\
 & -16 & \\ \hline
8\boxed{2} & 164 & \\
 & -164 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

సోపానం 6: శేషం “0” మరియు ఇంకా అంకెల జతలు లేవు

కావున $\sqrt{17.64} = 4.2$

ఇప్పుడు మరిన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 11: 42.25 వర్గమూలంను భాగాహారపద్ధతిలో కనుగొనుము.

సాధన : సోపానం 1 : $\left|\overline{42}\ .\ \overline{25}\right|$

సోపానం 2 :

$$\begin{array}{r|l|l}
6 & \overline{42}.\overline{25} & 6 \\
 & -36 & \\ \hline
 & \ \ 6 &
\end{array}$$

సోపానం 3 :

$$\begin{array}{r|r|l}
6 & \overline{42}.\overline{25} & 6.5 \\
6 & -36 & \\ \hline
125 & 625 & \\
 & -625 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$.

ఉదాహరణ 12: $\sqrt{96.04}$ వర్గమూలం ఎంత?

సాధన :

$$\begin{array}{r|l|l}
9 & \overline{96}.\overline{04} & 9.8 \\
9 & -81 & \\ \hline
188 & 1504 & \\
 & -1504 & \\ \hline
 & \ \ 0 &
\end{array}$$

$\therefore \sqrt{96.04} = 9.8$

6.9 పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యల వర్గమూలాలను అంచనా వేయుట

ఇంతవరకు మనం పరిపూర్ణ వర్గాల వర్గమూలాలను కనుగొనుట నేర్చుకొన్నాం, పరిపూర్ణ వర్గాలు కాని సంఖ్యలకు ఖచ్చితమైన వర్గమూలాలు ఉండవు.

అటువంటి సందర్భాలలో వాటి వర్గమూలాలను ఏవిధంగా అంచనావేస్తామో చూద్దాం.

ఇప్పుడు $\sqrt{300}$ యొక్క విలువకి దగ్గర పూర్ణాంకాన్ని అంచనా వేద్దాం.

300, వర్గసంఖ్యలయిన 100 మరియు 400 మధ్య ఉంటుంది.

$\therefore \ 100 < 300 < 400$

$10^2 < 300 < 20^2$

$10 < \sqrt{300} < 20$

ఇంకా ఈ సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలకు దగ్గరగా లేవు. $17^2 = 289$, $18^2 = 324$

కావున $289 < 300 < 324$

$17 < \sqrt{300} < 18$

300, 324 కంటే 289 కి దగ్గరగా ఉంది.

కావున $\sqrt{300} = 17$ గా అంచనా వేయవచ్చు.

అభ్యాసం - 6.3

1. భాగాహార పద్ధతిన వర్గమూలాలను కనుక్కోండి.

   (i) 1089 (ii) 2304 (iii) 7744 (iv) 6084 (v) 9025

2. క్రింది దశాంశాలకు వర్గమూలాలలను కనుక్కోండి.

   (i) 2.56 (ii) 18.49 (iii) 68.89 (iv) 84.64

3. 4000 నుండి ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను తీసివేసిన పరిపూర్ణవర్గం అగును.

4. ఒక చతురస్ర వైశాల్యం 4489 సెం.మీ^{2} అయిన భుజం పొడవు ఎంత?

5. ఒక తోటమాలి 8289 మొక్కలను చతురస్రాకారంలో కొన్ని వరుసలలో నాటాడు. నాటిన తర్వాత 8 మొక్కలు మిగిలిన, ప్రతి వరుసలో నాటిన మొక్కలు ఎన్ని ?

6. కనిష్ఠ నాలుగు అంకెల పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యను కనుగొనుము ?

7. 6412 కు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను కలిపిన పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య అగును.

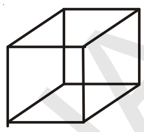
8. క్రింది వాటి వర్గమూలాలను దగ్గరి పూర్ణాంకానికి అంచనావేసి చెప్పండి.

   (i) $\sqrt{97}$ (ii) $\sqrt{250}$ (iii) $\sqrt{780}$

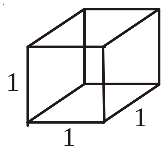
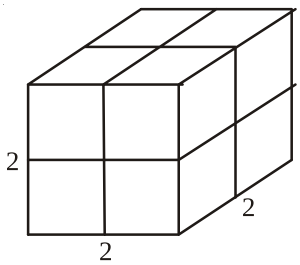
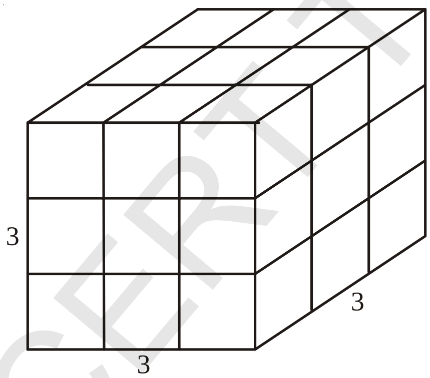
ఘనాలు మరియు ఘనమూలాలు

6.10 ఘనసంఖ్యలు.

ఆరు సమాన చతురస్ర తలాలు గల ఘనాకారాన్ని సమఘనం అంటారని మనకు తెలుసు.



కొన్ని ప్రమాణ ఘనాలను తీసుకొని వాటిని వివిధ పరిమాణములు గల ఘనాకారాన్ని తయారు చేద్దాము.

వ.సం.	పటం	అంచుపొడవు	ప్రమాణ ఘనాల సంఖ్య
1		1	1
2		2	8
3		3	27

ఈ క్రమంలో తరువాత రావలసిన సమ ఘనాన్ని తయారు చేయగలవా?

5 ప్రమాణాల భుజం పొడవు గల సమఘనాకారాన్ని తయారు చేయుటకు ఎన్ని ప్రమాణ ఘనాలు కావలెనో ఊహించగలవా?

కావున సమఘనాకారాలు తయారుచేయుటకు 1, 8, 27, 64 …….. ప్రమాణ సమఘనాలు కావాలి.

1, 8, 27, 64 …… లను ఘన సంఖ్యలు లేదా పరిపూర్ణ ఘనాలు అంటాము. వీటిని క్రింది విధంగా వ్రాయగా

$1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$64 = \ldots\ldots.. \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots =$

కావున ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గుణించగా వచ్చు సంఖ్యను దాని ఘనము అంటాము.

కావున x యొక్క ఘన సంఖ్య $x^3 = x \times x \times x$

49 ఒక ఘన సంఖ్య అగునా?

కాదు, ఎందుకనగా $49 = 7 \times 7$ మాత్రమే మరియు ఇది ఏ సహజ సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గుణించిన 49 కాదు. ఎందుకనగా $3 \times 3 \times 3 = 27$ మరియు $4 \times 4 \times 4 = 64$. 49 పరిపూర్ణఘనము కాదు.

ప్రయత్నించండి :

1. 81 ఘనసంఖ్య అగునా ?
2. 125 ఘన సంఖ్య అగునా?

క్రింది పట్టికను పరిశీలించి పూర్తి చేయుము.

సంఖ్య	ఘనం
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = \ldots\ldots\ldots$
7	$7^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$
8	$8^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$
9	$9^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$
10	$10^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$

ఆలోచించి, చర్చించండి. రాయండి.

(i) 1, 100 ల మధ్య ; 1, 500 ల మధ్య ; 1 మరియు 1000 ల మధ్య ఎన్ని (సంపూర్ణ) ఘనసంఖ్యలు కలవు?

(ii) 500, 1000 ల మధ్య ఎన్ని (సంపూర్ణ) ఘనసంఖ్యలు కలవు ?

దిగువ 11 నుండి 20 వరకు గల సంఖ్యల ఘనాలు ఇవ్వబడినవి.

సంఖ్య	ఘనం
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

17 మరియు 18 ల ఘనాలలోని అంకెల మొత్తంలో ఏదైనా ఆసక్తి గల అంశాన్ని గమనించావా?

పై పట్టికలో సరిసంఖ్య యొక్క ఘనము ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది? అయితే బేసి సంఖ్య యొక్క ఘనము కూడా బేసి సంఖ్యయేనా? ఆలోచించండి.

అదేవిధంగా గమనిస్తే, ఒక సంఖ్య ఒకట్ల స్థానములో 1 ఉంటే దాని యొక్క ఘనము 1 తో అంతమవుతుంది.

అదేవిధంగా 0, 4, 5, 6 లేదా 9 ఒకట్ల స్థానంలో గల ఘన సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో ఏ సంఖ్య ఉంటుంది?

ప్రయత్నించండి :

1. క్రింది సంఖ్యల (విస్తరణలో) ఒకట్ల స్థానములో ఉండు సంఖ్యలను కనుగొనుము.

(i) 75^3 (ii) 123^3 (iii) 157^3 (iv) 198^3 (v) 206^3

6.11 కొన్ని ఆసక్తికర అమరికలు :

1. వరుస బేసి సంఖ్యలను కూడగా వచ్చె మొత్తాలను గమనించుము.

$1 = 1 = 1^3$

$3 + 5 = 8 = 2^3$

$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$

$13 + 15 + 17 + 19 = \ldots\ldots = \ldots\ldots.$

5^3 వచ్చుటకు ఎన్ని వరుస బేసి సంఖ్యలను కూడవలెనో ఊహించగలరా??

2. దిగువ అమరికను గమనించండి.

$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 7$

$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 19$

$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 37$

$5^3 - 4^3 =$ …………….. $=$ ....

పై అమరికలను ఉపయోగించి దిగువ వాని విలువలు వ్రాయుము.

(i) $10^3 - 9^3$ (ii) $15^3 - 14^3$ (iii) $26^3 - 25^3$

3. దిగువ అమరికలను పరిశీలించి పూర్తిచేయండి.

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = (\ )^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (\underline{\qquad})^2$

………………….. $= (1 + 2 + 3 + ... + 10)^2$

వీటిని ఈ విధంగా సాధారణీకరించవచ్చును. మొదటి 'n' సంఖ్యల ఘనాల మొత్తము ఆ సంఖ్యల మొత్తము యొక్క వర్గముగా వ్రాయవచ్చును.

i.e. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

6.12 ఘన సంఖ్యలు మరియు వాటి ప్రధాన కారణాంకాలు

64 మరియు 216 (సంఖ్య)లను ప్రధాన కారణంకల లబ్దంగా వ్రాయగా

$64 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2}$

$216 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{3 \times 3 \times 3}$

రెండు సందర్భాలలోను ప్రతి కారణాంక సంఖ్య మూడుసార్లు వచ్చినది. కావున ప్రధాన కారణాంకాలను త్రికములుగా సమీకరించ వచ్చును.

కావున ఒక సహజ సంఖ్య యొక్క ఘనముగా వ్రాయగలుగు సంఖ్య ఘన సంఖ్య అనగా మూడు సమాన సహజ సంఖ్యల లబ్దంగా వ్రాయగలుగు సంఖ్య.

540 ఘన సంఖ్యయేనా ?

540 ని దాని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం వ్రాయగా

$540 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 5$

ఇందులో, 2 మరియు 5 లు త్రికములుగా లేవు కావున 540 (సంపూర్ణ) ఘన సంఖ్య కాదు.

2	540
2	270
3	135
3	45
3	15
5	5
	1

దిగువ వాటిని సాధించుము.

1. దిగువ వానిలో ఏవి (సంపూర్ణ) ఘన సంఖ్యలు ?

(i) 243 (ii) 400 (iii) 500 (iv) 512 (v) 729

ఉదాహరణ 13: 2560 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన వచ్చు లబ్ధము సంపూర్ణ ఘనము అగును ?

సాధన : 2560 ని ప్రధాన కారణాంకాలు లబ్ధంగా రాయగ.

$2560 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5$

దానిలో 5 త్రికముగా లేదు కావున లబ్ధము సంపూర్ణ ఘనము కాదు.

కావున, 2560 సంపూర్ణ ఘనం కాదు

కాబట్టి, ఇచ్చిన సంఖ్య సంపూర్ణఘనం కావడానికి గుణించవలసిన

కనిష్ఠ సంఖ్య $5 \times 5 = 25$

2	2560
2	1280
2	640
2	320
2	160
2	80
2	40
2	20
2	10
	5

ఉదాహరణ 14: 1600 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము సంపూర్ణ ఘనము అగును ?

సాధన : 1600 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా విడగొట్టి వ్రాయగా

$1600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$

దానిలో 5 త్రికముగా లేదు

కావున 1600 సంపూర్ణ ఘనము కాదు.

కావున భాగఫలము సంపూర్ణ ఘనము అగుటకు

భాగించవలసిన కనిష్ఠసంఖ్య $5 \times 5 = 25$.

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

అభ్యాసము - 6.4

1. క్రింది సంఖ్యల ఘనాలు కనుగొనుము.
   (i) 8 (ii) 16 (iii) 21 (iv) 30
2. క్రింది సంఖ్యలు సంపూర్ణ ఘనాలా ? కాదా? పరీక్షించండి.
   (i) 243 (ii) 516 (iii) 729 (iv) 8000 (v) 2700
3. 8788 ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య అగును?
4. 7803ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన వచ్చు లబ్ధము సంపూర్ణ ఘనము అగును?
5. 8640 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించిన వచ్చు భాగఫలము సంపూర్ణ ఘనము అగును?
6. రవి ప్లాస్టసీన్ (మైనము)తో చేసిన ప్రమాణ ఘనాలను ఉపయోగించి 12 సెం.మీ, 8సెం.మీ మరియు 3సెం.మీ. కొలతలు గల దీర్ఘ ఘనాన్ని తయారు చేసెను? అతడు తయారీకి కనీసము ఎన్ని ప్రమాణ ఘనాలను ఉపయోగించెను.
7. $3^{11} + 5^{13}$ మొత్తాన్ని భాగించ గలుగు కనిష్ఠ ప్రధాన సంఖ్యను కనుగొనండి.

6.13 ఘనమూలాలు

2 ప్రమాణాల భుజము గల (సమ) ఘనాన్ని తయారు చేయుటకు ప్రమాణ ఘనాలు 8 ($2^3 = 8$) కావలెనని మనకు తెలుసు.

అదే విధంగా 3 ప్రమాణాల భుజము (అంచు) గల ఘనానికి 27 ($3^3 = 27$) ప్రమాణ ఘనాలు కావాలి.

ఒక ఘనం 64 ప్రమాణ ఘనాలచే తయారు చేయబడిన ఆ ఘనపు పొడవు ఎంత ఉండవచ్చును ?

ఘనపు భుజము పొడవు 'x' ప్రమాణాలు అనుకొనిన

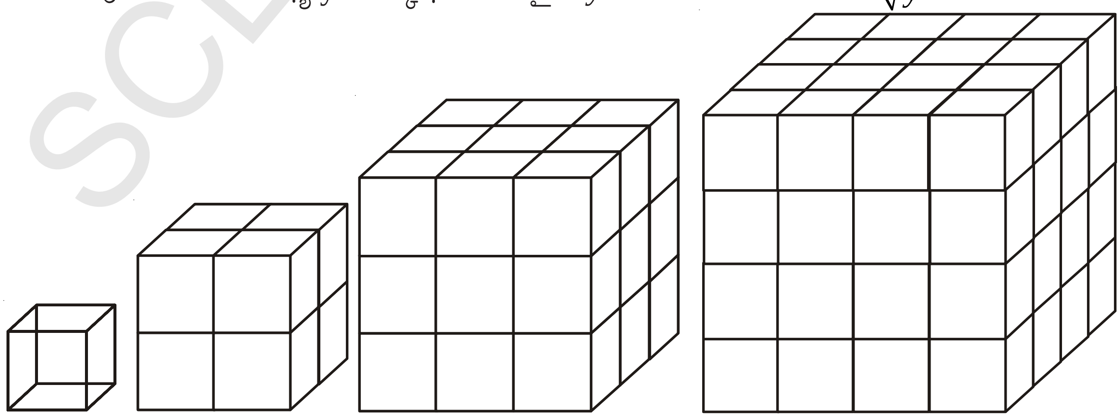
$$\therefore \quad 64 = x^3$$

ఘనం భుజము పొడవు కనుగొన వలెనన్న 64 ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనమో కనుగొనవలెను. కావున దత్త సంఖ్య ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనమో కనుగొను ప్రక్రియను ఘనమూలమును కనుగొను ప్రక్రియ అంటాం.

ఇది ఘనము చేయు ప్రక్రియకు విలోమము

$4^3 = 64$ కావున 4 ను 64 యొక్క ఘనమూలము అంటాం. దీనిని మనము $\sqrt[3]{64} = 4$ అనివ్రాస్తాము. $\sqrt[3]{\ }$ గుర్తు ఘనమూలాన్ని సూచిస్తుంది.

కావున 'x' అను సంఖ్య y యొక్క ఘనమూలమైన $y = x^3$ అగును అనగా $x = \sqrt[3]{y}$.



(1 ప్రమాణఘనం) (2 ప్రమాణాలఘనం) (3 ప్రమాణాలఘనం) (4 ప్రమాణాల ఘనం)

క్రింది పట్టికను పూర్తి చేయాలి.

ఘనాలు	ఘనమూలాలు
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$6^3 =$	$\sqrt[3]{\ } = 6$
$7^3 =$	$\sqrt[3]{\ } = 7$
$8^3 =$	$\sqrt[3]{\ } = 8$
...... = ...	.... = ...
...... = ...	.... = ...

6.14 ప్రధానకారణంక పద్ధతిన ఘనమూలాలు కనుగొనుట:

1728 యొక్క ఘనమూలాన్ని ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిన కనుగొందాము.

సోపానం1 : 1728 ప్రధాన కారణకాల లబ్ధంగా విడగొట్టగా

$$1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

సోపానం2 : త్రికములుగా వర్గీకరించగా

$$1728 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$$

సోపానం 3: ప్రతి త్రికము నుండి ఒక కారణాంకమును తీసుకొని లబ్ధంగా వ్రాయగా

$$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

మరియొక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 15: 4096 యొక్క ఘనమూలాన్ని కనుగొనుము ?

సాధన : 4096 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయగా

$$4096 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$

$$\sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$$

2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

6.15 ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయుట

ఇచ్చిన సంఖ్య సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య అయిన దాని ఘనమూలాన్ని దిగువ పద్ధతి ద్వారా అంచనా వేయవచ్చును.

9261 యొక్క ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయుటద్వారా కనుగొందాము.

సోపానము 1: దత్త సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానముతో ఎడమవైపుకు పోవుచు మూడు మూడు అంకెలు ఉండునట్లు గుంపులుగా విభజించి వ్రాయాలి.

అనగా	9	261
	రెండవ గుంపు	మొదటి గుంపు

సోపానము 2: మొదటి గుంపులోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకె అనగా 261 లోని చివరి అంకె 1 దత్త సంఖ్య యొక్క ఘనమూలపు ఒకటవ స్థానపు అంకెను సూచించును. కావున ఘనమూలములో ఒకటవ స్థానములో 1 ఉండును.

సోపానము 3: ఇపుడు రెండవ గుంపులో గల 9 ని గమనించుము. అది

$2^3 < 9 < 3^3$. కావున 2 కనిష్ఠసంఖ్య. కావున ఘన మూలపు పదుల స్థానములు '2' ఉండాలి.

$\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$

అభ్యాసము - 6.5

1. ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా దిగువ సంఖ్యల ఘనమూలాలను కనుగొనండి.

   (i) 343 (ii) 729 (iii) 1331 (iv) 2744

2. క్రింది వాని ఘనమూలాలను అంచనా వేసి కనుగొనుము?

   (i) 512 (ii) 2197 (iii) 3375 (iv) 5832

3. దిగువ వాక్యములు సత్యములా? అసత్యములా? వ్రాయండి.

   (i) సరిసంఖ్య యొక్క ఘనము బేసిసంఖ్య

   (ii) సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య చివర రెండు స్థానాలు సున్నాలతో అంతమవుతాయి.

   (iii) ఒక సంఖ్య చివరి అంకె '5' అయిన దాని ఘనము చివరి అంకె కూడ 5 అవును.

   (iv) ఒక సంఖ్య సున్నా (0)తో అంతమైన దాని ఘనములో మూడు సున్నాలు ఉంటాయి.

   (v) ఒక అంకెగల సంఖ్య యొక్క ఘనము కూడ ఒక అంకె సంఖ్య అవుతుంది.

   (vi) '8' తో అంతం అగు సంపూర్ణ ఘనసంఖ్య లేదు.

   (vii) రెండంకెల సంఖ్య ఘనములో మూడంకెలు ఉండవచ్చు.

4. వర్గ సంఖ్యయు మరియు ఘనసంఖ్యయు అగు రెండంకెల సంఖ్యను కనుగొనుము.

మనము ఏమి చర్చించాం.

- ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గంలోని అంకెలసంఖ్యను అంచనావేయుట.
- వర్గ సంఖ్యలను వివిధ అమరికలతో వ్రాయవచ్చును.
- a, b, c లు ధన పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b, c) లను పైథాగరస్ త్రికాలు అంటాం.
- ప్రధాన కారణాంకల పద్ధతి మరియు భాగహార పద్ధతులతో వర్గమూలములను కనుగొనుట
- వర్గసంఖ్యలు కాని సంఖ్యల వర్గమూలాలు అంచనా వేయుట.
- ప్రధాన కారణాంకల పద్ధతిలో ఘనమూలాలు కనుగొనుట
- ఘనసంఖ్యల ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయుట
- పూర్ణసంఖ్య యొక్క వర్గము వర్గసంఖ్య కాని అకరణీయ సంఖ్య యొక్క వర్గము సంపూర్ణవర్గ సంఖ్య
- వర్గమూలములు కనుగొనుట వర్గము చేయుటకు విలోమ ప్రక్రియ
- ఒకే పూర్ణసంఖ్యను మూడుసార్లు గుణించగా వచ్చు పూర్ణసంఖ్యను ఘనసంఖ్య అంటాం.

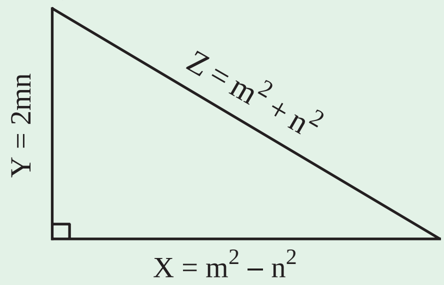
నిత్య త్రిభుజము

ఒక లంబకోణ త్రిభుజపు అన్ని భుజాల కొలతలు పూర్ణాంకాలుగా ఇచ్చు సూత్రము డ్యోఫాంటస్ కాలనికే గ్రీకులకు తెలుసు. m మరియు n లు యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకొన్న పూర్ణాంకాలు అయితే

ఒక భుజము $X = m^2 - n^2$

రెండవ భుజము $Y = 2mn$

కర్ణము $Z = m^2 + n^2$ లుగా వచ్చును.



ఉదాహరణ

m	n	$X = m^2 - n^2$	$Y = 2mn$	$Z = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
4	1	15	8	17

అధ్యాయం 7

పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు, రేఖాచిత్రములు

7.0 పరిచయం

ఒకనాడు జగదీష్ T.V. చూస్తున్నాడు. 2012 ఒలంపిక్ క్రీడలలో ప్రపంచంలోని ఏయే దేశములు, ఎన్నెన్ని పతకాలను గెలుచుకున్నాయి అనే వివరాలను T.V. నందు క్రింది పట్టిక వలె చూపుతున్నారు.

2012 ఒలంపిక్స్ - పతకాల పట్టిక

స్థానము	దేశము	బంగారు పతకాలు	వెండి పతకాలు	కాంస్య పతకాలు	మొత్తం
1	అమెరికా సం.రా	46	29	29	104
2	చైనా	38	27	23	88
3	బ్రిటన్	29	17	19	65
4	రష్యా	24	26	32	82
5	కొరియా	13	8	7	28

పై పట్టిక 2012 ఒలంపిక్ క్రీడలలో మొదటి ఐదుస్థానములలోని దేశములు, అవి గెలుచుకొన్న పతకాల వివరాల గురించి తెలుపుతున్నది.

ఈ విధంగా సమాచారమును సంఖ్యాత్మకంగా, వివరణాత్మకంగా లేక రేఖాచిత్రముల ద్వారా తెలుపు వివరాలను 'దత్తాంశము' అంటారు. దత్తాంశము నుండి వివిధ రకాల వివరాలను తెలుసుకొనవచ్చును. ఉదాహరణకు

- ఏ దేశము అత్యధిక సంఖ్యలో పతకాలను సాధించింది?
- ఏ దేశము అత్యధిక సంఖ్యలో కాంస్య పతకాలను సాధించింది ?
- పై పట్టిక నుండి మరికొన్ని వివరాలను రాబట్టండి.

ప్రయత్నించండి :

ఏవైనా మూడు సంఖ్యాత్మక దత్తాంశములను, మూడు వివరణాత్మక దత్తాంశములను వ్రాయండి.

7.1 కేంద్రీయ స్థాన విలువలు

మనం సాధారణముగా సమాచారాన్ని సేకరించి, విశ్లేషించి ఆ దత్తాంశ స్వరూపం గురించి నిర్ణయానికి వస్తాము. ఆ దత్తాంశాన్ని అవగాహన చేసుకొనడానికి మనకు అంకమధ్యమం, మధ్యగతం మరియు బాహుళకము కనుగొనాల్సి ఉంటుంది. వీటినే కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు అంటారు. వీటిని గుర్తు చేసుకొందాం.

7.1.1 అంకగణిత మధ్యమము

ఇది అతి సాధారణముగా ఉపయోగించే కేంద్రస్థాన కొలత. దీనిని సరాసరి, సగటు అని కూడ అంటారు. ఒక దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు ఫలితమును అంకగణిత మధ్యమము అంటారు.

ఒక దత్తాంశములోని రాశులు $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots x_n$ అయిన ఆ దత్తాంశపు

$$\text{అంకగణిత మధ్యమము} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \quad \text{(సంక్షిప్తంగా)}$$

> $\sum x_i$ అనగా దత్తాంశంలో గల అన్ని రాశుల (x_i లు) మొత్తము. x_i లో i విలువలు 1 నుండి n వరకు తీసుకొంటాము.

ఉదాహరణ 1: ఒక యూనిట్ పరీక్షలో వివిధ విషయములలో అశోక్ సాధించిన మార్కులు ఈ విధంగా ఉన్నవి. 20, 11, 21, 25, 23 మరియు 14. ఈ దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమము ఎంత?

సాధన : దత్తాంశములోని రాశులు = 20, 11, 21, 25, 23, 14

$$\text{అంకగణిత మధ్యమము } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$= \frac{20+11+21+25+23+14}{6} = \frac{114}{6}$$

$$\bar{x} = 19$$

ఉదాహరణ 2: ఒక దత్తాంశములోని 7 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 32. ఆ దత్తాంశమునకు 48 అను మరొక రాశిని కూడగా ఫలిత అంకగణిత మధ్యమము ఎంత?

సాధన :

7 రాశుల అంకమధ్యమము	$\bar{x}$	=	32		
7 రాశుల మొత్తము	$\sum x_i$	=	32×7	=	224
కలిపిన 8వ రాశి		=	48		
8 రాశుల మొత్తము	$\sum x_i$	=	$224 + 48$	=	272
∴ 8 రాశుల అంకమధ్యమము	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$	=	$\frac{272}{8}$	=	34

ఉదాహరణ 3: ఒక క్లబ్ నందలి 25 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు 38 సం॥లు అందులో నుండి 42 సం॥లు సరాసరి వయస్సు గల 5 మంది సభ్యులు క్లబ్‌ను విడిచి వెళ్ళినచో మిగిలిన సభ్యుల సరాసరి వయస్సు ఎంత?

సాధన : 25 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు = 38 సం॥లు

మొత్తం 25 మంది వయస్సు $= 38 \times 25 = 950$

5 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు $= 42$ సం॥

మొత్తం వయస్సు $= 42 \times 5 = 210$

మిగిలిన 20 మంది సభ్యుల మొత్తం వయస్సు $\bar{x} = 950 - 210 = 740$

$\therefore$ సరాసరి వయస్సు $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{740}{20} = 37$ సం॥

ఉదాహరణ 4: ఒక దత్తాంశములోని 9 రాశుల సగటు 45 అని లెక్కించ బడినది. అట్లు చేయుటలో ఒకరాశి 24 ను 42 గా పొరపాటుగా లెక్కించినచో 9 రాశులు అసలు సగటు ఎంత?

సాధన : 9 రాశుల సగటు $= 45$

9 రాశుల మొత్తము $= 45 \times 9 = 405$

ఈ మొత్తమును గణించుటలో 24 ను 42 గా పొరపాటుగా తీసుకోవడం జరిగినది. కావున

$\therefore$ 9 రాశుల అసలు మొత్తము $= 405 - 42 + 24 = 387$

9 రాశుల అసలు సగటు $= \frac{\sum x_i}{N} = \frac{387}{9} = 43$

పై అంశాలను పరిశీలించగా,

- అంకగణిత మధ్యమము దత్తాంశమంతటికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.
- ఇది అన్ని రాశుల విలువలపైన, రాశుల సంఖ్యపైన ఆధారపడుతుంది.
- ఇది ఒక దత్తాంశమునకు ఏకైకము.
- దత్తాంశములోని అన్ని రాశులకు ఒక సంఖ్యను కూడినా లేక అన్ని రాశుల నుండి ఒక సంఖ్యను తీసివేసినా ఆ దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమం కూడా అదే విధంగా మార్పు చెందుతుంది.
- దత్తాంశములోని అన్ని రాశులను ఒకే సంఖ్యచే గుణించినా లేక భాగించినా ఆ దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము కూడా అదే సంఖ్యచే గుణింపబడుతుంది లేక భాగింపబడుతుంది.

7.1.2 విచలన పద్ధతి ద్వారా అంకగణిత మధ్యమము

ఒక దత్తాంశములో 7, 10, 15, 21, 27 అను ఐదు రాశులు కలవు. ఉపాధ్యాయుడు ఈ దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమమును లెక్కించకుండా అంచనా వేయమని కోరగా కొందరు విద్యార్థులు క్రింది విధంగా చెప్పారు.

కమల్ : ఇది దత్తాంశంలోని అత్యల్ప, అత్యధిక రాశుల మధ్య విలువ 17 అవుతుంది.

నీలిమ : ఇది ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయబడిన దత్తాంశంలో మధ్య విలువ 15 కు సమానం అవుతుంది.

లేఖ్య : ఇది రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చిన 16 అవుతుంది.

ఈ ఒక్కొక్క అంచనాను "అంచనా వేసిన అంక గణిత మధ్యమము" లేదా "ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమము" (Assumed mean) అంటారు. దీనిని 'A' తో సూచిస్తారు..

పై ముగ్గురు విద్యార్థులు చెప్పిన అంకగణిత మధ్యమము లలో ఏది అసలైన అంక గణిత మధ్యమమునకు దగ్గరగా ఉందో పరిశీలిద్దాము.

సందర్భం 1: కమల్ చెప్పిన ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము $A = 17$

కాని అసలు అంక గణిత మధ్యమము $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{7+10+15+21+27}{5} = \dfrac{80}{5} = 16$

అన్ని రాశులను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము (A) నుండి విచలనములతో సూచించినచో

రాశులు	A	విచలనాలలో
7	17	$7 = 17 - 10$
10	17	$10 = 17 - 7$
15	17	$15 = 17 - 2$
21	17	$21 = 17 + 4$
27	17	$27 = 17 + 10$

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5\times17}{5} + \frac{-10-7-2+4+10}{5}$$

$$= 17 + \frac{-5}{5} = 17 - 1 = 16$$

∴ అంకగణితమధ్యమము = ఊహించిన అంకగణితమధ్యమం + విచలనముల సరాసరి

సందర్భం 2: నీలిమ చెప్పిన ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము $A = 15$

అంకగణితమధ్యమము $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{7+10+15+21+27}{5}$

⇒ రాశులను విచలనాల రూపంలో వ్రాయగా

$$\bar{x} = \frac{(15-8)+(15-5)+(15-0)+(15+6)+(15+12)}{5}$$

$$= \frac{(5\times15)}{5} + \frac{(-8-5-0+6+12)}{5}$$

$$= 15 + \frac{5}{5} = 15 + 1 = 16$$

సందర్భం 3: లేఖ్య చెప్పిన ఊహించిన అంకగణితమధ్యమము $A = 16$

అంక గణిత మధ్యమము $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{7+10+15+21+27}{5}$

⇒రాశులను విచలనాల రూపంలో వ్రాయగా

$$\bar{x} = \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$$

$$= \frac{(5\times16)}{5} + \frac{(-9-6-1+5+11)}{5}$$

$$= 16 + \frac{0}{5} = 16$$

ప్రయత్నించండి.

పై సందర్భాలకు ఊహించిన అంక మధ్యమము, విచలనాల పట్టికను తయారు చేయండి. విచలనాల సరాసరి ఊహించిన అంక మధ్యమము మరియు నిజమైన అంక గణిత మధ్యమము విలువలను గమనించండి. ఏమి గమనించారు?

[**సూచన :** విచలనాల సరాసరితో పోల్చి చూడండి.]

పై సాధనల నుండి, అన్ని రాశుల విచలనముల మొత్తం (లేక సరాసరి) సున్నకు సమానం అయినప్పుడు, ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమమే అసలు అంక గణిత మధ్యమము అవుతుందని తెలియుచున్నది.

ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమమును సరిచూచే పద్ధతిని ఉపయోగించి, అంక గణిత మధ్యమమును లెక్కించుట కూడా చేయవచ్చును.

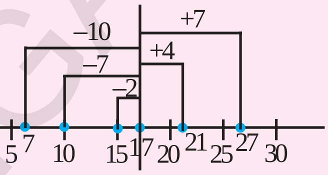
అంకగణిత మధ్యమము = ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము + విచలనముల సరాసరి

$$= \text{ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము} + \frac{\text{విచలనాల మొత్తము}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{N}$$

దత్తాంశములోని రాశులకు, ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమునకు గల తేడాను విచలనం అంటారు.

ఉదా:



ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమము = 17

ఉదాహరణ 5: 10 రాశుల గల దత్తాంశము 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50, 62 యొక్క అంకగణిత మధ్యమము 40 అని ఊహించి దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనండి. సాధారణ పద్ధతిలో కూడా లెక్కించండి. ఏమి గమనించారు ?

సాధన : దత్తాంశంలోని రాశులు = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 62

ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం A = 40 అనుకొనుము.

$$\therefore \text{ అంకగణిత మధ్యమము} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{N}$$

$$\bar{x} = 40 + \frac{(14-40)+(25-40)+(28-40)+(32-40)+(35-40)+(36-40)+(42-40)+(50-40)+(56-40)+(62-40)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-26)+(-15)+(-12)+(-8)+(-5)+(-4)+(2)+(10)+(16)+(22)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-70+50)}{10}$$

$$= 40 - \frac{20}{10}$$

$$= 40 - 2 = 38$$

సాధారణ పద్ధతి ద్వారా అంకగణిత మధ్యమం

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{14+25+28+32+35+36+42+50+56+62}{10}$$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

పై రెండు పద్ధతుల ద్వారా ఫలితములు సమానం.

పెద్ద సంఖ్యలు లేక దశాంశ సంఖ్యలు రాశులుగా గల దత్తాంశములకు అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనుటకు ఈ పద్ధతి అనువుగా ఉంటుంది.

క్రింది ఉదాహరణలు గమనించండి.

ఉదాహరణ 6: ఒక షేరు యొక్క మార్కెట్ విలువ ఒక వారములో క్రింది విధంగా మార్పు చెందినది (రూపాయలలో) 3672, 3657, 3673, 3665, 3668. ఆ వారములో షేర్ యొక్క సరాసరి విలువను కనుగొనండి.

సాధన : దత్తాంశములోని షేర్ విలువలు = 3657, 3665, 3668, 3672, 3673

ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము = 3668

అంకగణిత మధ్యమము $\bar{x} = A + \dfrac{\sum(x_i - A)}{N}$

$$= 3668 + \frac{(3657-3668)+(3665-3668)+(3668-3668)+(3672-3668)+(3673-3668)}{5}$$

$$= 3668 + \frac{(-11-3-0+4+5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = ₹\ 3667.$$

ప్రయత్నించండి.

1. క్రింది దత్తాంశములకు అంకగణిత మధ్యమాలను అంచనావేసి వ్రాయండి.

   (i) 17, 25, 28, 35, 40

   (ii) 5, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 13, 19, 19, 19, 20

   పై సమస్యలను సాధారణ పద్ధతిలో సాధించుట ద్వారా పై సమాధానములను సరిచూడండి.

ప్రాజెక్టు పని :

1. ఇటీవల జరిగిన పరీక్షలలో మీ తరగతిలోని 10 మంది విద్యార్థులు వివిధ విషయాలలో పొందిన మార్కులను సేకరించండి. విషయం వారీగా అంకగణిత మధ్యమములను ఊహించి వ్రాయండి. సాధారణ పద్ధతిలో లెక్కించి, సరిచూడండి. మీరు ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమాలు, ఎన్ని లెక్కించిన అంకగణిత మధ్యమాలతో సరిపోలినవో తెల్పండి?

2. మీ తరగతిలోని అందరు విద్యార్థుల ఎత్తులకు ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం వ్రాయండి. మీ వ్యాయామ ఉపాధ్యాయుని రికార్డుల ప్రకారం సరిపోల్చి చూడండి. ఏదైనా తేడాను గమనించారా?

7.1.3 మధ్యగతము

కేంద్ర స్థాన కొలతలలో మధ్యగతము మరొక ప్రముఖ విలువ. ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో వ్రాయబడిన దత్తాంశములో మధ్యన గల రాశి విలువను ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము అంటారు. అనగా దత్తాంశంలో మధ్యగతము కన్నా ఎక్కువ విలువల రాశులు ఎన్ని ఉన్నవో, తక్కువ విలువ గల రాశులు అన్ని ఉంటాయి.

n రాశులు గల దత్తాంశ విలువలను ఆరోహణ /అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయగా

- **n** బేసి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ వ రాశివిలువ

- **n** సరి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\left(\frac{n}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ రాశుల సరాసరి.

ఉదాహరణ 7: 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50 రాశులు గల దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

సాధన : ఆరోహణక్రమములోని రాశులు = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

రాశుల సంఖ్య n = 9 (బేసిసంఖ్య)

$\therefore$ మధ్యగతము $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ రాశి

= 5 వ రాశి = 35

$\therefore$ మధ్యగతము = 35

ఉదాహరణ 8: పై దత్తాంశమునకు మరొక రాశి 61 కలుపగా క్రొత్త దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము ఎంత?

సాధన : రాశులు యొక్క క్రమము = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

రాశుల సంఖ్య n = 10 (సరిసంఖ్య)

రాశుల సంఖ్య సరిసంఖ్య కావున దత్తాంశము మధ్యలో రెండు రాశులు కలవు.

$\therefore$ మధ్యగతము M $= \left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{2}+1\right)$ వ రాశుల సరాసరి

= 5, 6 వ రాశుల సరాసరి

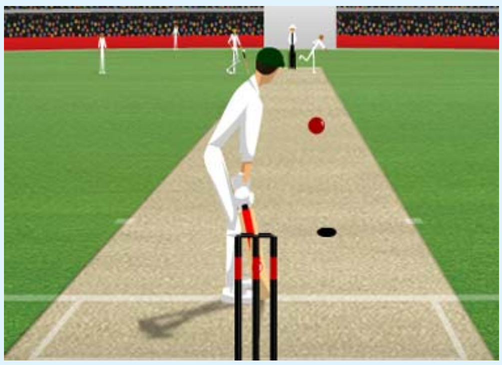
$= \frac{35+36}{2} = 35.5$

ఇది చేయండి :

కొందరు భారతీయ క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ ఎత్తులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును కనుగొనండి.

క్రమసంఖ్య	ఆటగాని పేరు	ఎత్తు
1.	వివిఎస్. లక్ష్మణ్	5'11"
2.	పార్థివ్ పటేల్	5'3"
3.	హర్భజన్ సింగ్	6'0"
4.	సచిన్ టెండూల్కర్	5'5"
5.	గౌతమ్ గంభీర్	5'7"
6.	యువరాజ్ సింగ్	6'1"
7.	రాబిన్ ఊతప్ప	5'9"
8.	వీరేంద్ర సెహ్వాగ్	5'8"
9.	జహీర్ ఖాన్	6'0"
10.	ఎం.ఎస్. ధోనీ	5'11"

5' 10" అనగా 5 అడుగుల 10 అంగుళాలు



గమనిక :

- ఆరోహణ / అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయబడిన దత్తాంశములోని రాశులలో మధ్యమరాశి విలువయే ఆ దత్తాంశపు మధ్యగతము.
- ఇది దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్యపై మరియు క్రమంగా వ్రాయబడిన దత్తాంశంలో మధ్యమ రాశుల విలువలపై మాత్రమే ఆధారపడుతుంది. కానీ అత్యల్ప అత్యధిక విలువలపై ఆధారపడదు.

ప్రయత్నించండి :

1. 24,65,85,12,45,35,15 ల యొక్క మధ్యగతము కనుగొనండి.
2. x, $2x$, $4x$ రాశుల మధ్యగతము 12 అయిన ఆ రాశుల సరాసరి ఎంత?
3. 24, 29, 34, 38, x అను దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 29 అయిన x విలువ

   (i) $x > 38$ (ii) $x < 29$ (iii) 29, 34 ల మధ్య (iv) ఏదీకాదు.

7.1.4 బాహుళకము

ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులు ఇష్టపడే ఏకరూప దుస్తులు (uniform) రంగు ఏది? అత్యధికంగా అమ్ముడయ్యే రెడీమేడ్ దుస్తుల పరిమాణం (size) ఏది? ... మొదలగు వివరాలు రాబట్టుటకు బాహుళకము అను కేంద్ర స్థాన కొలతను ఉపయోగిస్తారు. క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 9: ఒక చెప్పుల దుకాణంలో ఒక వారములో అమ్మబడిన బూట్ల కొలతలు అంగుళాలలో 7, 9, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 6, 3, 5, 5, 7, 10, 7, 8, 7, 9, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 7, 9, 7. అయితే తరువాత వారము అమ్మకానికై ఏ కొలత బూట్లు ఎక్కువ సంఖ్యలో సిద్ధపరుచుకొనవలెను.

సాధన : దత్తాంశములోని రాశులను ఆరోహణ క్రమములో వ్రాయగా

3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10.

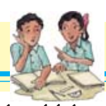
పై దత్తాంశము పరిశీలించగా 7 (అంగుళాలు) అను పరిమాణము ఎక్కువసార్లు పునరావృతము అవుతుంది. కావున దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము 7 అనగా వచ్చే వారము అమ్మకమునకై 7 (అంగుళాలు) పరిమాణం గల బూట్లను ఎక్కువగా సిద్ధపరచుకోవాలి.

ఉదాహరణ 10: ఒక రక్తదాన శిబిరంలో రక్తదానం చేసిన 50 మంది దాతల రక్తము గ్రూపులు ఈ విధంగా ఉన్నవి A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, O, AB, O, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O. ఈ దత్తాంశమునకు బాహుళకము కనుగొనండి.

సాధన: దత్తాంశమును పరిశీలించినపుడు A గ్రూపు దాతల సంఖ్య 12, B గ్రూపు దాతల సంఖ్య 7, AB గ్రూపు దాతల సంఖ్య = 12, O గ్రూపు దాతల సంఖ్య = 19

$\therefore$ ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము = 'O' గ్రూపు.

ఆలోచించండి, చర్చించండి మరియు వ్రాయండి.



ఒక దత్తాంశము యొక్క బాహుళకమునకు సమానమైన రాశులను కొన్నింటిని చేర్చగా దత్తాంశపు బాహుళకము ఎట్లు మారును?

గమనిక :

- ఒక దత్తాంశములో ఎక్కువసార్లు పునరావృతమగు రాశిని బాహుళకము అంటారు.
- ఇది దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్యపై గానీ, ప్రతిరాశి విలువపై గాని ఆధారపడదు.
- సంఖ్యాత్మక, వివరణాత్మక దత్తాంశములు, రెండింటిని విశ్లేషణ చేయుటలో బాహుళకమును ఉపయోగిస్తారు.
- కొన్ని దత్తాంశములకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ బాహుళకములు ఉండవచ్చు. కొన్నింటికి ఒక్క బాహుళకము కూడా లేక పోవచ్చును.

అభ్యాసము - 7.1

1. ఒక దుకాణంలో వారంలో జరిగిన అమ్మకాలు రోజువారిగా ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనండి.
₹10000, ₹ 10250, ₹ 10790, ₹ 9865, ₹ 15350, ₹ 10110

2. 10.25, 9, 4.75, 8, 2.65, 12, 2.35 రాశుల అంకగణిత మధ్యమమెంత ?

3. 8 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 25. వాని నుండి 11 అను రాశిని తొలగించగా మిగిలిన రాశుల అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనండి.

4. 9 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 38 గా లెక్కింపబడినది. కానీ అట్లు లెక్కించుటలో 72 ను 27 గా పొరపాటుగా తీసుకున్నారు. అయిన సరియైన అంకగణిత మధ్యమమును లెక్కించండి.

5. ఐదు సంవత్సరముల క్రిందట ఒక కుటుంబ సభ్యుల సరాసరి వయస్సు 25 సం॥లు ప్రస్తుతము ఆ కుటుంబసభ్యుల సరాసరి వయస్సు ఎంత? (సభ్యుల సంఖ్యలో మార్పులేదు)

6. రెండు సం॥ల క్రిందట ఒక సమూహములోని 40 మంది వయస్సుల సగటు వయస్సు 11 సం॥లు ప్రస్తుతము ఆ సమూహము నుండి ఒక వ్యక్తి బయటకు వెళ్ళిపోగా మిగిలిన సభ్యుల సగటు వయస్సు 12 సం॥లు. అయిన వెళ్ళిపోయిన వ్యక్తి వయస్సు ఎంత?

7 ఒక దత్తాంశములోని 5, 8, 10, 15, 22 అనురాశుల యొక్క అంకగణిత మధ్యమము నుండి వాని విచలనాల మొత్తమును కనుగొనండి.

8. 20 రాశుల సరాసరి నుండి వాని విచలనాల మొత్తము 100 అయిన, విచనలముల సరాసరి ఎంత?

9. ఒక యూనిట్ పరీక్షలో 12 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు 4, 21, 13, 17, 5, 9, 10, 20, 19, 12, 20, 14 అయిన ఒక విలువను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమంగా తీసుకొని దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనండి. మరియొక సంఖ్యను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమంగా తీసుకొని మరలా సరాసరిని కనుగొండి. రెండు సార్లు సమాన ఫలితాలు వచ్చినవా? మీ అభిప్రాయం ఏమిటి?

10. ఒక తరగతిలో 10 మంది విద్యార్థుల మార్కుల సరాసరి 15 (25 మార్కులకు). వారిలో కరిష్మా అనే విద్యార్థి మిగిలిన 9 మంది విద్యార్థులను అడిగి తన కన్నా ఎన్ని మార్కులు ఎక్కువ లేక తక్కువ అనే వివరాలను సేకరించింది. ఆ విచలనాలు -8, -6, -3, -1, 0, 2, 3, 4, 6. అయిన ఆమెకు వచ్చిన మార్కులెన్ని?

11. 25 అను విలువ నుండి ఒక దత్తాంశములోని n రాశుల విచలనముల మొత్తము 25 మరియు 35 అను విలువ నుండి అవే రాశుల విచలనాల మొత్తం - 25 అయిన ఆ దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత సగటు ఎంత?

12. 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8 రాశుల యొక్క మధ్యగతము ఎంత?

13. ఆరోహణక్రమములో నున్న రాశులు 10, 12, 14, $x-3$, x, $x+2$, 25 ల మధ్యగతము 15 అయిన x విలువ ఎంత?

14. 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10 రాశుల యొక్క బాహుళకము ఎంత?.

15. కొన్ని రాశుల బాహుళకము x, దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల నుండి 3 తీసివేయగా, క్రొత్త దత్తాంశమునకు బాహుళకము ఎంత?
16. 1 నుండి 100 వరకు సహజ సంఖ్యలను వ్రాయుటలో ఉపయోగించు అంకెలన్నింటి యొక్క బాహుళకము ఎంత?.
17. ఒక దత్తాంశములోని రాశులు 5, 28, 15, 10, 15, 8, 24. నాలుగు రాశులను కలుపగా దత్తాంశము యొక్క సరాసరి, మధ్యగతములో మార్పులేదు కానీ బాహుళకము 1 పెరిగినది. అయిన కలిపిన 4 సంఖ్యలేవి.
18. $x_1, x_2, ..., ..., x_{10}$ రాశుల సరాసరి 20. అయిన $x_1 + 4, x_2 + 8, x_3 + 12, ..., x_{10} + 40$ రాశుల సరాసరి కనుగొనుము.
19. 9 పూర్ణసంఖ్యల జాబితాలో 6 పూర్ణసంఖ్యలు 7, 8, 3, 5, 9 మరియు 5 లు అయిన ఆ 9 పూర్ణసంఖ్యలకు గల గరిష్ఠ మధ్యగతము కనుగొనండి?
20. 9 వేర్వేరు రాశుల మధ్యగతము 20. అందు గల నాలుగు మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యలకు ప్రతి రాశికి 2 కలపగా వచ్చు కొత్త రాశుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

7.2 దత్తాంశ నిర్వహణ; వర్గీకృత దత్తాంశము

తక్కువ రాశుల గల దత్తాంశమును గణన చిహ్నాలు వినియోగిస్తూ ఎట్లు సూక్ష్మరూపములో అమర్చవచ్చునో క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొని ఉన్నాము. కానీ ఎక్కువ రాశులు ఉన్నప్పుడు దత్తాంశమును ఎట్లు నిర్వహించవలెను (అమర్చవలెను) అని పరిశీలించుదాం. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఒక గృహ నిర్మాణ సంస్థ ఉద్యోగుల కొరకు వారివారి ఆదాయములకు అనుగుణంగా ఇండ్లు నిర్మించి ఇవ్వవలెనని ప్రణాళిక చేస్తున్నది. అందుకొరకై ఇండ్లు కావాలనుకొన్న 100 మంది ఉద్యోగుల నెలసరి ఆదాయములను సేకరించగా అవి (రూపాయలలో) 15000, 15750, 16000, 16000,16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250................. 75000.

ఈ దత్తాంశములోని 100 రాశులు ₹ 15000 నుండి ₹ 75000 మధ్యన విస్తరించి ఉన్నవి. ఎక్కువ రాశులు ఉన్నప్పుడు ఈ రాశులకు పౌనఃపున్య విభాజనము తయారు చేసినా అది పెద్ద పట్టిక అవుతుంది.

అందువల్ల దత్తాంశములోని రాశులను కొన్ని అనువైన సమూహములుగా విభజించుకొని అనగా ఆదాయ సమూహాలు ₹10001 నుండి 20000, ₹ 20001 నుండి 30000, . . . , వరకు

₹ 70001 నుండి 80000 వరకు విభజించుకొని పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక తయారు చేయుట అనువుగా ఉంటుంది. ఇటువంటి సమూహములను 'తరగతి అంతరం' అంటారు. ఉదాహరణకు 10001 – 20000 ఒక తరగతి అంతరం, ఈ సమూహములోని రాశులు 10001 నుండి 20000 వరకు విలువలు కలిగి ఉంటాయి. ఇందులో 10001 ని 'దిగువ అవధి' అని 20000 ని 'ఎగువ అవధి' అని అంటారు. దిగువ, ఎగువ అవధులు రెండూ 'తరగతి అంతరాని' కి చెందుతాయి కావున దీనిని 'విలీన తరగతి అంతరం' (Inclusive class inverval) అంటారు.

7.2.1 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము; అవగాహన

ఉదాహరణ 11: గణిత పరీక్షలో 30 మంది విద్యార్థుల మార్కులు ప్రక్క పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన

(i) దత్తాంశం ఎన్ని తరగతులుగా విభజింపబడినది?

వ. సం.	మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1	0 – 5	5
2	5 – 10	7
3	10 – 15	10
4	15 – 20	6
5	20 – 25	2

(ii) మూడవ తరగతి అంతరంలో ఎంతమంది విద్యార్థులు కలరు?

(iii) 10 మార్కులు పొందిన విద్యార్థి ఏ తరగతి అంతరంలో ఉంటాడు ?

(iv) 4 వ తరగతి అంతరంలోని 6 మంది విద్యార్థుల మార్కులు ఎన్నెన్ని?

(v) 5 వ తరగతి అంతరంలోని ఇద్దరు విద్యార్థుల మార్కులు ఒక్కొక్కరివి ఎంతెంత?

సాధన:

(i) ఈ దత్తాంశం 5 తరగతి అంతరాలుగా విభజించబడినది.

(ii) మూడవ తరగతి అంతరంలో 10 మంది విద్యార్థులు కలరు.

(iii) ఇచ్చట 10 రెండవ తరగతి అంతరం యొక్క ఎగువ అవధి మరియు మూడవ తరగతి అంతరం యొక్క దిగువ అవధి, ఇటువంటి సందర్భములలో ఎగువ అవధి తరగతికి చెందదు మరియు ఈ తరగతులను 'మినహాయింపు తరగతులు' అంటారు. కావున 10 మార్కులు మూడవ తరగతి అంతరంకు చెందుతుంది.

(iv) నాల్గవ తరగతి అంతరంలోని 6 మంది మార్కులు 15 నుండి 20లోపు విస్తరించి ఉంటాయి.

(v) ఒక్కొక్క విద్యార్థి మార్కులను (విలువలను) ఈ విభాజన పట్టిక నుండి కనుగొనలేము. అవి 20 నుండి 25 మధ్యలో ఉండవచ్చు.

ఇవి చేయండి :

ఒక అపార్ట్‌మెంట్ భవన సముదాయంలోని 90 మంది వ్యక్తుల వయస్సులు ప్రక్క వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునుండి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబివ్వండి.

వయస్సు	వ్యక్తుల సంఖ్య
1 – 10	15
11 – 20	14
21 – 30	17
31 – 40	20
41 – 50	18
51 – 60	4
61 – 70	2

(i) దత్తాంశము ఎన్ని తరగతులుగా విభజింపబడినది ?

(ii) 21-30 తరగతిలో ఎంత మంది కలరు?

(iii) ఏ తరగతి వయస్సు వారు ఎక్కువ మంది కలరు?

(iv) చివరి తరగతిలోని ఇద్దరి వయస్సులు 61, 70 లేదా మరి ఏదైనా వయస్సువారిని చెప్పవచ్చా?

7.2.2 అవధులు మరియు హద్దులు

కొంతమంది విద్యార్థుల మార్కుల దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును నిర్మిస్తున్నాము అనుకుందాము. తరగతులు 1-10, 11-20 ,...... ఉండి, ఒక విద్యార్థి మార్కులు 10.5 అయిన అది 1-10 లేదా 11-20 తరగతికి చెందుతుందా? చెందదు. కనుక ఇటువంటి సందర్భములో అవధులను కాకుండా 'నిజ తరగతి అవధులు' లేక 'హద్దులను" ఉపయోగిస్తాము.

ప్రక్క పట్టికలోని తరగతి అంతరాలను పరిగణించండి.

తరగతి హద్దులు	
అవధులు	హద్దులు
1 – 10	0.5 - 10.5
11 – 20	10.5 – 20.5
21 – 30	20.5 – 30.5
31 – 40	30.5 – 40.5

- ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి మరియు తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల సరాసరియే మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు, రెండవ తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు అవుతుంది. అనగా 10, 11 ల సరాసరి; $\frac{10+11}{2}$ = 10.5 ఎగువ హద్దు అవుతుంది.
- ఇప్పుడు 0.5 నుండి 10.5 లోపు (10.5 తప్ప) అన్ని రాశులు మొదటి తరగతికి చెందుతాయి. 10.5 నుండి 20.5 లోపు (20.5 తప్ప) రాశులన్ని 11-20 తరగతికి చెందుతాయి. అనగా 11-20 తరగతి హద్దులు 10.5 నుండి 20.5 అందువలన 10.5 అనేది 11-20 తరగతికి చెందును.
- మొదటి తరగతి కన్నా ముందు ఒక తరగతిని ఊహించి దాని ఎగువ అవధి సహాయంతో (సాధారణంగా '0' ఉంటుంది) మొదటి తరగతి యొక్క దిగువ హద్దును లెక్కించాలి. అనగా 0, 1 ల సరాసరి $\frac{0+1}{2} = 0.5$ అదే విధంగా చివరి తరగతి తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధి సహాయంతో చివరి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దును లెక్కిస్తారు. అనగా 40, 41 ల సరాసరి $\frac{40+41}{2} = 40.5$ ఇదే చివరి తరగతి ఎగువ హద్దు. ఈ హద్దులను తరగతి యొక్క 'నిజ అవధులు' అని కూడా అంటారు.

క్రింది తరగతుల అవధులు మరియు హద్దులను పరిశీలించండి.

తరగతి అంతరాలు (విలీన తరగతులు)	అవధులు		హద్దులు	
	దిగువ అవధి	ఎగువ అవధి	దిగువ హద్దు	ఎగువ హద్దు
1-10	1	10	0.5	10.5
11-20	11	20	10.5	20.5
21-30	21	30	20.5	30.5

తరగతి అంతరాలు (మినహాయింపు తరగతులు)	అవధులు		హద్దులు	
	దిగువ అవధి	ఎగువ అవధి	దిగువ హద్దు	ఎగువ హద్దు
0-10	0	10	0	10
10-20	10	20	10	20
20-30	20	30	20	30

పై పట్టికలను పరిశీలించినట్లయితే విభాజిత శ్రేఢి (విలీన తరగతులు) లో, తరగతి అవధులు, హద్దులు వేరు వేరుగా ఉంటాయి. అవిభాజత శ్రేఢిలో (మినహాయింపు తరగతులు) తరగతి అవధులు, హద్దులు సమానం అని తెలియు చున్నది.

ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల యొక్క భేదమును 'తరగతి అంతరము' లేక 'తరగతి పొడవు' అంటారు. దీని 'C' తో సూచిస్తారు.

ఇవి చేయండి.

1. ఒక తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థులు దుమికిన దూరాలు ఈ విధంగా ఉన్నవి.

దూరము (సెం.మీ.లతో)	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500	501 – 600
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	7	15	3	1

I. ఇచ్చిన తరగతి అంతరాలు విలీన తరగతి అంతరాలా ? మినహాయింపు తరగతి అంతరాలా?

II. రెండవ తరగతి అంతరంలో ఎంతమంది విద్యార్థులు కలరు?

III. 3.01మీ లేక అంతకన్నా ఎక్కువ దూరం దుమికిన వారెందరు ?

IV. 4.005 మీ దూరం దుమికిన విద్యార్థి ఏ తరగతికి చెందుతాడు ?

2. పై దత్తాంశములోని తరగతులకు హద్దులు వ్రాయండి.

3. పై దత్తాంశములోని ఒక్కొక్క తరగతి అంతరమెంత?

7.2.3 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను నిర్మించుట

మొదటి సంగ్రహణాత్మక పరీక్షలో గణితములో 50 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు క్రింది విధంగా ఉన్నవి. 31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33,41, 37,25, 22, 14,3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

ఇప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశమును ఎన్ని తరగతులుగా విభజించాలి? దత్తాంశం లోని రాశులను తరగతుల వారీగా ఎట్లు విభజించవలెను ? ఇవి తెలుసుకోవడానికై క్రింది సోపానములను పరిశీలించండి.

సోపానం1: దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనండి.

వ్యాప్తి = గరిష్టరాశి – కనిష్ట రాశి

= 47 – 0 = 47

సోపానం 2: విభజించవలసిన తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయించుకోవలెను (సాధారణంగా 5 నుండి 8 తరగుతులుగా విభజిస్తాము)

తరగతుల సంఖ్య = 6 అయిన

తరగతి అంతరము $= \frac{47}{6} \simeq 8$ (సుమారుగా)

తరగతుల (మార్కులు)	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
0 – 7	||||	4
08 – 15	~~||||~~ |	6
16 – 23	~~||||~~ ||||	9
24 – 31	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13
32 – 39	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
40 – 47	||||	4

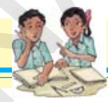
సోపానం 3: దత్తాంశములోని కనిష్ట రాశితో ప్రారంభించి, లెక్కించిన తరగతి అంతరం ఉండునట్లుగా సమ్మిళిత తరగతులను వరుసగా వ్రాయవలెను. అనగా 0-7 ,8-15, 16-23 .....

సోపానం 4: గణన చిహ్నలను వినియోగిస్తూ ఒక్కొక్క తరగతికి చెందు రాశులను గుర్తిస్తూ దత్తాంశమును విభజించాలి.

సోపానం 5: ఒక్కొక్క తరగతిలోని గణన చిహ్నలను లెక్కించి ఆ తరగతి పౌనఃపున్యముగా వ్రాయాలి.

పై దత్తాంశమునకు మినహాయింపు తరగతులు ఉపయోగించి పౌనఃపున్య పట్టిక తయారు చేయండి.

ఆలోచించండి, చర్చించండి మరియు వ్రాయండి.



1. క్రింది రాశుల దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను వ్రాయండి. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7.
2. క్రింది సంఖ్యల దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను వ్రాయండి.
   2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25. (**సూచన :** విలీన తరగతులను తీసుకోండి.)
3. పై రెండు దత్తాంశములలో బేధమేమి? వాని పౌనఃపున్య విభాజనములను ఏమంటారు?
4. పై సమస్యల యొక్క పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలలో దేని నుండి మరలా దత్తాంశము లోని రాశులను విడివిడిగా వ్రాయగలము ?

7.2.4 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము యొక్క లక్షణాలు

1. ఇది దత్తాంశమును కొన్ని అనువైన చిన్నచిన్న సమూహాలుగా (తరగతులుగా) విభజిస్తుంది.
2. 5-10 అను తరగతిలో 5 ను తరగతి యొక్క దిగువ అవధి అని 10 ని ఎగువ అవధి అంటారు.
3. 1-10, 11-20, 21-30 .... వంటి తరగతులలో ప్రతి తరగతి యొక్క ఎగువ దిగువ అవధులు రెండును అదే తరగతికి చెందుతాయి. కావున వీటిని సమ్మిళిత తరగతులు అంటారు.
4. 0-10, 10-20, 20-30 ... వంటి తరగతులలో ప్రతి తరగతి యొక్క దిగువ అవధి అదే తరగతికి చెందుతుంది. కానీ ఎగువ అవధి చెందదు. కావున వీటిని మినహాయింపు తరగతులు అంటారు.
5. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి, తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల సరాసరి మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు అవుతుంది. అదే రాశి తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు అవుతుంది.
6. మినహాయింపు తరగతులలో అవధులు, హద్దులు సమానములు కానీ సమ్మిళిత తరగతులలో అవధులు, హద్దులు సమానము కాదు.
7. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల బేధమును ఆ తరగతి యొక్క 'అంతరము' లేక 'పొడవు' (C) అంటారు.
8. ఈ పట్టిక నుంచి అన్ని రాశులను విడివిడిగా వ్రాయలేము. అందువల్ల ఒక తరగతిలోని ప్రతి రాశి యొక్క విలువ ఆ తరగతి యొక్క దిగువ, ఎగువ హద్దుల సరాసరికి సమానంగా తీసుకొంటారు. ఈ సరాసరిని 'తరగతి మార్కు' లేక 'తరగతి మధ్యవిలువ' (x) అంటారు.

ఉదాహరణ 12: మార్చి 2010, SSC పరీక్షలలో గణితంలో 30 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల శాతములు క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59. పై దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారుచేయండి. 0 – 34 ఉత్తీర్ణులు కాని వారు, 35 – 49 మూడవ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయినవారు 50 – 60 రెండవ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయిన వారు, 60 – 74 మొదటి శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయినావారు, 75 – 100 విశిష్ట శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయినవారు అను తరగతులుగా విభజించండి.

సాధన: సమస్య నందే తరగతులు కూడా సూచించబడ్డాయి కావున

సోపానం 3: తరగతులు ఇచ్చిన విధంగా రాయాలి.

సోపానం 4: ఇచ్చిన తరగతులు సమ్మిళిత తరగతులు కావున ఎగువ, దిగువ అవధులు రెండును తరగతికి చెందుతాయి అని గుర్తించండి. గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించి దత్తాంశము లేని రాశులను విభజించి గుర్తించండి.

సోపానం 5: ప్రతి తరగతిలో గణన చిహ్నాలను లెక్కించి ఆ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యంగా వ్రాయండి.

తరగతులు (మార్కులు)	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య)
0 – 34	|||	3
35 – 49	~~||||~~ ||	7
50 – 59	~~||||~~	5
60 – 74	~~||||~~ |	6
75 – 100	~~||||~~ ||||	9

(**గమనిక :** తరగతి అంతరాల పొడవులు సమానంగా లేవని గమనించవచ్చు).

ఉదాహరణ 13: క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు తరగతి మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి నుండి తరగతులను వ్రాయండి.

తరగతి మార్కులు	7	15	23	31	39	47
పౌనఃపున్యం	5	11	19	21	12	6

సాధన : తరగతి మార్కు అనగా తరగతి మధ్య విలువ, దిగువ ఎగువ హద్దుల సరాసరి. కావున సమాన తరగతి అంతరాలు గల తరగతులలో వరుస తరగతి మార్కుల మధ్య (సరాసరి) వరుస హద్దులు ఉంటాయి.

సోపానం 1: వరుస తరగతి మార్కుల మధ్య బేధమును కనుక్కోండి $h = 15 - 7 = 8$.

(ప్రతి రెండు వరుస తరగతుల మార్కుల బేధము సమానమేనా?)

సోపానం 2: ఒక్కొక్క తరగతి మార్కు 'x' అయిన ఆ తరగతి హద్దులు

$x - h/2$, $x + h/2$ అని లెక్కించండి.

మొదటి తరగతి దిగువ హద్దు $= 7 - \frac{8}{2} = 3$

ఎగువ హద్దు $= 7 + \frac{8}{2} = 11$

ఇదే విధంగా మిగిలిన తరగతులను వ్రాయవలెను.

తరగతి మార్కు	తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యము
7	(7 – 4) – (7 + 4) = 03 – 11	5
15	(15 – 4) – (15 + 4) = 11 – 19	11
23	(23 – 4) – (23 + 4) = 19 – 27	19
31	(31 – 4) – (31 + 4) = 27 – 35	21
39	(39 – 4) – (39 + 4) = 35 – 43	12
47	(47 – 4) – (47 + 4) = 43 – 51	6

7.3 సంచిత పౌనఃపున్యము

ఒక పోటీ పరీక్షలో 1000 మంది అభ్యర్థులు పాల్గొనగా వారి ఉత్తీర్ణతా వివరాలను ప్రక్క పటములో వలె నోటీసు బోర్డు ప్రకటించినారు. ఈ బోర్డును పరిశీలిస్తున్న ఇద్దరు అభ్యర్థుల మధ్య సంభాషణ గమనించండి.

తరగతి అంతరం (మార్కులు)	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 – 10	25
10 – 20	45
20 – 30	60
30 – 40	120
40 – 50	300
50 – 60	360
60 – 70	50
70 – 80	25
80 – 90	10
90 – 100	5

శరత్ : పరీక్షకు ఎంత మంది అభ్యర్థులు పోటీపడ్డారు?

శంకర్: ఈ సమాచారం ప్రకారం 1000 మంది పోటీ పరీక్షను వ్రాసారు.

శరత్ : ఇది చూసావా ? 50 నుండి 60 లోపు మార్కులు సాధించిన వారే 360 మంది ఉన్నారు.

శంకర్: ఆహా! ఉత్తీర్ణతా మార్కులు 60 గా నిర్ణయిస్తే ఎంతమందికి ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలుపు వస్తుందనుకొంటున్నావు ?

శరత్ : అంటే, 60 మార్కులు, అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు ఎంతమంది అభ్యర్థులు అని నీ ఉద్దేశ్యమా?

శంకర్ : అవును, గమనిస్తే 50 + 25 + 10 + 5, అంటే 90 మందికి ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలుపు వస్తుంది కదా.

శరత్ : కానీ 105 ఖాళీలను భర్తీ చేయాలి కదా, అంటే 50 మార్కులను ఉత్తీర్ణతా మార్కులుగా తీసుకుంటారో ఏమో.

శంకర్: అయితే, 360 + 50 + 25 + 10 + 5 అయితే 450 మంది అభ్యర్థులకు ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలుపు రావచ్చును.

అదే విధంగా మనము కూడా మరికొన్ని అంచనాలను చేయవచ్చును.

90 మార్కులు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన అభ్యర్థులు (దిగువ హద్దు) = 5

9వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు = 10 + 5 = 15

8వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు = 25 + 15 = 40

7వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు = 50 + 40 = 90

ఈ ఫలితాన్నీ వరుస పౌనఃపున్యముల మొత్తమునకు సమానం. కావున వీటిని సంచిత పౌనఃపున్యములు ఆయా తరగతుల దిగువ హద్దుకు సమానం లేక అంతకన్నా ఎక్కువ విలువ గల దత్తాంశములో అన్ని రాశుల సంఖ్యను తెలుపుతాయి. వీటిని అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు (అ.స.పౌ) అంటారు. దత్తాంశములోని అన్ని తరగతులకు ఈ సంచిత పౌనఃపున్యములను ఎట్లు వ్రాయవచ్చునో పరిశీలిద్దాము.

1. చివరి తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యమును ఆ తరగతి యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనః పున్యముగా తీసుకొనవలెను.
2. 9వ తరగతి అంతరం యొక్క పౌనఃపున్యమును 10వ తరగతి అంతరం యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య ను కలుపగా 9వ తరగతి అంతరం యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనః పున్యము అవుతుంది.
3. ఇదే విధంగా వరుసగా క్రింది తరగతులకు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయవచ్చును.

తరగతులు (మార్కులు)	దిగువ హద్దు	పౌనఃపున్యము (అభ్యర్థుల సంఖ్య)	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
0 – 10	0	25	25+975 = 1000
10 – 20	10	45	45+930 = 975
20 – 30	20	60	60+870 = 930
30 – 40	30	120	120+750 = 870
40 – 50	40	300	300+450 = 750
50 – 60	50	360	360+ 90 = 450
60 – 70	60	50	50 + 40 = 90
70 – 80	70	25	25 + 15 = 40
80 – 90	80	10	10 + 5 = 15
90 – 100	90	5	5

ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో ఏదయినా ఒక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దుకు సమానం లేక అంతకన్నా ఎక్కువ విలువ గల దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల సంఖ్యను అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు.

ఇదే విధంగా కొన్ని సందర్భాలలో ఇందుకు వ్యతిరేకముగా ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము లెక్కించవలసి వస్తుంది. ఉదాహరణకు ఒక ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతిలో ఒక స్థాయి మార్కులు కన్నా తక్కువ మార్కులు సాధించిన వారికి ప్రత్యేక తరగతులు నిర్వహించవలెనని భావిస్తే, ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం లెక్కించాలి.

మొదటి తరగతి ఎగువ హద్దు నుండి పౌనఃపున్యాలను వరుసగా తరవాత తరగతుల పౌనఃపున్యాల కలుపుగా వచ్చే విలువలను ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం (ఆ.స.పౌ) అంటారు.

తరగతి అంతరం మార్కులు	ఎగువ హద్దు	విద్యార్థుల సంఖ్య పౌనఃపున్యం	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
0 – 5	5	7	7
5 – 10	10	10	10+7 = 17
10 – 15	15	15	15+17 = 32
15 – 20	20	8	8+32 = 40
20 – 25	25	3	3+40 = 43

43 మంది విద్యార్థుల మార్కులు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను ఎట్లు వ్రాయవలెనో పరిశీలిద్దాము.

1. మొదటి తరగతి పౌనఃపున్యము ఆ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది.
2. రెండవ తరగతి పౌనఃపున్యముకు 1వ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము కలుపగా అది రెండవ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది.

3. ఇదేవిధంగా వరుస పౌనఃపున్యములను కలుపుతూ ఆ వరుస ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయవచ్చును.

> ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో ఏదయినా ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు కన్నా తక్కువ విలువ గల దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల సంఖ్యను ఆ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు.

ప్రయత్నించండి.

1. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము _______________ తో సంబంధము కలిగి ఉంటుంది.
2. అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము _______________ తో సంబంధము కలిగి ఉంటుంది.
3. క్రింది దత్తాంశమునకు ఆరోహణ, అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలు వ్రాయండి.

తరగతి	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
పౌనఃపున్యం	4	7	12	5	2

4. పై దత్తాంశములో పౌనఃపున్యముల మొత్తం (రాశుల సంఖ్య) ఎంత? చివరి తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము ఎంత? నీవేమి చెప్పగలవు?

ఉదాహరణ 14: కొందరు విద్యార్థుల మార్కులు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము రూపంలో ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన వివిధ తరగతుల యొక్క పౌనఃపున్యములు మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి. మొత్తం విద్యార్థులు ఎంతమంది?

తరగతి (మార్కులు)	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
ఆ.సం.పౌ(విద్యార్థుల సంఖ్య)	12	27	54	67	75

సాధన:

తరగతులు (మార్కులు)	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య)	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
1 – 10	12	12	12 + 63 = 75
11 – 20	27	27 - 12 = 15	15 + 48 = 63
21 – 30	54	54 - 27 = 27	27 + 21 = 48
31 – 40	67	67 - 54 = 13	13 + 8 = 21
41 – 50	75	75 - 67 = 8	8

మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య అనగా పౌనఃపున్యముల మొత్తము లేక చివరి తరగతి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం లేక మొదటి తరగతి అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము 75 కి సమానం అని గమనించండి.

అభ్యాసము - 7.2

1. ఒక కాలనీలోని 45 మంది యొక్క వయస్సులు క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

33	8	7	25	31	26	5	50	25	48	56
33	28	22	15	62	59	16	14	19	24	35
26	9	12	46	15	42	63	32	5	22	11
42	23	52	48	62	10	24	43	51	37	48
36										

6 తరగతులు ఉండునట్లుగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము తయారు చేయండి.

2. ఒక పాఠశాలలోని 30 తరగతులలో విద్యార్థుల సంఖ్యలు ఇవ్వబడ్డాయి. తరగతి పొడవు 4 (విద్యార్థులు) ఉండునట్లుగా ఈ దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారు చేయండి.

25	30	24	18	21	24	32	34	22	20	22
32	40	28	30	22	26	31	34	15	38	28
20	16	15	20	24	30	25	18			

3. ఒక వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడిన తరగతులు 4 – 11, 12 – 19, 20 – 27, 28 – 35, 36 – 43. అయిన (i) తరువాత రెండు తరగతులను వ్రాయండి. (ii) తరగతి హద్దులు వ్రాయండి.

4. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు తరగతి మార్కులు (మధ్య విలువలు) ఇవ్వబడ్డాయి.

తరగతి మార్కులు	10	22	34	46	58	70
పౌనఃపున్యము	6	14	20	21	9	5

(i) దత్తాంశమునకు మినహాయింపు తరగతులను నిర్మించండి.

(ii) ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయండి.

(iii) అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయండి.

5. 35 మంది విద్యార్థులకు సాంఖ్యక శాస్త్ర పరీక్షలో 50 మార్కులకు గాను సాధించిన మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

35	1	15	35	45	23	31	40	21	13	15
20	47	48	42	34	43	45	33	37	11	13
27	18	12	37	39	38	16	13	18	5	41
47	43									

పై దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారు చేయండి. విభాజన చేయు తరగతులతో ఒకటి 10-20 ఉండవలెను. (20 ఆ తరగతికి చెందకూడదు).

6. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు తరగతి హద్దులు వ్రాయండి. ఆరోహణ మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు కనుగొనండి.

వయస్సు	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15
పిల్లల సంఖ్య	10	12	15	13	9

7. క్రింది విభాజన పట్టికలో సంచిత పౌనఃపున్యములు ఇవ్వబడ్డాయి. ఎటువంటి సంచిత పౌనఃపున్యమో గుర్తించండి. పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి.

పరుగులు	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ సంఖ్య	3	8	19	25	30

8. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు ఇవ్వబడ్డాయి. అయితే అన్ని తరగతులకు పౌనఃపున్యములు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి.

పుస్తకముల సంఖ్య	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	42	36	23	14	6

7.4 రేఖాచిత్రాలతో దత్తాంశ ప్రదర్శన

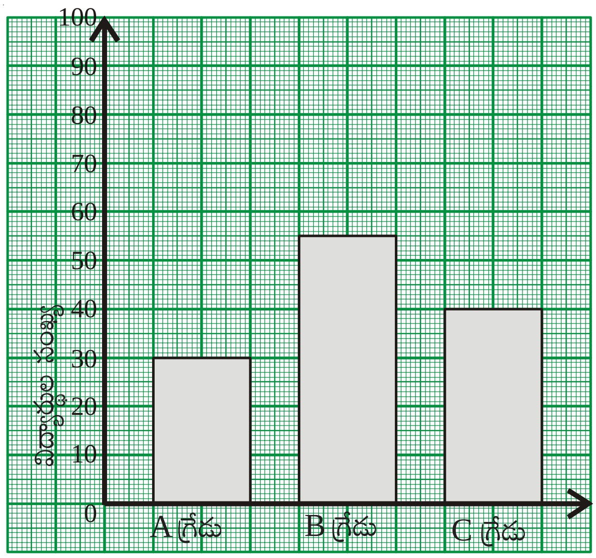
ఒక దత్తాంశములోని రాశులను పౌనఃపున్యములతో గానీ లేక తరగతులను పౌనఃపున్యములతో గాని అమర్చి వ్రాసిన అమరికను పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక అంటారు.

అవిభాజ్యత దత్తాంశమును పటచిత్రాలు, కమ్మీ రేఖా చిత్రము, రెండు కమ్మీల రేఖాచిత్రము, పై రేఖాచిత్రములుగా చూపుట గురించి క్రింది తరగతులలో చర్చించి ఉన్నాము.

ఇదేవిధంగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము సోపాన చిత్రమును గీయుట గూర్చి చర్చిద్దాము. ముందుగా కమ్మీ రేఖా చిత్రముల గూర్చి పునర్విమర్శ చేసుకొందాము.

7.4.1 కమ్మీ రేఖాచిత్రము

సమాన మధ్యదూరములు కలిగి, సమాన వెడల్పుల, పౌనః పున్యములకు అనుపాతములో పొడవులు గల కమ్మీలతో దత్తాంశమును చూపు రేఖా చిత్రమును కమ్మీ రేఖా చిత్రము అంటారు.



పరీక్షలో సాధన

క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములను చర్చించుట ద్వారా కమ్మీ రేఖా చిత్రములు యొక్క ఏయే అంశములను గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చునో పునర్విమర్శ చేయండి.

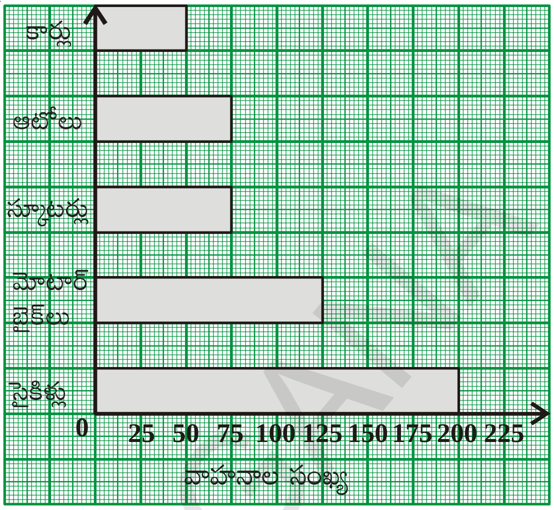
(i) ప్రక్క కమ్మీ రేఖాచిత్రము ప్రకటించు వివరాలేవి?

(ii) ఎంతెంత మంది విద్యార్థులు A, B లేక C గ్రేడులు సాధించారు?

(iii) ఎక్కువ మంది సాధించిన గ్రేడు ఏమిటి?

(iv) తరగతిలో ఎంత మంది విద్యార్థులు కలరు?

ఇదేవిధంగా కొన్ని సందర్భములలో అడ్డు కమ్మీ రేఖా చిత్రములు కూడా ఉపయోగిస్తాము. ఉదాహరణకు ప్రక్క పటంలో అడ్డు కమ్మీల ద్వారా నెల్లూరు జిల్లాలోని సంగం గ్రామములో 2010లో గల వాహనముల వివరాలు తెలుపబడ్డాయి.



ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి.

1. ఒక కమ్మీ రేఖా చిత్రములో అన్ని కమ్మీల

   (a) పొడవులు సమానం (b) వెడల్పులు సమానం (c) వైశాల్యములు సమానం (d) విలువలు సమానం

2. ఒక కమ్మీ రేఖా చిత్రంలో ప్రతి కమ్మీ యొక్క పొడవు మిగిలిన కమ్మీల పొడవుపై ఆధారపడి ఉంటుందా?

3. ఏదైనా ఒక కమ్మీలో చేసిన మార్పు మిగిలిన కమ్మీలలో మార్పును కలుగజేస్తుందా?

4. ఏయే సందర్భములలో నిలువు కమ్మీ లేక అడ్డు కమ్మీ రేఖ చిత్రాలను ఉపయోగిస్తాము?

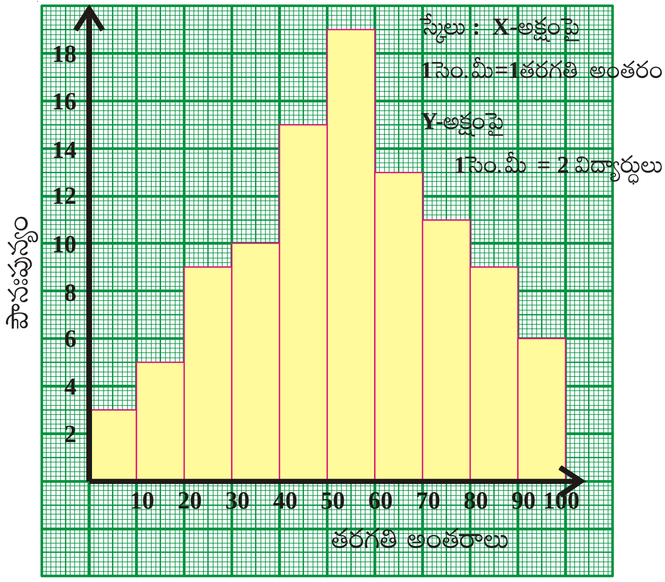
7.5 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములకు రేఖా చిత్రములు

అవిభాజ్య శ్రేఢి (మినహాయింపు తరగతులు) గల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు గీయు రేఖా చిత్రములలో మొదటిది సోపాన రేఖా చిత్రము

7.5.1 సోపాన రేఖా చిత్రము (Histogram)

7.5.1.1 సోపాన రేఖా చిత్రముపై అవగాహన

ఇవ్వబడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన రేఖా చిత్రము గీయబడినది. పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు రాబట్టండి.



తరగతి అంతరాలు (మార్కులు)	పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య)
0 – 10	3
10 – 20	5
20 – 30	9
30 – 40	10
40 – 50	15
50 – 60	19
60 – 70	13
70 – 80	11
80 – 90	9
90 -100	6

(i) రేఖా చిత్రములో ఎన్ని తరగతి అంతరాలు ఉన్నవి ?

(ii) దీర్ఘచతురస్రాల పొడవులు దేనికి అనుపాతములో ఉన్నవి?

(iii) అన్ని దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు సమానం. కారణమేమి?

(iv) రేఖా చిత్రములోని ఏ రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు అయినా పరస్పర స్థాన భ్రంశం చేయవచ్చునా?

పై రేఖాచిత్రము నుండి నీవు గ్రహించినది:

(i) పౌనఃపున్య విభాజనములోని 10 తరగతులకు రేఖా చిత్రములో 10 దీర్ఘచతురస్రాలు ఉన్నవి.

(ii) దీర్ఘచతురస్రాల యొక్క పొడవులు, దీర్ఘచతురస్రాలచే సూచించబడు పౌనఃపున్యములకు అనుపాతములో ఉన్నవి.

(iii) అన్ని తరగతుల అంతరములు సమానములు కావున వాటిని సూచించు దీర్ఘచతురస్రాలు వెడల్పులు సమానములు.

(iv) దత్తాంశము అవిభాజ్య శ్రేఢి కావున వరుస తరగతులు అదే వరుసలో దీర్ఘచతురస్రాలను సూచిస్తాయి. కావున ఏ రెండు దీర్ఘచతురస్రాలను అయినా పరస్పర స్థానభ్రంశం చేయరాదు.

ప్రయత్నించండి.

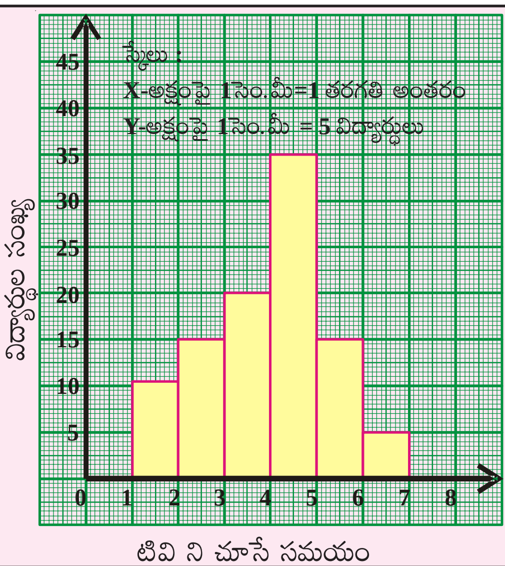
ప్రక్క సోపాన రేఖా చిత్రమును పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.

(i) ఈ సోపాన రేఖా చిత్రము ఏ సమాచా రమును సూచిస్తున్నది?

(ii) ఏ తరగతి నందు గరిష్ట సంఖ్యలో విద్యా ర్థులు కలరు?

(iii) ఎంతమంది మంది విద్యార్థులు 5 గంటలు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సమయం TV ను వీక్షిస్తున్నారు?

(iv) ఎంతమంది విద్యార్థులపై సర్వే నిర్వహించబడినది ?



7.5.1.2 సోపాన రేఖా చిత్ర నిర్మాణము

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము రూపములో ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును సోపాన రేఖా చిత్రము వలె ఎట్లు సూచించవలెనో ఉదాహరణ పూర్వకంగా తెలుసుకుందాం.

ఒక TV కేంద్రం వారు వారి ప్రసారములను ఎంతమంది తిలకిస్తున్నారో తెలుసుకోవాలని అనుకొన్నారు. ఒక అపార్టుమెంటులో చేసిన సర్వే వివరాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రం నిర్మించుదాం.

తరగతి అంతరం (వయస్సు)	పౌనఃపున్యం (వీక్షకుల సంఖ్య)	తరగతి అంతరం
11 – 20	10	10.5 – 20.5
21 – 30	15	20.5 – 30.5
31 – 40	25	30.5 – 40.5
41 – 50	30	40.5 – 50.5
51 – 60	20	50.5 – 60.5
61 – 70	5	60.5 – 70.5
అవధులు		హద్దులు

సోపానం1: ఇచ్చి దత్తాంశములో సమ్మిళిత తరగతులు ఉంటే వాటికి మినహాయింపు తరగతులు (హద్దులు) వ్రాయవలెను.

సోపానం 2:సరియైన సూచికను తీసుకొని x-అక్షంపై తరగతి అంతరాలను గుర్తించవలెను.

సోపానం 3: సరియైన సూచికను తీసుకొని y-అక్షముపై పౌనఃపున్యములను గుర్తించవలెను.

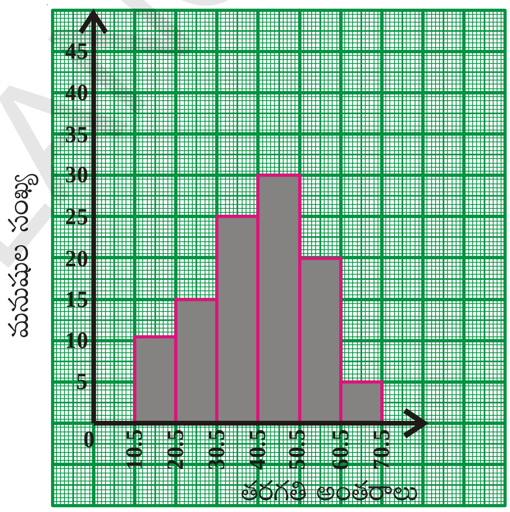
సూచిక : X-అక్షం 1సెం.మీ = 1 తరగతి

Y-అక్షం 1 సెం.మీ = 5 మంది

సోపానం4: తరగతి అంతరము వెడల్పుతో వరుస పౌనః పున్యములకు అనుపాత పొడవులతో దీర్ఘ చతురస్రాలను నిర్మించవలెను.

స్కేలు : **X**-అక్షంపై **1**సెం.మీ = **1** తరగతి అంతరం

Y-అక్షంపై **1**సెం.మీ = **5** గురు మనుషులు



7.5.1.3 విభిన్న వెడల్పులు గల భూములతో సోపాన రేఖాచిత్రము

ఒక పాఠశాలలోని SSC విద్యార్థుల ఉత్తీర్ణతా వివరాలు క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

కేటగిరి	తరగతి అంతరాలు(మార్కులు)	విద్యార్థుల సంఖ్య శాతం
ఉత్తీర్ణులుకానివారు	0-35	28
తృతీయ శ్రేణి విద్యార్థులు	35-50	12
ద్వితీయ శ్రేణి విద్యార్థులు	50-60	16
ప్రథమ శ్రేణి విద్యార్థులు	60-100	44

పట్టికలో దత్తాంశమును పరిశీలిస్తే తరగతి అంతరములు వేరువేరుగా ఉన్నవి. మొదటి శ్రేణి విద్యార్థులు 44 % శాతం అయినను వారి విస్తరణ 40 (60 నుండి 100 వరకు) మాత్రమే. ద్వితీయ శ్రేణి విద్యార్థులు 16% అయినను వారి విస్తరణ 10 (50 నుండి 60 వరకు). కావున ఇటువంటి విస్తరణలకు పౌనఃపున్య సోపాన రేఖాచిత్రం గీయునప్పుడు తరగతి అంతరముల వెడల్పులు పరిగణలోనికి తీసుకోవలెను.

రెండు రాశులను పోల్చుటకు వాని మధ్య కనీసం ఒక లక్షణంలో సారూప్యత అవసరం. అందువల్ల 'పౌనఃపున్య సాంద్రత' అనగా ప్రమాణ తరగతి అంతరమునకు పౌనఃపున్యమును లెక్కించి వానితో సోపాన చిత్రమును నిర్మించుట సరియైనది. అనగా సోపాన చిత్రంలోని ఒక్కొక్క సోపానం పొడవు సంబంధిత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్య సాంద్రతకు అనుపాతంలో ఉండవలెను.

$$\therefore \text{ పౌనఃపున్య సాంద్రత } = \frac{\text{ఒక తరగతి పౌనఃపున్యం}}{\text{ఆ తరగతి పొడవు}} \times \text{ దత్తాంశములో తరగతుల కనిష్ఠ పొడవు}$$

తరగతి (మార్కులు)	పౌనఃపున్యము (విద్యార్థుల శాతం)	తరగతి పొడవు	దీర్ఘచతురస్రం పొడవు (పౌనఃపున్య సాంద్రత)
0 – 35	28	35	$\frac{28}{35} \times 10 = 8$
35 – 50	12	15	$\frac{12}{15} \times 10 = 8$
50 – 60	16	10	$\frac{16}{10} \times 10 = 16$
60 – 100	44	40	$\frac{44}{40} \times 10 = 11$

లెక్కించిన పౌనఃపున్యములతో ముందు ఉదాహరణలో వలె సోపాన చిత్రమును నిర్మించవలెను.

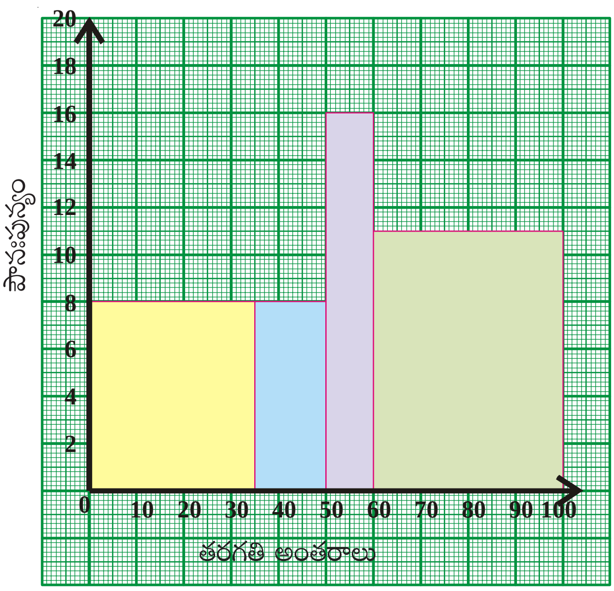
సోపానం 1: సరియైన సూచికను గుర్తించి X-అక్షముపై తరగతి అంతరాలు గుర్తించండి.

సోపానం 2: సరియైన సూచికను గుర్తించి Y- అక్షముపై పౌనఃపున్యములు గుర్తించండి.

సూచిక: X-అక్షము: 1 సెం.మీ = 1 కనిష్ట తరగతి అంతరం

Y-అక్షము: 1 సెం.మీ = 2 %

సోపానం 3: వివిధ తరగతి అంతరాలు భూములుగా (వెడల్పులుగా), సంబంధిత పౌనఃపున్య సాంద్రతలు పొడవులుగా దీర్ఘచతురస్రాలు నిర్మించండి.



7.5.1.4 తరగతి మధ్య విలువలతో ఇవ్వబడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన చిత్రము

ఉదాహరణ 15: 8వ తరగతిలోని 65 మంది విద్యార్థులు పొందిన మొత్తం మార్కుల వివరాలు క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి. సోపాన చిత్రం నిర్మించండి.

తరగతి (మధ్యవిలువలు)	150	160	170	180	190	200
పౌనఃపున్యం(విద్యార్థుల సంఖ్య)	8	10	25	12	7	3

సాధన: ఇవ్వబడిన తరగతి మార్కు (మధ్యవిలువ)ల నుండి తరగతులను తయారు చేసుకొనవలెను.

సోపానం 1: రెండు వరుస తరగతుల మధ్య విలువల మధ్య బేధం లెక్కించవలెను. h = 160 -150 = 10.

(ప్రతి రెండు వరుస తరగతుల మధ్యబేధము సమానమేనా?)

సోపానం 2: తరగతుల యొక్క దిగువ, ఎగువ హద్దులను తరగతి మధ్యవిలువ x గా తీసుకొని $x - \frac{h}{2}$ నుండి $x + \frac{h}{2}$ లోపు నిర్ణయించవలెను.

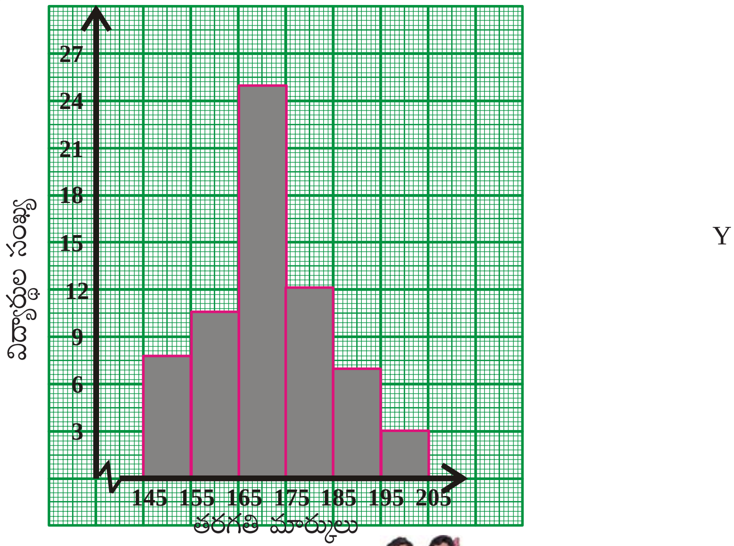
సోపానం 3: సరియైన సూచికను ఎన్నుకొనవలెను.

X- అక్షము 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

Y- అక్షము 1సెం.మీ = 4 విద్యార్థులు

సోపానం 4: తరగతి అంతరాలను వెడల్పులుగా, పౌనఃపున్యములు పొడవులుగా వరుస సోపానములు నిర్మించవలెను.

తరగతి మార్కులు (x)	తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యం విద్యార్థుల సంఖ్య
150	145 – 155	8
160	155 – 165	10
170	165 – 175	25
180	175 – 185	12
190	185 – 195	7
200	195 – 205	3



ఆలోచించండి, చర్చించండి.

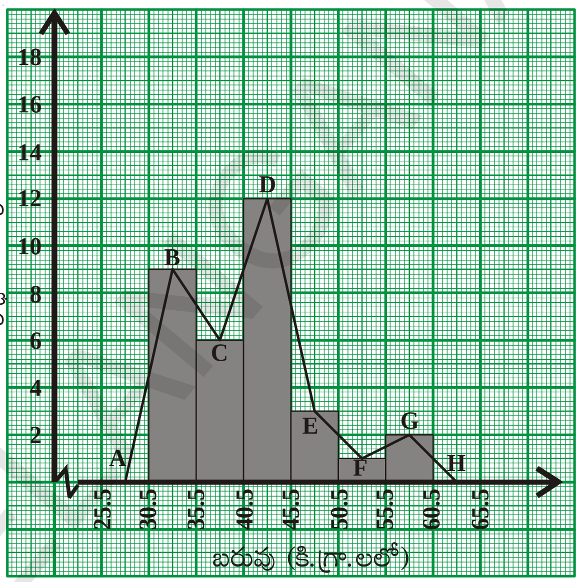
1. సోపాన చిత్రంలో X –అక్షంపై తరగతి యొక్క హద్దులు గుర్తిస్తాం. కాని అవధులు కాదు. ఎందువల్ల?
2. సోపాన చిత్రంలో దీర్ఘచతురస్రాలు వెడల్పులను నిర్ణయించు అంశమేది?
3. అన్ని దీర్ఘచతురస్రాల పొడవుల మొత్తం దేనిని సూచిస్తుంది?

7.5.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి

7.5.2.1 పౌనఃపున్య బహుభుజిపై వ్యాఖ్యానించుట

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును సూచించుటకు సోపాన రేఖా చిత్రము కంటే మెరుగైన రేఖా పటము పౌనఃపున్య బహుభుజి. ప్రక్క సోపాన చిత్రములో ఒక తరగతిలోని 33 మంది విద్యార్థుల బరువుల వివరాలు ఇవ్వబడ్డాయి.

సోపానముల యొక్క పై వెడల్పు యొక్క మధ్య బిందువులు B, C, D, E, F, G లు గుర్తించి రేఖా ఖండములతో కలుపబడ్డాయి. ఇచ్చిన తరగతులకు ముందు ఒకటి, తరువాత ఒకటి తరగతులను 'O' పౌనఃపున్యముతో ఊహించి వాని మధ్య బిందువులు కలిపితే BCDEFG పటము వస్తుంది. బహుభుజి పూర్తి చేయడానికి 30.5-35.5 తరగతి ముందు తరగతి పౌనఃపున్యం, 55.5 - 60.5 తరగతి తరవాత తరగతి పౌనఃపున్యం సున్నాలుగా తీసుకొని వాటిని A, H బిందువులుగా గుర్తించి కలుపుతాం. అప్పుడు ABCDEFGH పౌనఃపున్య బహుభుజి వస్తుంది.



పరిశీలించినచో సోపాన చిత్ర వైశాల్యము బహుభుజి వైశాల్యము సమానములని తెలియుచున్నది కదా!

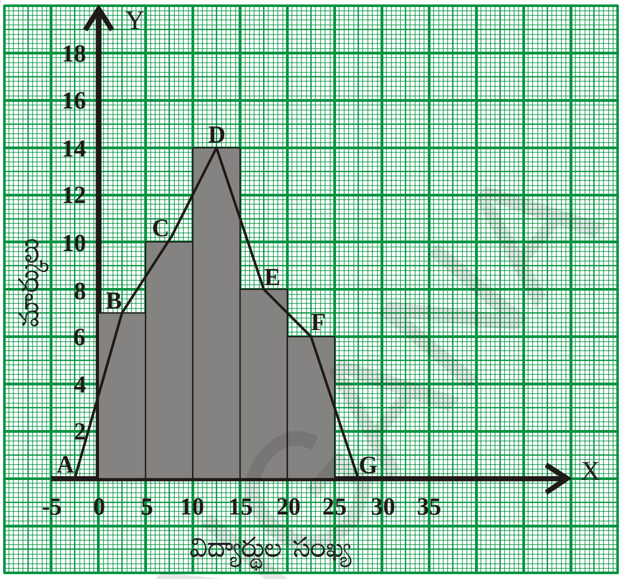
ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

1. దత్తాంశములోని మొదటి తరగతికి ముందు తరగతి లేనిచో బహుభుజిని ఎట్లు పూరించగలవు ?
2. ఒక దత్తాంశము యొక్క సోపాన రేఖా చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానము. ఎట్లు?
3. పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మాణమునకు ముందుగా సోపాన చిత్రము నిర్మించవలెనా?
4. విభాజిత శ్రేఢి / అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు 'పౌనఃపున్య బహుభుజి'ని గీయగలమా?

7.5.2.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మాణము

ఒక తరగతిలోని 45 మంది విద్యార్థులు ఒక పరీక్షలో సాధించిన మార్కులు (గరిష్టం 25)క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మిద్దాము.

తరగతి అంతరాలు (మార్కులు)	పౌనఃపున్యము (విద్యార్థుల సంఖ్య)	మధ్య విలువలు
0-5	7	2.5
5-10	10	7.5
10-15	14	12.5
15-20	8	17.5
20-25	6	22.5
Total	45	



నిర్మాణ సోపానములు

సోపానం 1: తరగతి మధ్యవిలువలను గణించవలెను.

సోపానం 2: దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రమును నిర్మించి ప్రతి సోపానము యొక్క పై వెడుల్పుల మధ్య బిందువులు B, C, D, E, F లను గుర్తించి కలుపవలెను.

సోపానం 3: తరగతుల యొక్క ముందు తరగతి, తరువాత తరగతులను ఊహించి వాని పౌనఃపున్యములు '0' గా తీసుకొని తరగతి మధ్యవిలువలు గుర్తించవలెను.

సోపానం 4: మొదటి తరగతికి ముందు తరగతిని, చివరి తరగతికి తరువాత తరగతులను ఊహించుకోండి. అంటే 0 - 5 తరగతికి ముందు తరగతి X-అక్షమునకు ఋణాత్మక దిశలో – 5 – 0 గా తీసుకోండి. అదే విధంగా 20 - 25 తరగతికి తరవాత తరగతి 25-30 గా తీసుకోండి. వీటి మధ్య విలువలను A, G లుగా గుర్తించండి.

సోపానం5: ఇప్పుడు B బిందువును A తోనూ, F బిందువును G తోనూ కలిపితే పౌనఃపున్య బహుభుజి ఏర్పడుతుంది. పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించుటకు ప్రతిసారి సోపాన రేఖా చిత్రము నిర్మించవసరము లేదు. దీనికి బదులుగా తరగతి మధ్య విలువలను, పౌనఃపున్యములను ఉపయోగించి పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించవలెను.

ఇవి చేయండి :

1. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములకు పౌనఃపున్య బహుభుజులు నిర్మించండి.

(i) ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల మధ్య జరిగిన స్నేహపూర్వక క్రికెట్ ఆట నందు వారి పరుగుల వివరాలు

చేసిన పరుగులు	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	5	8	4	2

(ii) ఒక నాటక ప్రదర్శన కొరకు అమ్మిన టిక్కెట్ల వివరాలు

టిక్కెట్టు రేటు	10	15	20	25	30
టిక్కెట్ల సంఖ్య	50	30	60	30	20

7.5.2.3 పౌనఃపున్య బహుభుజి యొక్క ముఖ్యలక్షణాలు :

1. విభాజిత / అవిభాజిత దత్తాంశములను పౌనఃపున్య బహుభుజి వలె సూచింపవచ్చును.
2. తరగతి మధ్యవిలువలను X- అక్షముపై సంబంధిత పౌనఃపున్యములను Y- అక్షముపై గుర్తించి పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించవలెను.
3. ఒకే దత్తాంశమునకు గీయబడిన సోపాన రేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానం.

ఆలోచించండి, చర్చించండి మరియు వ్రాయండి.

1. సోపాన రేఖా చిత్రము నందు ఒక తరగతిలోని విడివిడి రాశులకు పౌనఃపున్యములను విడివిడిగా గుర్తించవచ్చునా?
2. పౌనఃపున్య బహుభుజి నుండి ఒక తరగతిలోని ఒక ప్రత్యేక రాశి విలువకు పౌనఃపున్యమును కనుగొనవచ్చునా?

7.5.2.4 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించుట (సోపాన రేఖా చిత్రము నిర్మించకుండా)

డయాబెటిస్ వ్యాధిగ్రస్తులపై జరిపిన సర్వేలోని కొన్ని వివరాలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మిద్దాం.

వయస్సు	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య	5	9	16	11	3

సోపానచిత్రం నిర్మించకుండానే పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించడం తెలుసుకుందాం.

సోపానం 1: తరగతుల మధ్య విలువలు గుర్తించాలి.

సోపానం 2: సూచికను నిర్ణయించవలెను.

X-అక్షము 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరము

Y-అక్షము 1 సెం.మీ = 2 మార్కులు

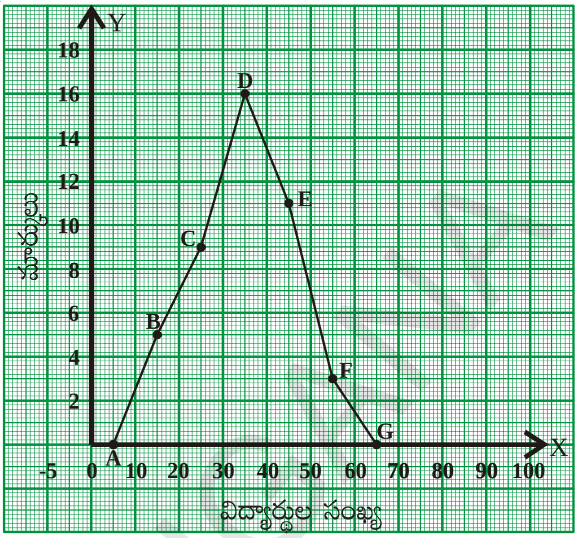
సోపానం 3: తరగతి మధ్యవిలువలు 'x' మరియు ఆ తరగతి పౌనఃపున్యము f అయిన బిందువు ('x', f) ను గ్రాఫు కాగితంపై గుర్తించవలెను.

సోపానం 4: అన్ని తరగతులకు బిందువులు గుర్తించి వరుసగా కలుపవలెను.

సోపానం 5: దత్తాంశములోని మొదటి తరగతి కన్నా ఒక తరగతి, చివరి తరగతి తరువాత ఒక తరగతిని 'సున్నా' పౌనఃపున్యములో ఊహించి వాని తరగతి మధ్యవిలువలను గ్రాఫుపై గుర్తించవలెను.

సోపానం 6: అన్ని మధ్య బిందువులను కలిపి బహుభుజి పూర్తిచేయవలెను.

తరగతిఅంతరాలు (వయస్సు)	వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య	తరగతి మధ్యవిలువ	బిందువులు
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35, 16)
40 – 50	11	45	(45, 11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.3 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనంనకు పౌనఃపున్య వక్రము

పౌనఃపున్య విభాజనములోని తరగతి మధ్య బిందువులను ఆ తరగతుల పౌనఃపున్యములను తీసుకొని నిర్మించు వక్రమును పౌనఃపున్య వక్రము అంటారు.

పైన చర్చించిన దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య వక్రము నిర్మించు సోపానములు గమనించండి.

సోపానం 1: తరగతుల మధ్యవిలువలు గుర్తించాలి.

సోపానం 2: సూచికను నిర్ణయించవలెను.

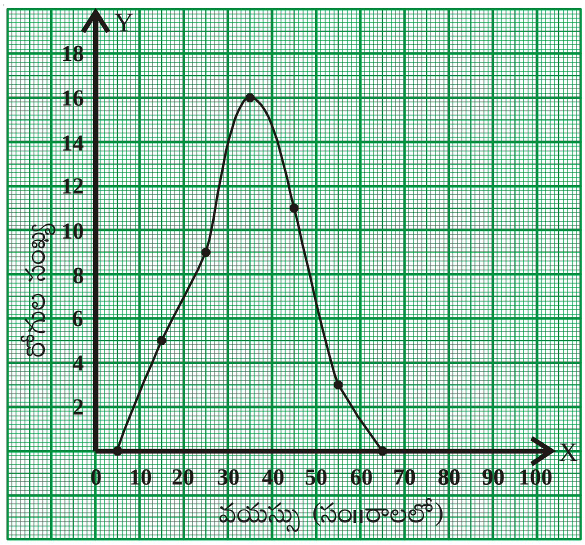
X-అక్షము 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

Y-అక్షము 1 సెం.మీ = 2 మార్కులు

సోపానం 3: తరగతి మధ్యవిలువ 'x' మరియు ఆ తరగతి పౌనఃపున్యం f అయిన బిందువు (x, f) ను గ్రాఫు కాగితంపై గుర్తించాలి.

సోపానం 4: అన్ని తరగతులకు బిందువులను గుర్తించి, ఆ వరుస బిందువుల గుండా సున్నిత వక్రము గీయాలి.

తరగతి అంతరం (వయస్సు)	వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య	తరగతి మధ్య విలువ	బిందువులు
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35,16)
40 – 50	11	45	(45,11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.4 సంచిత పౌనఃపున్య వక్రాల రేఖాచిత్రాలు

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందలి దిగువ / ఎగువ హద్దులను, సంచిత పౌనఃపున్యములకు గీయు సున్నిత వక్రమును 'సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము' లేక 'ఓజివ్ వక్రము' అంటారు. ఒక అవిచ్ఛిన్న శ్రేఢి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము నుండి, దత్తాంశములోని ఏదైనా ఒక హద్దు వరకు లేక ఒక హద్దు నుండి దత్తాంశం చివరి వరకు ఎన్ని రాశులు కలవో తెలుసుకొనవచ్చును.

7.5.4.1 ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము

ఒక డిపార్టుమెంటు నందు భవన నిర్మాణ పనులు కొరకై గుత్తేదారులు ధరఖాస్తులు (tenders) క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

తరగతి (రోజులు)	0 – 4	4 - 8	8 - 12	12 – 16	16 – 20
ధరఖాస్తులు (tenders)	2	5	12	10	3

సోపానం 1: ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని తరగతులు సమ్మిళిత తరగతులయితే, మినహాయింపు తరగతులుగా మార్చవలెను.

సోపానం 2: ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలను గణించవలెను

సోపానం 3: X – అక్షంపై ఎగువ హద్దుల, Y- అక్షంపై ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు గుర్తించాలి.

సూచిక :

X-అక్షం 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

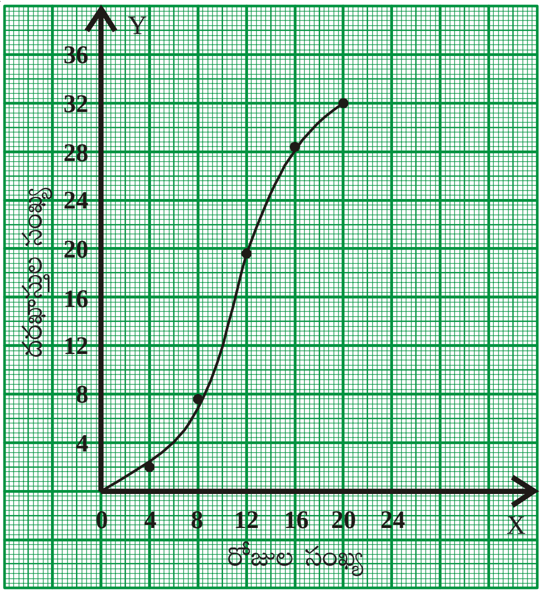
Y-అక్షం 1 సెం.మీ= 4 ధరఖాస్తులు

సోపానం 4: మొదటి తరగతి దిగువ హద్దు (ఊహించిన ముందు తరగతి యొక్క ఎగువహద్దు) పౌనఃపున్యము '0' తో బిందువును గుర్తించవలెను..

సోపానం 5: అన్ని బిందువులను వరుసగా సున్నిత వక్రముచే కలుపవలెను. ఈ వక్రమును 'ఓజివ్ వక్రము' అంటారు.

ఇదేవిధంగా తరగతి ఎగువ హద్దులను X-అక్షంపై ఆ తరగతుల అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను Y-అక్షంపై గుర్తించి 'అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము' లేక 'ఓజివ్ వక్రము'ను గీయవచ్చును.

తరగతులు (రోజులు)	దరఖాస్తుల సంఖ్య	ఎగువ హద్దు	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
0 – 4	2	4	2
4 – 8	5	8	7
8 – 12	12	12	19
12 – 16	10	16	29
16 – 20	3	20	32



అభ్యాసము - 7.3

1. 45 మంది విద్యార్థుల యొక్క ప్రజ్ఞా సూచిక (IQ) స్థాయిలు ఇవ్వబడినవి క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన రేఖా చిత్రము నిర్మించండి.

తరగతి(IQ స్థాయి)	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	5	6	10	9	8	5

2. 7వ తరగతి వార్షిక పరీక్షలలో 600 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి. సోపాన రేఖా చిత్రమును నిర్మించండి.

మార్కులు	360	400	440	480	520	560
విద్యార్థుల సంఖ్య	100	125	140	95	80	60

3. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునందు 250 మంది శ్రామికుల ఒక వారపు వేతనాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిలను ఒకే గ్రాఫు నందు నిర్మించండి.

వారపు వేతనము	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
శ్రామికుల సంఖ్య	30	42	50	55	45	28

4. ఒక మండలములోని 60 మంది ప్రాథమిక పాఠశాల ఉపాధ్యాయుల వయస్సులు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజి, పౌనఃపున్య వక్రములను వేరువేరు గ్రాఫులపై నిర్మించండి.

వయస్సు	24 – 28	28 – 32	32 – 36	36 – 40	40 – 44	44 – 48
ఉపాధ్యాయులసంఖ్య	12	10	15	9	8	6

5. క్రింది దత్తాంశమునకు తరగతులు పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి. ఆ దత్తాంశమునకు ఓజివ్ వక్రములను రెండింటిని గీయండి.

మార్కులు	5 కన్న తక్కువ	10 కన్న తక్కువ	15 కన్న తక్కువ	20 కన్న తక్కువ	25 కన్న తక్కువ
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	8	18	27	35

మనం ఏమి చర్చించాం

1. రాశుల అంకగణిత మధ్యమము = $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ లేక $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ (సూక్ష్మ రూపం) ఇందు $\sum x_i$ అనేది అన్ని x_i ల మొత్తాన్ని తెలుపుతుంది. x_i లో 'i' విలువలు 1 నుండి n వరకు తీసుకొంటాం.

2. అంకగణిత మధ్యమము = ఊహించిన అంకగణిత మొత్తం + విచలనముల సరాసరి

   లేక $\bar{x} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{N}$

3. అంకగణిత మధ్యమమును సంఖ్యాత్మక దత్తాంశము విశ్లేషించుటకు ఉపయోగిస్తారు.

4. ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలోని దత్తాంశములో మధ్యమరాశిని మధ్యగతం అంటాం.

5. విశ్లేషణపై ప్రభావం చూపు అత్యల్ప / అత్యధిక (అంత్యరాశులు) రాశులు గల సంఖ్యాత్మక దత్తాంశమును విశ్లేషించుటకు మధ్యగతమును ఉపయోగిస్తారు.

6. దత్తాంశంలో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయిన రాశిని బాహుళకం అంటాం. ఒక దత్తాంశమునకు ఎక్కువ బాహుళకములు ఉండవచ్చును. అసలే లేకపోవచ్చును.

7. సంఖ్యాత్మక, వివరణాత్మక దత్తాంశములు రెండింటిలోనూ బాహుళకములు ఉపయోగిస్తాం.

8. దత్తాంశములోని రాశులను పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను 'పౌనఃపున్య విభాజనము' లేక 'విభాజన పట్టిక' అంటారు.

9. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల బేధమును ఆ తరగతి యొక్క 'తరగతి పొడవు' లేక 'తరగతి అంతరము' అంటారు. దీనిని C తో సూచిస్తారు.

10. దత్తాంశములో ఏదయినా ఒక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ విలువ గల దత్తాంశములోని అన్ని రాశులసంఖ్యను "అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము" అంటారు.

11. దత్తాంశములో ఏదయినా ఒక తరగతి యొక్క ఎగువహద్దు కన్నా తక్కువ విలువ గల దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల సంఖ్యను 'ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము' అంటారు.

12. ఒక తరగతిలో మొదటి విలువను దిగువ అవధి అని చివరి విలువను ఎగువ అవధి అని అంటారు.

13. ఒక తరగతిలో ఎగువ అవధి, తరవాత తరగతి దిగువ అవధుల సరాసరిని ఆ తరగతి ఎగువ హద్దు అంటారు.

14. ఒక తరగతిలో దిగువ అవధి, దాని ముందున్న తరగతి ఎగువ అవధుల సరాసరిని ఆ తరగతి దిగువ హద్దు అంటారు.

15. మినహాయింపు తరగతుల ఆధారంగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు గీచిన రేఖాచిత్రమును పౌనఃపున్య సోపానచిత్రము అంటారు.

16. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనం నందు తరగతి అంతరాలు వేర్వేరుగా ఉన్నప్పుడు సోపానా రేఖాచిత్రములోని దీర్ఘచతురస్రాలను పౌనఃపున్య సాంద్రత ఆధారం చేసుకొని నిర్మించాలి.

$$\text{పౌనఃపున్య సాంద్రత} = \frac{\text{తరగతి పౌనఃపున్యం}}{\text{ఆ తరగతి పొడవు}} \times \text{కనిష్ఠ తరగతి పొడవు}$$

17. విచ్ఛిన్న/అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల యొక్క తరగతి మధ్యవిలువలను పౌనపున్యములను తీసుకొని నిర్మించిన రేఖాచిత్రాన్ని పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు.

18. పౌనఃపున్య బహుభుజి/ వక్రం నందు X-అక్షంపై తరగతి మధ్య విలువలను Y-అక్షంపై పౌనః పున్యములను తీసుకోవాలి.

19. ఒకే దత్తాంశమునకు నిర్మించిన సోపానరేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానం.

20. ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలోని దిగువ లేదా ఎగువ హద్దులకు సంబంధిత సంచిత పౌనః పున్యాలను గుర్తించి గీచిన సున్నిత వక్రములను 'ఓజివ్ వక్రం' లేదా ఆరోహణ/అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం అంటారు.

హేతుబద్ధంగా ఆలోచించండి

కొన్ని రేఖాచిత్రాల, పటాల యొక్క దత్తాంశములను పరిశీలించి వ్యక్తుల యొక్క ఆలోచనా విధానం, అంతర్దృష్టిపై ఆధారపడి ఉంటాయి. క్రింది పటాలను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలివ్వండి. ఇచ్చిన సమాధానాలను తిరిగి సరిచూసుకోండి.

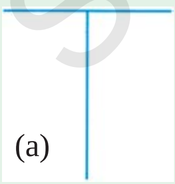
(a) అడ్డురేఖా, నిలువు రేఖలలో ఏది పొడవైనది?

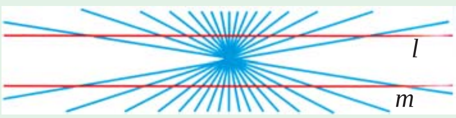
(b) l మరియు m రేఖలు సమాంతర రేఖాలేనా?

(c) $\overline{AB}$ లేదా $\overline{BC}$ రేఖాఖండాలలో ఏది పెద్దది?

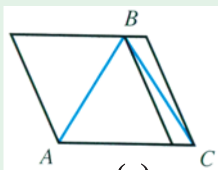
(d) పటంలో బహుభుజికి ఎన్ని భుజాలు ఉన్నాయి? ఇది చతురస్రమేనా?

(e) పటాన్ని క్రిందివైపుగా చూడండి. నాలుగు స్తంభాలు పైకి వస్తున్నట్లు కనిపించాయా? మరి చిన్న స్తంభాలు కూడా ఉన్నాయా? చెప్పండి.


(a)

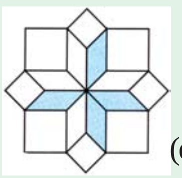


(b)



(c)


(d)


(e)

అధ్యాయం 8

జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ

8.0 పరిచయం

మనం నిత్యజీవితంలో అనేక జ్యామితి భావనలను చూస్తూ ఉంటాం. ప్రత్యక్ష్యం గానో లేక పరోక్షంగానో జ్యామితి తో సంబంధం గల అనేక వస్తువులు ఉన్నాయి. ఇవి జ్యామితి ధర్మాలు, అనువర్తనాలతో ముడిపడి ఉంటాయి. క్రింద నీయబడిన చిత్రాన్ని చూడండి. పటంలో ఇమిడియున్న వివిధ రకాలైన జ్యామితీయ పటాలు మరియు అమరిక వాటిలో కొన్ని సరూప పటాలు, మరికొన్ని సర్వసమాన పటాలు ఇంకా కొన్ని జ్యామితీయ క్రమాలు సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉండటాన్ని గమనించి యుంటావు. చిత్రంలోని సర్వసమాన పటాలు, సరూప పటాలు మరియు సౌష్ఠవ పటాలు లేదా క్రమాలను నీవు గుర్తించగలవా?

చిత్రంలోని సర్వసమాన పటాలు, సరూప పటాలు మరియు సౌష్ఠవ పటాలు లేదా క్రమాలు నీవు గుర్తించగలవా?

పై చిత్రంలో కిటికీల ఆకారాలన్నీ సర్వసమానాలు, ముందుభాగంలో ఉన్న త్రిభుజకార ఉన్నతులు సరూపాలు మరియు నేలపై పరచబడిన రాళ్ళ అమరికలు (రాతిపలకలరచన) సౌష్ఠవము.

ఈ అధ్యాయంలో పైన తెలుపబడిన జ్యామితీయ సూత్రాలు నిత్యజీవితంను ఎలా ప్రభావితం చేస్తాయో అధ్యయనం చేద్దాం.

8.1 సర్వసమానత్వం

ఒకే ఆకారము మరియు పరిమాణం గల వస్తువుల వాడకాన్ని మన నిత్యజీవితంలో నీవు గమనించే ఉంటావు. ఉదాహరణకు ఫ్యాను రెక్కలు అన్నీ ఒకే ఆకారాన్ని మరియు ఒకే పరిమాణాన్ని కలిగి యుంటాయి.

సర్వసమాన ఆకారాలకు నిత్య జీవితం నుండి మరొక ఉదాహరణ :

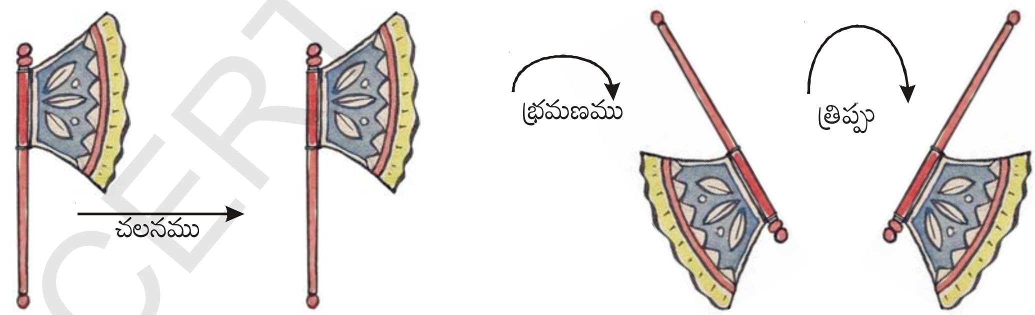
సీడీలు (C.D.) అమ్మే షాపుకు వెళ్ళి సీడీలను పరిశీలిస్తే, నీవేమి గమనిస్తావు? అన్ని సీడీలు ఒకే ఆకారాన్ని మరియు పరిమాణాన్ని కలిగి ఉంటాయి. ఒక దానిపై మరొక సీడీని ఉంచిన, అవి ఒక దానినొకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయి. (ఆక్రమిస్తాయి). అంటే సీడీల ఉపరితలాలు / ముఖాలు ఒకదానికొకటి సర్వసమానమని చెప్పగలం.

సర్వ సమాన ముఖాలు గల వస్తువులను మూడింటిని పేర్కొనండి.

8.1.1 ఆకారాల సర్వసమానత

క్రింది వానిని గమనించండి.

(i)



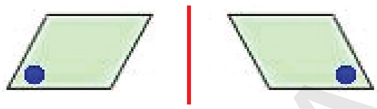
పై పటాలన్నీ దిశతో సంబంధం లేకుండా, ఒకే వస్తువుని సూచిస్తాయా?

ఇక్కడ ఒకే వస్తువుని జరపడం, భ్రమణం చెందించడం మరియు బోర్లించడం జరిగింది. పై పటాలన్నీ ఒకే విసన కర్రని సూచిస్తాయి.

పై పటాలన్నింటినీ ఒకదానిపై నొకటి ఉంచితే నీవేమి గమనిస్తావు?

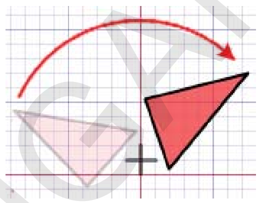
అవి అన్నీ ఒకదానికొకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయి. అంటే అవన్నీ ఒకే ఆకారాన్ని, పరిమాణాన్ని కలిగి ఉన్నాయి. “ఒకే ఆకారము మరియు పరిమాణము గల పటాలను” ఏమని పిలుస్తారో చెప్పగలవా?

త్రిప్పు : త్రిప్పుట అనునది పరివర్తనము. దీనిలో ఒక సమతల చిత్రము తిప్పబడును లేదా ఒక రేఖలో పరావర్తనము చేయబడి అసలు చిత్రపు పరావర్తన రూపము కల్పించబడును.



తిప్పబడిన లేక పరావర్తనము చేయబడిన చిత్రము యొక్క ప్రతి బిందువు దాని పరావర్తన చిత్రపు ప్రతి సదృశ బిందువు రెండును పరావర్తన రేఖకు సమాన దూరములో నుండును.

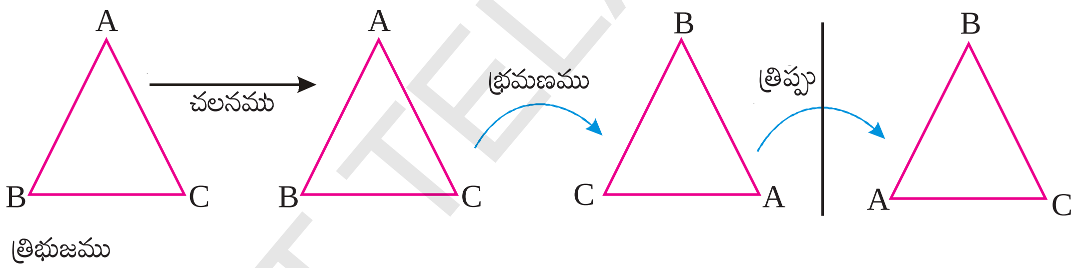
భ్రమణము : భ్రమణము చేయబడు వస్తువు ఒక బిందువు కేంద్రంగా తిప్పబడును. భ్రమణములో వస్తువు ఆకారముగాని, భ్రమణ కేంద్రము నుండి వస్తువుపై గల ఏదేని బిందువు యొక్క దూరములో గాని మార్పుండదు.



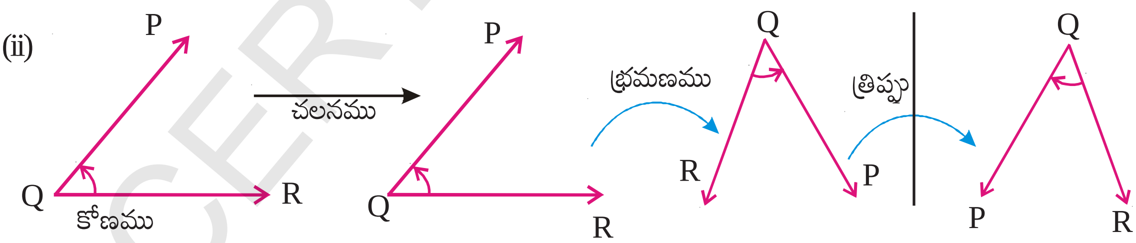
భ్రమణ కేంద్రము చుట్టూ వస్తువులోని ప్రతిబిందువు వృత్తాకారములో తిరుగును. ఒక సంపూర్ణభ్రమణము $360°$

క్రింది జ్యామితీయ చిత్రములను పరిశీలించుము.

(i)



(ii)



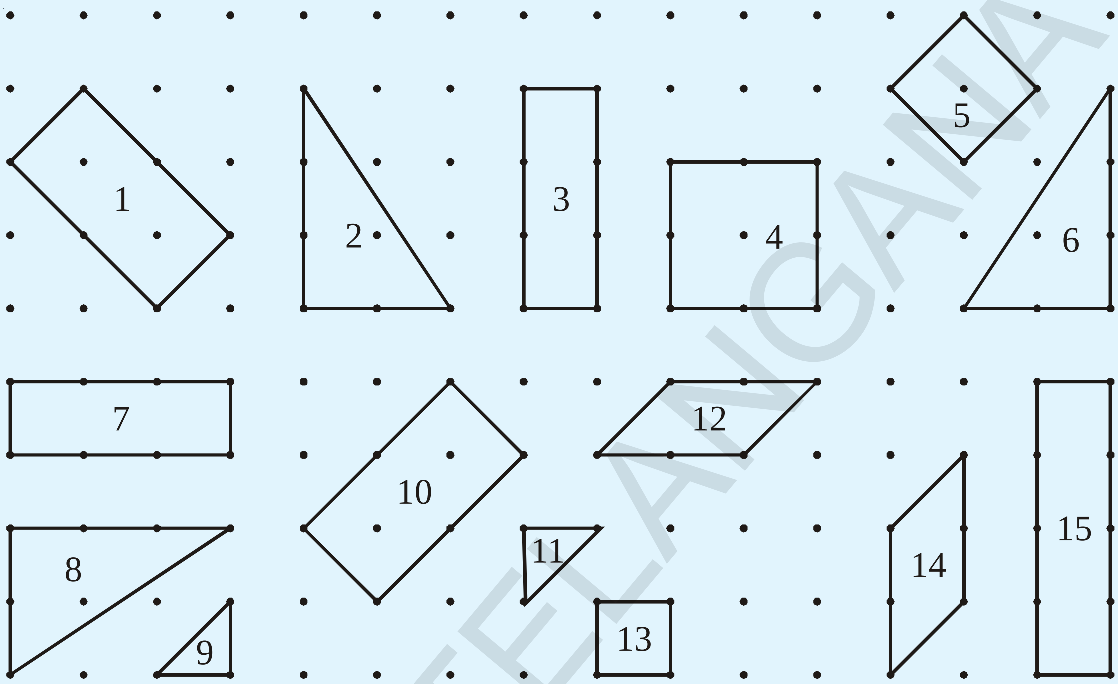
పై అన్ని సందర్భాలలో, ప్రతి వరుసలోని మొదటి పటాన్ని చలించడం, భ్రమణం చెందించడం మరియు త్రిప్పుటద్వారా దాని ఆకారంలోగాని లేక పరిమాణంలో గానీ ఏదైనా మార్పుని గమనించావా? ఎటువంటి మార్పు లేదు. ప్రతి వరుసలోని అన్ని పటాలు వివిధ దిశలలో అమరియున్నప్పటికీ అవన్నీ సర్వసమానమే.

రెండు పటాలు సర్వసమానమైన, వాటిని చలింపజేసిన, భ్రమణం చెందించినా లేదా తిప్పిన వాటి సర్వసమానత్వం అలానే నిలచియుటుంది.

మనం సర్వసమానత్వాన్ని సూచించుటకు $\cong$ గుర్తుని వాడతాము.

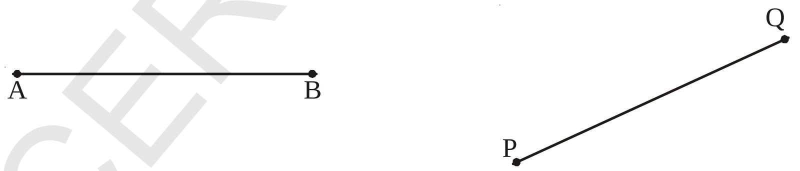
ఇవి చేయండి :

క్రింది పటాలలో సర్వసమాన పటాల జతలను గుర్తించండి.



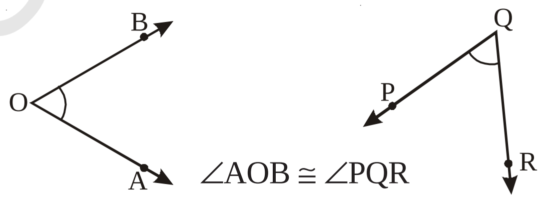
ఒక జత (a) రేఖాఖండాలు (b) కోణాలు మరియు (c) త్రిభుజాలు ఎప్పుడు సర్వసమానమవుతాయో నీవు చెప్పగలవా?

(a) రెండు రేఖాఖండాల పొడవులు సమానమైన అవి సర్వసమానాలవుతాయి.



AB పొడవు = PQ పొడవు అయిన $AB \cong PQ$

(b) రెండు కోణాల కొలతలు సమానమైన అవి సర్వసమానాలు.



$\angle AOB \cong \angle PQR$

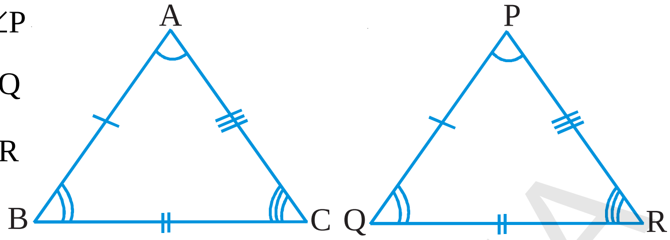
(c) రెండు త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔPQR లు సర్వసమానం కావలెనంటే అన్ని జతల అనురూప భుజాలు సమానం కావాలి.

అంటే $AB = PQ$ మరియు $\angle A = \angle P$

$BC = QR$ $\angle B = \angle Q$

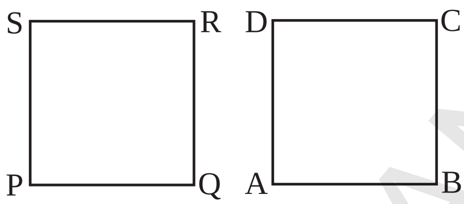
$CA = RP$ $\angle C = \angle R$

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$.



మరి, రెండు బహుభుజులు సమానమని ఎలా చెప్పగలవు ?

దీనిని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా చర్చిద్దాం. రెండు చతురస్రాలు □ABCD మరియు □PQRS లను తీసుకోనుము. మనం ఒక చతురస్రాన్ని మరొక చతురస్రంపై ఉంచితే అంటే □ABCD ని □PQRS పై ఉంచితే, అవి ఒకదానికొకటి పూర్తిగా ఏకీభవించాలి.



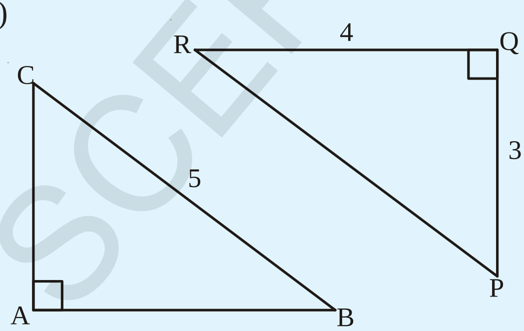
అంటే వాటి అంచులు ఒకదానితోనొకటి ఏకీభవించాలి. అప్పుడు మాత్రమే ఆ రెండు చతురస్రాలు సర్వసమానాలు.

కావున రెండు జ్యామితీయ పటాలు ఒకదానిని మరొకటి పూర్తిగా కప్పి వేసిన ఆ పటాలు సర్వసమానాలు. అదేవిధంగా రెండు బహుభుజులు సర్వసమానమైన వాటి అనురూప భుజాలు సమానం మరియు అనురూప కోణాలు సమానం.

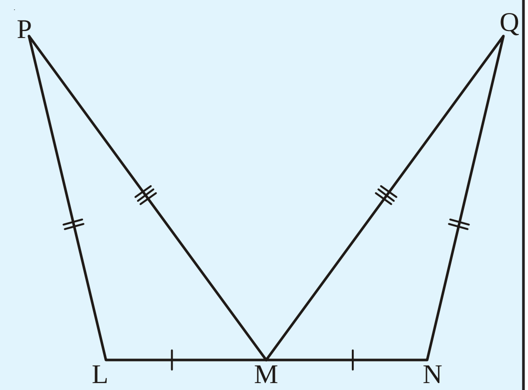
ఇవి చేయండి :

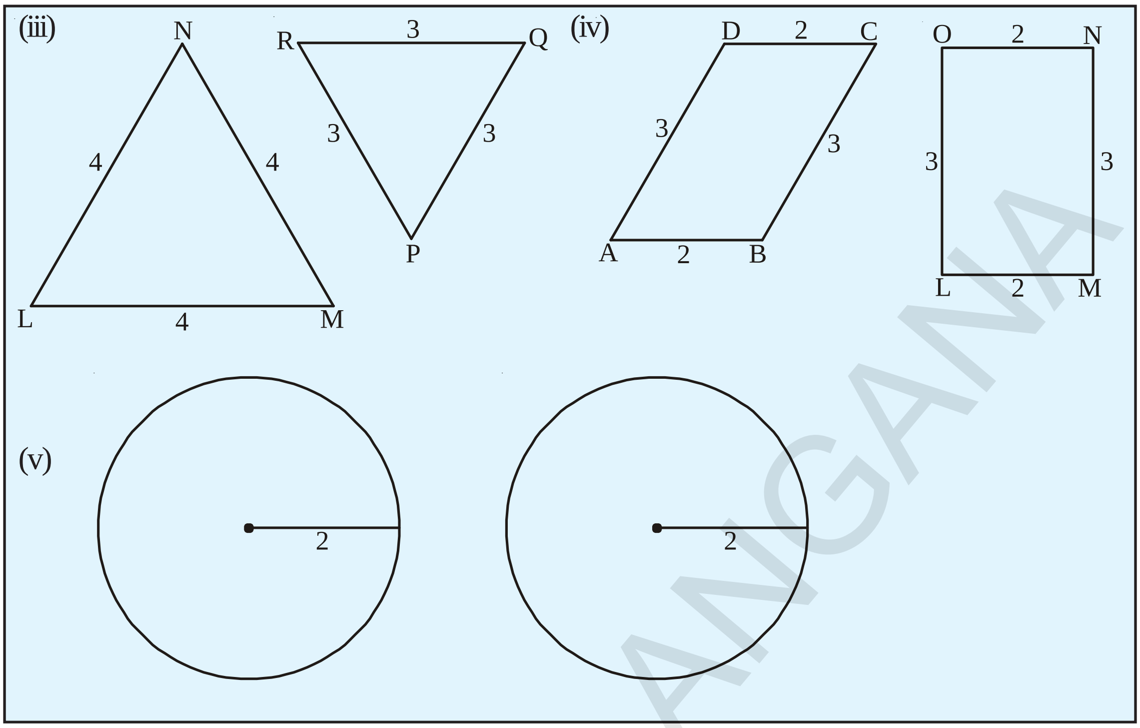
క్రింది పటాల జతలను గమనించండి. అవి సర్వసమానాలేమో తెల్పండి. కారణాలు వివరించండి. పటాలను పేర్లతో చెప్పండి.

(i)



(ii)





8.1.2 సరూప పటాలు

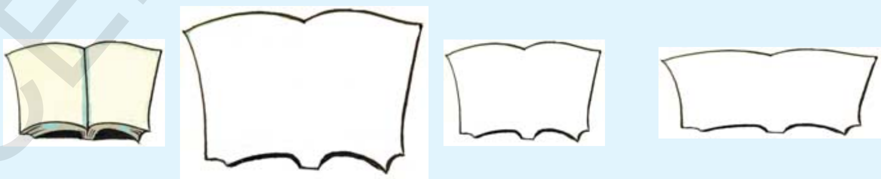
మన పుస్తకాలలో మన పరిసరాల నుండి అనేక పటాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు ఏనుగు, పులి, భవనాల ప్లానులు, మైక్రోచిప్‌ల నమూనా పటాలు మొదలగునవి.

పై పటాలన్నీ వాటి అసలు కొలతలతో గీయబడ్డాయా? అలా గీయబడలేదు వాటి అసలు కొలతలతో గీయడం, ఎల్లపుడు సాధ్యం కాదు. వాటిలో కొన్ని పటాలు వాస్తవ రూపం కన్నా పెద్దవి గానూ, మరికొన్ని చిన్నవిగానూ గీయబడినవి.

ఇవి చేయండి.

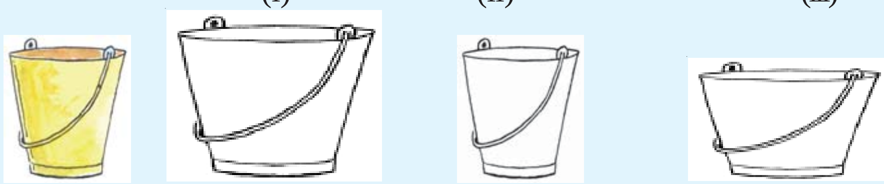
1. క్రింది చిత్రాలలో మొదటి రేఖా చిత్రంతో సరూపంగా ఉన్న రేఖాచిత్రాలను గుర్తించండి.

(a)



(i) (ii) (iii)

(b)



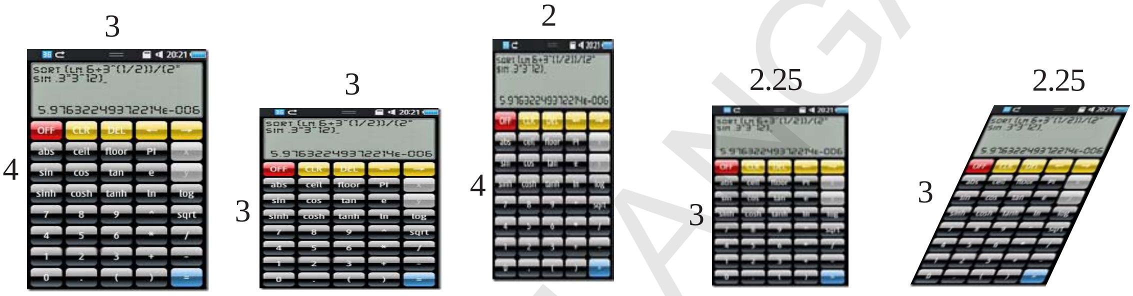
(i) (ii) (iii)

ఒక చెట్టు బొమ్మ కాగితంపై గీయబడింది. మరి గీయబడిన బొమ్మ అసలు బొమ్మలతో సరూపంగా ఉందని ఎలా చెప్పగలవు?

చెట్టు

గీచిన చెట్టు పటం

ఇక్కడ ఒక వస్తువు వివిధ రకాలు తగ్గించి చూపబడినది. వీటిలో ఏ తగ్గింపు పటం, అసలు పటాన్ని పోలియుంది?



అసలు పటం   1వ తగ్గింపు పటం   2వ తగ్గింపు పటం   3వ తగ్గింపు పటం   4వ తగ్గింపు పటం

కొలతల పోలిక ద్వారా 'మూడవ తగ్గింపు పటం' అసలు పటం పోలి ఉందని చెప్తాం. ఎలాచెప్పగలరా ?

ఇప్పుడు అసలు పటం మరియు '3వ తగ్గింపు పటం' ల అనురూప భుజాల నిష్పత్తిని కనుకుందాము. మీరేమి గమనిస్తారు?

$$\frac{\text{అసలు వస్తువు పొడవు}}{\text{తగ్గింపు 3 లోని పొడవు}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{అసలు వస్తువు వెడల్పు}}{\text{తగ్గింపు 3 లోని వెడల్పు}} = \frac{3}{2.25} = \frac{3\times 4}{2.25\times 4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

మనము అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానమని గమనిస్తాం.

ఈ సందర్భంలో అన్ని అనురూప కోణాల జతలు సమానమే మరియు అవి లంబకోణాలు

కావున "రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావలెనంటే వాటి అనురూప కోణాల జతలు సమానం మరియు వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం కావాలని" నిర్ధారిస్తాం.

ఇతర తగ్గింపు చిత్రాల అనురూప భుజాల నిష్పత్తి కనుగొనండి.

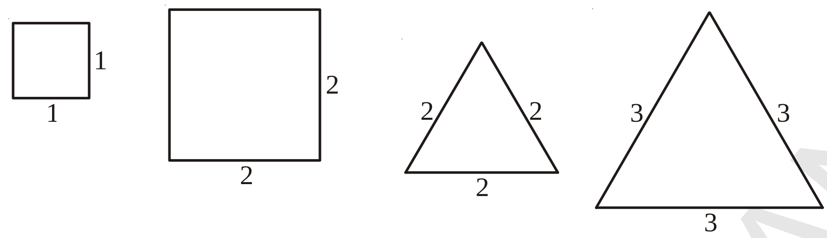
8.1.3 సరూపత అనువర్తనాలను ఎక్కడ గమనిస్తాం ?

ఇంజనీర్లు తాము నిర్మించబోయే భవనాలకు సరూపంగా నమూనా పటాలు గీస్తాడు. కంప్యూటర్ ఆపరేటర్ బేనర్లపై ఉండవలసిన చిత్రముల కొలతలకు అనుపాతములో కంప్యూటర్‌పై చిత్రములను తయారు చేస్తాడు. ఛాయాగ్రాహకుడు చిత్రముల ప్రతిరూపాలను, అనుపాత నియమము ఉపయోగించి రూపము చెడకుండ చిన్నవిగాను పెద్దవిగాను చేస్తాడు. విజ్ఞాన శాస్త్ర పరికరాల పటాలు సాంఘికశాస్త్రములో గీయబడిన దేశముల పటాలు ఈ అనుపాత నియమముతో గీచినవే అనగా అవి అసలు వస్తువుకు సరూపాలు.

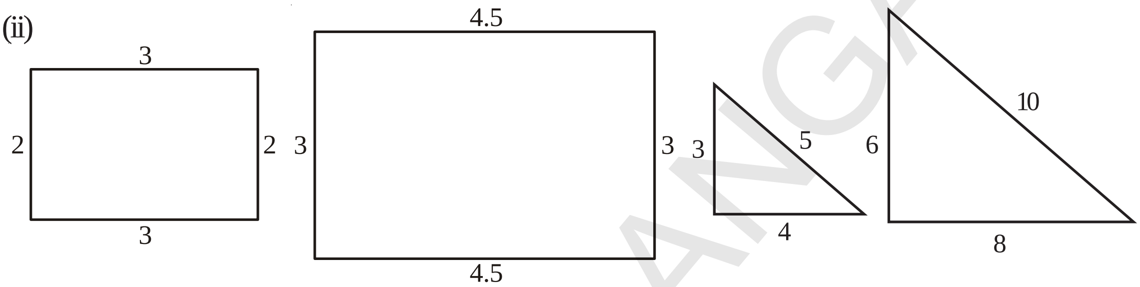
సరూపతను సరిచూడడం :

క్రిందనీయబడిన సరూప పటాల జతలను గమనించండి. వాటి భుజాలను కొలిచి అనురూప భుజాల నిష్పత్తుల మధ్యగల సంబంధాన్ని రాబట్టండి. అదేవిధంగా అనురూపకోణాల జతల మధ్యగల సంబంధాన్ని నెలకొల్పండి. మీరేమి గమనించారు?

(i)



(ii)



పై పటాలననుసరించి పట్టికను నింపండి.

అనురూప భుజాల నిష్పత్తి	**సంగత కోణాలు**
(i) చతురస్రం $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(90^o,90^o,90^o,90^o) = (90^o,90^o,90^o,90^o)$
(ii) సమబాహు త్రిభుజం $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$(60^o,60^o,60^o) = (60^o,60^o,60^o)$
(iii) దీర్ఘచతురస్రం $\frac{2}{3}$ = ...	$(90^o,90^o,90^o,90^o) = (90^o,90^o,90^o,90^o)$
(iv) లంబ త్రిభుజం $\frac{3}{6}$ = ...	(......., ..., ...) = (......., ..., ...)

అన్ని ఉదాహరణ జతలలో అనురూప భుజాల నిష్పత్తి సమానం, అనురూప కోణాల జతలు సమానమని గమనిస్తాం. మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

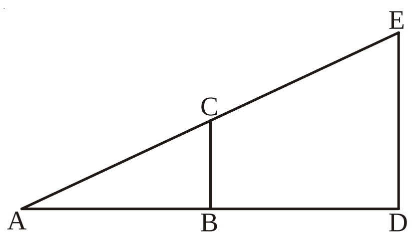
ప్రక్క పటంలో రెండు సరూప త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔADE లు సరూపాలు దీనినే మనము $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ గా వ్రాస్తాము. ΔABC ని ΔADE పై వాక్యములో చూపినట్లు ఉంచిన వాటి సంగత కోణాలు సమానముగా ఉండటము గమనించగలవు.

అంటే $\angle A \cong \angle A$

$\angle B \cong \angle D$ (ఎందుకు?)

$\angle C \cong \angle E$ (ఎందుకు?)

నుంచి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం.



అంటే $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AE}$

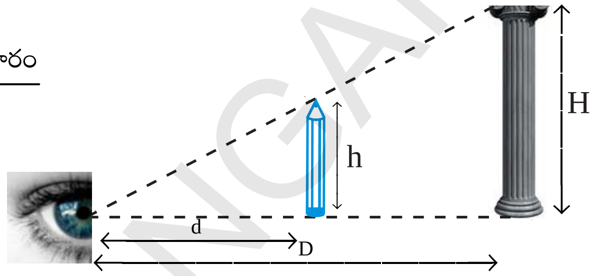
"త్రిభుజముల సరూపత" నియమము దూరములో ఉన్న వస్తువుల ఎత్తు కనుగొనుటకు ఎలా ఉపయోగపడుతుందో ఉదాహరణతో గమనిద్దాం.

ఉదాహరణ ద్వారా వివరణ

ఒక స్థంభము నుండి కొంత దూరములో గల బాలిక తనకెదురుగా గల స్తంభము వైపు తన చేతిని చాపి ఒక పెన్సిల్ పట్టుకొని నిలచి ఉన్నది. ఆమె తన చేతిలోని పెన్సిల్ స్తంభముతో ఏకీభవించినట్లు పటంలో చూపినట్లు గమనించినది. ఈ వివరణను పై ఉదాహరణతో పోలిస్తే,

$$\frac{\text{స్తంభము ఎత్తు}}{\text{పెన్సిల్ ఎత్తు}} = \frac{\text{స్థంభము నుండి బాలికకు గల దూరం}}{\text{బాలిక చేతి పొడవు}}$$

పెన్సిల్ పొడవు, బాలిక చేతి పొడవు మరియు బాలికనుండి స్తంభమునకు దూరములను కొలచి స్తంభము ఎత్తును అంచనా వేయవచ్చు.



ప్రయత్నించండి.

చాపిన చేతిలో ఒక స్కేలుని నిలువుగా పట్టుకొని మీ పాఠశాల భవనం ఏకీభవించునట్లు పాఠశాల నుండి దూరంగా జరుగుతూ సరిచేసుకొనుము. దీనికి సరిపడు పటాన్ని గీచి పాఠశాల భవనం ఎత్తుని అంచనా వేయండి.

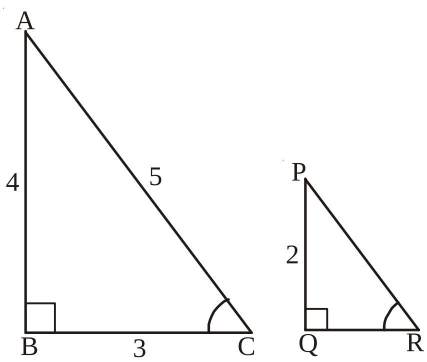
ఉదాహరణ 1: ప్రక్క పటంలో $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, మరియు $\angle C = 53^0$. అయిన PR భుజాన్ని మరియు $\angle P$ని కనుగొనుము.

సాధన: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమైన వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం మరియు సంగత కోణాల జతలు సమానం.

$$\frac{PR}{AC} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{PR}{5} = \frac{2}{4}$$

$$PR = \frac{2}{4} \times 5 = 2.5$$



తిరిగి $\angle R = \angle C = 53^o$

ఒక త్రిభుజంలోని అంతర కోణాల మొత్తం 180^o

అంటే $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

$\angle P + 90^o + 53^o = 180^o$

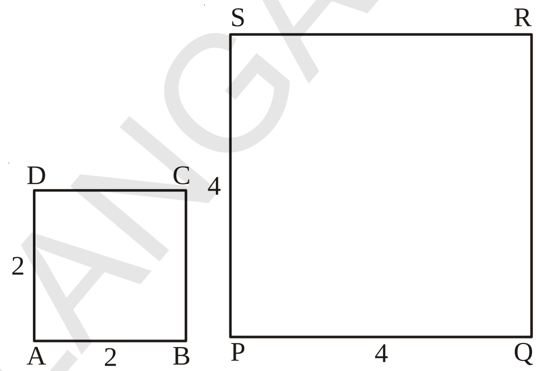
$\angle P = 180^o - 143^o = 37^o$

ఉదాహరణ 2: వేర్వేరు కొలతలతో రెండు చతురస్రాలను గీయండి. అవి సరూపాలని మీరు చెప్పగలరా? వివరించండి. వాటి చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాలు కనగొని వాటి నిష్పత్తులను కూడా కనుగొనండి. మీరేమి గమనించారు?

సాధన : ఉదాహరణకు 2 సెం.మీ మరియు 4 సెం.మీ. భుజాలుగా గల రెండు చతురస్రాలను గీద్దాం. అన్ని భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి కనుక $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

అన్ని జతల అనురూప కోణాలు 90^oకు సమానం.

కావున □ABCD ~ □PQRS



□ABCD చుట్టుకొలత $= 4 \times 2$
$= 8$ సెం.మీ

□PQRS చుట్టుకొలత $= 4 \times 4$
$= 16$ సెం.మీ.

చుట్టుకొలతల నిష్పత్తి $= 8 : 16$
$= 1 : 2$

కావున "చుట్టుకొలతల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తికి సమానము".

□ ABCD వైశాల్యం $= 2 \times 2 = 4$ చ.సెం.మీ.

□ PQRS వైశాల్యం $= 4 \times 4 = 16$ చ.సెం.మీ.

$\therefore$ వైశాల్యాల నిష్పత్తి $= 4 : 16 = 1 : 4 = 1^2 : 2^2$

కావున వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూపభుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం.

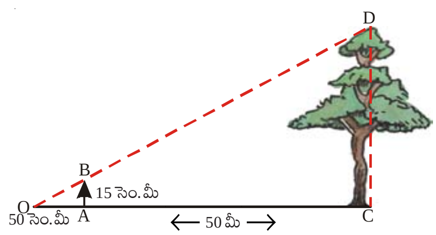
ఉదాహరణ 3: జగదీశ్ ఒక చెట్టు ఎత్తుని అంచనా వేయుటకు ఒక స్కేలును చేతితో 50 సెం.మీ దూరంలో నిలువుగా పట్టుకొని తనకు ఎదురు ఉన్న చెట్టును ఎత్తును కప్పివేయుటకు ప్రయత్నిస్తూ దాని పటమును ఇలా గీచెను. చెట్టు ఎత్తు స్కేలుపై 15 సెం.మీ కు సరిపోయినది, అతని నుండి చెట్టు దూరము 50 మీ. అయిన చెట్టు యొక్క ఎత్తుని కనుగొనండి.

సాధన : పటం నుండి $\Delta OAB \sim \Delta OCD$

రెండు సరూప త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$

$\therefore \therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$

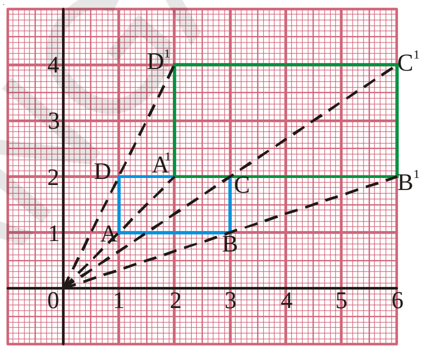


$$\therefore \frac{0.5}{50} = \frac{0.15}{CD} \Rightarrow CD = \frac{50 \times 0.15}{0.5} = 15 \text{ మీ.}$$

$\therefore$ చెట్టు యొక్క వాస్తవ ఎత్తు $= 12.75$ మీ.

8.2 సరూప విస్తరణలు (Dilations):

కొన్నిసార్లు మనం పటాలను వాటి వాస్తవ పరిమాణం కన్నా పెద్దదిగా వేయవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు సినిమా కటౌట్ (cut-outs) మీరు చూసి ఉంటారు. మరికొన్ని సార్లు పటాలను చిన్నవిగా గీయవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు నమూనాలు గీచే సందర్భంగా అసలు పరిమాణం కన్నా చిన్నవిగా గీస్తాము. అంటే మనం పటాల ఆకారాలను పెద్దవిగా కాని చిన్నవిగా కాని చేయవలసిన అవసరం నిత్యజీవితంలో ఏర్పడుతూ ఉంటుంది. ఈవిధంగా పెద్ద లేదా చిన్న సరూప పటాలు గీసే పద్ధతిని "సరూప విస్తరణం" అంటారు.



పటంలో $\square$ABCD విస్తరణను గమనించండి. $\square$ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం గ్రాఫ్ కాగితంపై గీయబడినది.

ప్రతి శీర్షాలు A, B, C, మరియు D లు 'O'నుండి కలుపబడి వాటి రెట్టింపు దూరాలకు వరుసగా A^1, B^1, C^1 మరియు D^1 వరకు పొడిగింపబడినవి. ఇప్పుడు A^1, B^1, C^1, D^1లు కలుపగా $\square$ABCD కు రెట్టింపు కొలతలు గల దీర్ఘచతురస్రమును ఏర్పరచినవి. ఇక్కడ 'O' ను విస్తరణ కేంద్రం అని మరియు $\frac{OA^1}{OA} = \frac{2}{1} = 2$ ను సూచీ భిన్నం (scale factor) అని అంటారు.

ఇవి చేయండి.

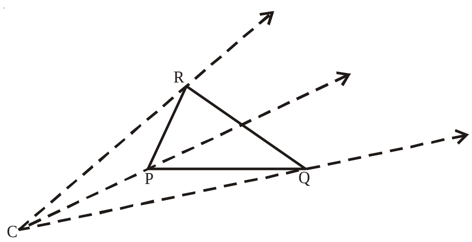
1. ఒక గ్రాఫ్ కాగితంపై ఒక త్రిభుజాన్ని గీచి సూచీ భిన్నం 3గా గల విస్తరణ పటాన్ని గీయండి. ఆ రెండు పటాలు సరూపాలేనా?
2. ఒక చతురస్రాన్ని గీచి సూచీ భిన్నాలు 4, 5 గా గల విస్తరణ పటాలను గీయండి. నీవేమి గమనించితివి. అలాగే ఏదేని ఒక పటాన్ని పొడిగించండి.

8.2.1 సరూప విస్తరణల నిర్మాణం

ఉదాహరణ 4: సూచీ భిన్నం 2 ఉండునట్లు ఏదేని ఒక త్రిభుజ విస్తరణ పటాన్ని స్కేలు మరియు వృత్త లేఖినులను మాత్రమే ఉపయోగించి నిర్మించండి.

సాధన :

సోపానం 1: Δ PQRని నిర్మించి, త్రిభుజంపై లేని ఏదేని బిందువు 'C' ని విస్తరణ కేంద్రంగా గుర్తించుము 'C' ని త్రిభుజ శీర్షాలతో కలిపి ముందుకు పొడిగించుము.



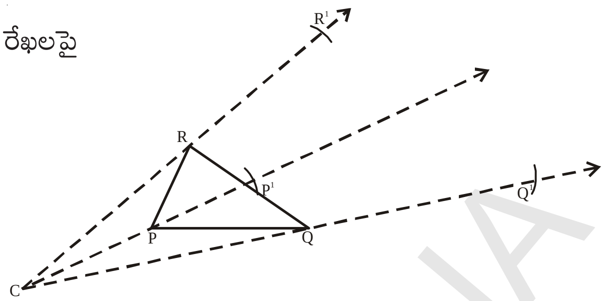
సోపానం 2: వృత్త లేఖిని సహాయంతో పొడిగింపు రేఖలపై

$CP^1 = k\,(CP) = 2\ CP$

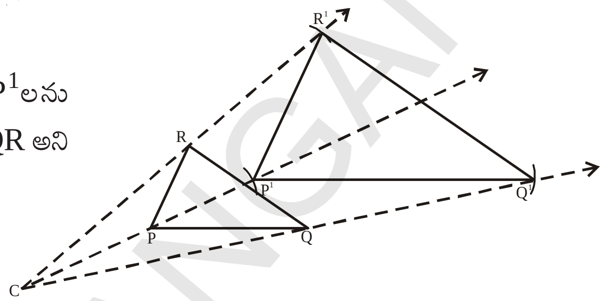
$CQ^1 = 2\ CQ$

$CR^1 = 2\ CR$

అగునట్లు P^1, Q^1 మరియు R^1 బిందువులను గుర్తించుము.



సోపానం 3: P^1Q^1, Q^1R^1 మరియు R^1P^1లను కలుపుము. $\Delta P^1Q^1R^1 \sim \Delta PQR$ అని గమనించ వచ్చు.



అభ్యాసము - 8.1

1. నిత్యమూ ఉపయోగించే మూడు జతల సర్వ సమాన వస్తువులను పేర్కొనండి.
2. (a) రెండు సర్వసమాన పటాలను గీయండి. అవి సరూపాలవుతాయా? వివరించండి.

   (b) రెండు సరూప పటాలను తీసుకోండి. వాటిని జరిపినా, భ్రమణం చెందించినా లేదా త్రిప్పిన అవి సరూపాలుగానే ఉంటాయా?
3. $\Delta ABC \cong \Delta NMO$ అయిన అనురూప భుజాలను, అనురూప కోణాల జతలను తెల్పండి.
4. క్రింది ప్రవచనాలు సత్యమవుతాయో లేదా తెల్పండి. కారణాలను వివరించండి.

   (i) 3 సెం.మీ. భుజాలుగా గల రెండు చతురస్రాలలో ఒక దానిని 45^0 మేర భ్రమణం చెందించిన, అవి సర్వసమానాలు.

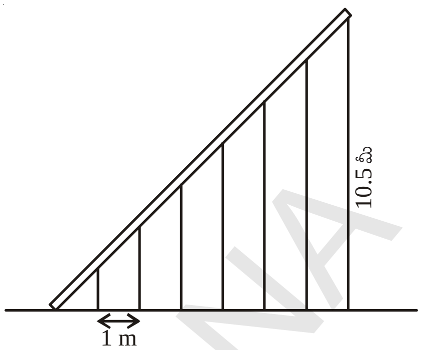
   (ii) 5 సెం.మీ కర్ణాలుగా గల రెండు లంబ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

   (iii) 4 సెం.మీ వ్యాసార్థంగా గల రెండు వృత్తాలు సర్వసమానాలు.

   (iv) 4 సెం.మీ భుజంగా గల రెండు సమబాహు త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔLHN లు సర్వసమానాలు కావు.

   (v) ఒక బహుభుజి మరియు దాని ప్రతిబింబములు సర్వసమానాలు.
5. ఒక చతురస్ర బిందు మాపని పై బహుభుజిని ఒకదానిని గీయండి. మరియు దాని వివిధ దిశలలో సర్వసమాన పటాలు మరియు ప్రతిబింబ పటాన్ని గీయండి.
6. ఒక గ్రాఫ్ కాగితం పై లేదా చతురస్ర బిందు మాపనిపై ఒక దీర్ఘచతురస్రాన్ని గీయండి. దానికి సరూప పటాన్ని నిర్మించండి. ఈ రెండు పటాల వైశాల్యాలు మరియు చుట్టుకొలతలు కనుగొని వాటి వాటి నిష్పత్తులను దీర్ఘచతురస్రాల భుజాల నిష్పత్తులతో పోల్చండి.

7. ఒక ఇనుప కమ్మీ 7 స్థంభాలపై పటంలో చూపినట్లుగా ఉంచబడింది. ఏ రెండు స్థంభాలమధ్య దూరమైనా 1మీ.కి సమానం మరియు చివరి స్థంభం ఎత్తు 10.5 మీ అయిన అన్ని స్థంభాల ఎత్తులను కనుగొనండి.

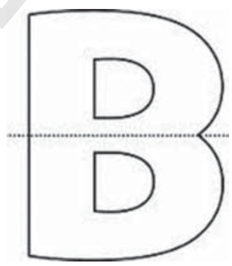


8. 3మీ ఎత్తుగల ఒక నిలువు స్థంభం నుండి 5 మీ దూరంలో నిలబడి, సుధ, ఒక భవనంపై భాగము మరియు స్థంభం పై భాగం ఒకే సరళరేఖలో ఉన్నట్లు గమనించినది. భవనం మరియు స్థంభాల మధ్య దూరం 10 మీ అయిన భవనం ఎత్తును అంచనా వేయుము. (సుధ ఎత్తును లెక్కలోనికి తీసుకోకుండా)

9. ఏదేని ఒక చతుర్భుజాన్ని గీయండి. సూచీ భిన్నం 3 ఉండునట్లు దాని విస్తరణ పటాన్ని గీయండి. వాటి అనురూప భుజాలను కొలచి ఆ రెండు పటాలు సరూపాలేమో సరిచూడండి.

8.3 సౌష్ఠవము

క్రింది పటాలను గమనించండి. వాటిని సరిగ్గా సగానికి మడిచిన, ప్రతి సగమూ రెండవ సగంతో పూర్తిగా ఏకీభవిస్తుంది.

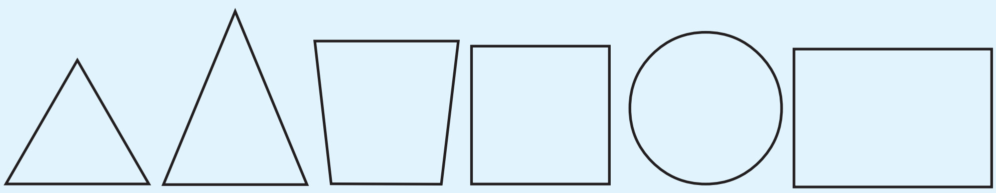


ఇటువంటి పటాలని ఏమని పిలుస్తాం? ఒక సగం రెండవ సగంతో ఏకీభవించునట్లు ఏ రేఖ వెంబడి మడత పెట్టామో ఆ రేఖను ఏమని పిలుస్తారు? నీవు క్రింది తరగతుల నుండి నేర్చుకొనిన ఈ అంశాలను గుర్తుకు తెచ్చుకొనగలవా?

ఇటువంటి పటాలను సౌష్ఠవ పటాలు అంటారు. మరియు ఈ పటాలను ఖచ్చితంగా రెండు అర్ధ పటాలుగా విభజించే రేఖను సౌష్ఠవ అక్షం లేదా సౌష్ఠవ రేఖ అంటాం.

ఇవి చేయండి

క్రింది ఆకారాలకు సాధ్యమైనన్ని సౌష్ఠవరేఖలు గీయండి.



నీ పరిసరాలలో కనిపించే క్రింది సౌష్ఠవ విన్యాసాలను గమనించండి.

ఈ విన్యాసాలన్ని (designs) వివిధ రకాల సౌష్ఠవ పటాల నుండి ఉత్పన్నమైనవే.

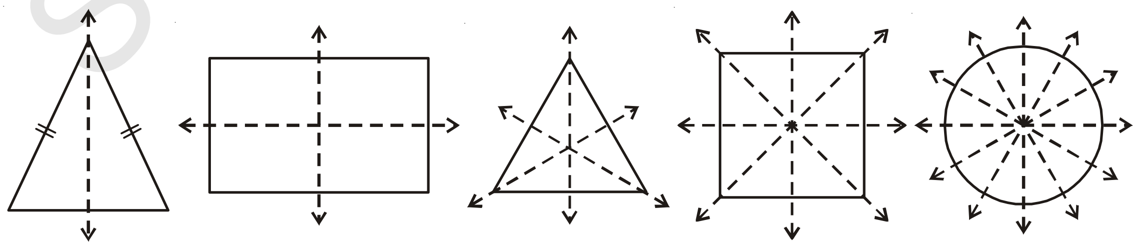
ఇక్కడి పటంలో కుక్క యొక్క ముఖం "ఫోటోమ్యాజిక్" ద్వారా సౌష్ఠవంగా రూపొందించబడినది. మధ్యలో గీయబడిన నిలువు రేఖను గమనించారా?

దానిని సౌష్ఠవ రేఖ లేదా ప్రతిబింబ అక్షము అంటారు.

మరొక ఉదాహరణను గమనించండి: ఒక కొండ యొక్క ప్రతిబింబము సరస్సులో చూపబడింది. ఇది కూడా ప్రతిబింబ సౌష్ఠవమే. దీనిలో సౌష్ఠవాక్షము కొండ మరియు సరస్సులో దాని ప్రతిబింబాలను కలుపుచున్న అడ్డరేఖ. మసకగా ఉండుటచే ఈ ప్రతిబింబము ఖచ్చితంగా సౌష్ఠవ ప్రతిబింబము కాకపోవచ్చును.

8.3.1 భ్రమణ సౌష్ఠవం

క్రింది వానిలో సౌష్ఠవ అక్షాలను గమనించండి.



వివిధ పటాలు వివిధ సంఖ్యలలో సౌష్ఠవ అక్షాలను కలిగి ఉన్నవి.

పై పటాలలో ప్రతి దానిని పూర్తిగా వాటి కేంద్రం ఆధారంగా ఒక భ్రమణం చేసిన ఎన్నిసార్లు తొలిస్థితిని పోలినట్లు ఉంటాయో గమనించండి.

ఉదాహరణకు ఒక దీర్ఘచతురస్రానికి రెండు సౌష్ఠవరేఖలు/అక్షాలు ఉన్నాయి. ఒక దీర్ఘచతురస్రం పూర్తిగా ఒక భ్రమణం చేసిన, రెండుసార్లు తొలిస్థితిని పోలిన స్థితిలోకి వస్తుంది. ఈ సంఖ్య '2' ను మనం "భ్రమణ పరిమాణం" అంటాము.

మీ పరిశీలనలను క్రింది పట్టికలో నమోదు చేయండి.

జ్యామితి పటం	సౌష్ఠవరేఖల సంఖ్య	తొలిస్థితిని పోలిన స్థితులు పొందు సంఖ్య	భ్రమణ పరిమాణం
సమద్విబాహు త్రిభుజం	....	....	....
దీర్ఘచతురస్రం	2	2	2
సమబాహుత్రిభుజం	....	....	....
చతురస్రం	....	....	....
వృత్తం	....	....	....

ఆలోచించండి మరియు చర్చించండి - రాయండి

1. ఒక జ్యామితి పటం యొక్క సౌష్ఠవ అక్షాల సంఖ్యకు మరియు దాని భ్రమణ పరిమాణానికి మధ్యగల సంబంధం ఏమిటి?
2. ఒక క్రమ బహుభుజికి గల సౌష్ఠవ అక్షాల సంఖ్య ఎంత? ఒక క్రమ బహుభుజి భుజాల సంఖ్యకు మరియు దాని భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణమునకు మధ్యగల సంబంధమేమి?

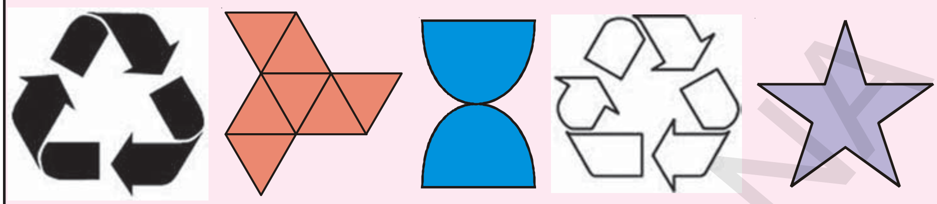
8.3.2 బిందు సౌష్ఠవం

ప్రక్క పటాన్ని పరిశీలించండి. దీనికి రేఖా సౌష్ఠవం ఉందా? ఈ పటానికి రేఖా సౌష్ఠవం లేదు. కానీ ఒక ప్రత్యేక రకమైన సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉంది. పైనుండి క్రిందికి చూచినా క్రింది నుండి పైకి చూచినా ఒకే విధంగా ఉంది లేదా ఏ రెండు వ్యతిరేక దిశల నుండి చూచిన ఒకే విధంగా కనిపిస్తుంది. దీనిని బిందు సౌష్ఠవం అంటారు. పటాన్ని పరిశీలిస్తే అందులోని ప్రతిభాగంను పోలిన మరొక భాగాన్ని గమనించవచ్చు. దాని మధ్య నుండి ఒక రేఖను గీచిన, ఆ రేఖ పటాన్ని సమానదూరంలో భాగాలు ఉండునట్లు రెండు అర్ధభాగాలుగా విభజిస్తుంది. మధ్య నుండి మరికొన్ని రేఖలను గీచి సరిచూడండి. ఈ పటం బిందు సౌష్ఠవాన్ని కలిగి యుందని అంటారు.

X H I S N Z

ప్రయత్నించండి.

1. క్రింది వానిలో బిందు సౌష్ఠవం కల వాటిని గుర్తించండి.



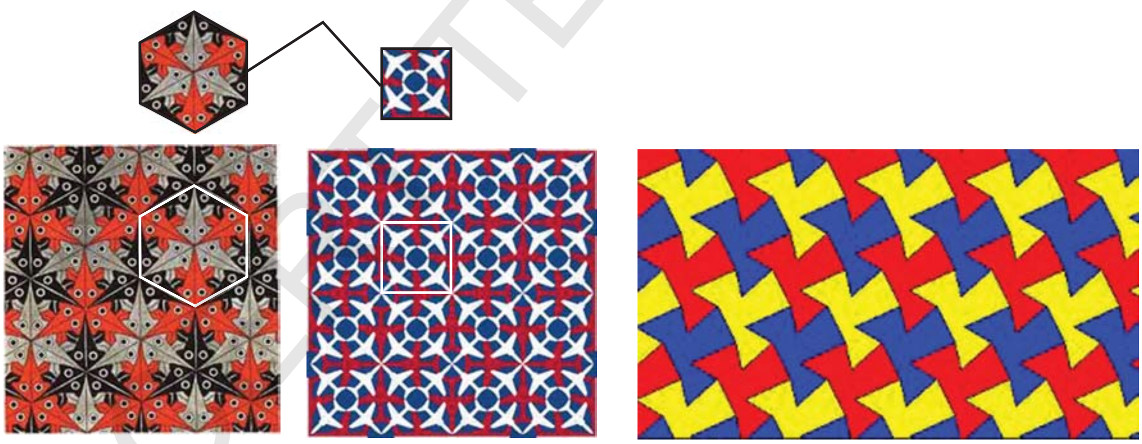
2. పై పటాలలో రేఖా సౌష్ఠవాన్ని కలిగిన పటాలు ఏవి?

3. రేఖాసౌష్ఠవమునకు మరియు బిందు సౌష్ఠవానికి మధ్యగల సంబంధమేమి?

8.3.3 సౌష్ఠవం అనువర్తనాలు

- మనం ఉపయోగించే అనేక వస్తువులు కనీసం ఏదో ఒక విధమైన సౌష్ఠవాన్ని కలిగి యుంటాయి.
- యంత్రాల ద్వారా ఉత్పత్తి అయ్యే చాలా వస్తువులు సౌష్ఠవాన్ని కలిగి యుంటాయి. ఇది ఉత్పత్తి వేగాన్ని పెంచుతుంది.

క్రింది అమరికలను గమనించండి.



ఈ అమరికలను ఎక్కడ గమనించగలం? ఈ అమరికలను నేలపై రాళ్ళను తాపడంలో గమనిస్తాం.

ఈ క్రమాలు అమరికలు ఎలా ఏర్పడతాయి ?

ఈ అమరికలు అన్నీ సర్వసమాన పటాలు లేదా ఒకే పటం మరియు దాని ప్రతిబింబాలను కొంత వైశాల్యంపై ఖాళీ లేకుండా లేదా అతిక్రమణలు లేకుండా ప్రక్కప్రక్కనే అమర్చడం ద్వారా రూపొందించబడినది. దీనిని క్రమబద్ధమైన తాపడం చేయడం (టెస్సలేషన్) అంటారు. ఇది పటాల సౌందర్యాన్ని ద్విగుణీకరిస్తుంది.(పెంచుతుంది)

పై పటాలు ఏక మొత్తంగా సౌష్ఠవం కలిగి యున్నాయా ?

ఈ టెస్సలేషన్ ఏర్పరచడానికి ఉపయోగించిన ప్రాథమిక పటాలు సౌష్ఠవాన్ని కలిగియున్నాయా?

కొన్ని అమరికలు పటం (a) లో వలె మొత్తంగా సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉండటాన్ని గమనించవచ్చు. మరికొన్ని అమరికలు పటం (b)లో వలే వాటిలోని ప్రాథమిక పటాలు సౌష్ఠవాన్ని కలిగియున్నా మొత్తంగా సౌష్ఠవాన్ని కలిగియుండక పోవచ్చు.

మరలా ఈ క్రింది టెస్సలేషన్ గమనించండి. ఈ క్రింది వాటిని ఏర్పరచుటకు ఉపయోగించిన ప్రాథమిక ఆకృతులు ఏవి.

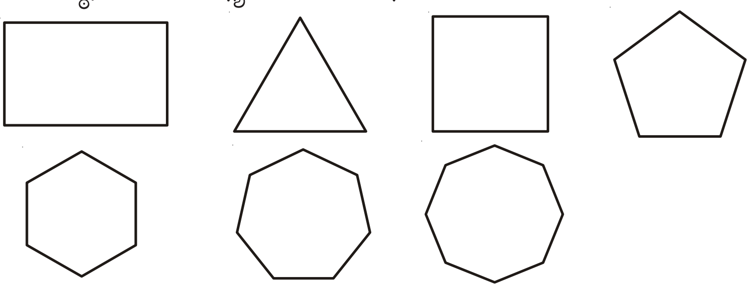
పటం. (a)

పటం. (b)

ఈ అమరికలను ఏర్పరచుటకు పంచభుజాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు, చతురస్రాలు మరియు సమబాహు త్రిభుజాలు ఉపయోగించారు. ఏ టెస్సలేషన్ అయినా ఈ ఆకృతుల ద్వారానే రూపొందిస్తారు.

అభ్యాసము - 8.2

1. ఆంగ్ల అక్షర మాలలోని పెద్ద అక్షరాలను (capital) కత్తిరించి నోటు పుస్తకంలో అతికించుము. వాటికి సాధ్యమైనన్ని సౌష్ఠవ అక్షాలను గీయండి.
   (i) రేఖా సౌష్ఠవం లేని అక్షరాలు ఎన్ని?
   (ii) ఒకే సౌష్ఠవ అక్షాన్ని కలిగి ఉన్న అక్షరాలు ఎన్ని?
   (iii) రెండు సౌష్ఠవ అక్షాలను కలిగి ఉన్న అక్షరాలు ఎన్ని?
   (iv) రెండుకన్నా ఎక్కువ సౌష్ఠవ అక్షాలను కలిగి యున్న అక్షరాలు ఎన్ని ?
   (v) ఏ అక్షరాలు భ్రమణ సౌష్ఠవాన్ని కలిగియున్నాయి?
   (vi) ఏ అక్షరాలు బిందు సౌష్ఠవాన్ని కలిగియున్నాయి ?
2. క్రింది పటాలకు సౌష్ఠవ అక్షాలను గీయండి. వానిలో బిందు సౌష్ఠవం కలిగిన పటాలను గుర్తించండి. సౌష్ఠవ అక్షాలకు, బిందుసౌష్ఠవమునకు మధ్య ఏదేని సంబంధం కలదా?



3. ప్రకృతిలో కనీసం ఒక సౌష్ఠవ అక్షాన్ని కలిగి ఉండే ముఖాలు గల వస్తువులను కొన్నింటిని పేర్కొనండి.
4. ఏవేని మూడు టెస్సలేషన్‌లను గీచి వానిలో ఉపయోగించిన ప్రాథమిక పటాలను తెల్పండి.

మనం ఏమి చర్చించాం.

- ఒకే ఆకారము మరియు ఒకే పరిమాణము గల ఆకారాలను సర్వసమాన ఆకారాలు అంటారు.
- పరిమాణాలు వేరైనను ఒకే ఆకారము గల పటాలు సరూప పటాలు.
- మనం సర్వసమాన లేదా సరూప పటాలను జరిపినా, భ్రమణం చేసినా లేదా తిప్పిన వాటి సర్వసమానత లేదా సరూపత అలాగే నిలచి యుంటుంది.
- పటాలు 'సౌష్ఠవం'ను కలిగి యుండవచ్చు లేదా కలిగి యుండకపోవచ్చు.
- పటాలు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ విధాలైన సౌష్ఠవాన్ని కలిగి యుండవచ్చు.
- సౌష్ఠవం మూడు రకాలు అవి బిందుసౌష్ఠవం, రేఖా సౌష్ఠవం మరియు భ్రమణ సౌష్ఠవం
- భ్రమణ సౌష్ఠవం కల పటాలను భ్రమణం చేసినపుడు అవి తొలిస్థితిని పోలిన స్థితులలోకి ఒకటి కన్నా ఎక్కువసార్లు రావచ్చును. ఈ సంఖ్యను భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం అంటారు.
- ఒక పటాన్ని పోలిన పెద్ద లేదా చిన్న సరూప పటాలను గీచే పద్ధతిని విస్తరణ అంటారు. ఒకే పటాలను ప్రక్కప్రక్కనే ఖాళీలు లేకుండా లేదా అతిక్రమణలు లేకుండా కొంత వైశాల్యాన్ని ఆక్రమించేట్లు అమర్చుటను టెస్సలేషన్ అంటారు.

బహుభుజి భ్రమణము

n భుజాలు కలిగిన క్రమ బహుభుజాలను గీయుటకు ఈ పద్ధతి ఉపయోగకరము.

పూర్తి భ్రమణములో పునరావృతమగు స్థితులు కల్పించుట ద్వారా ఆసక్తికర చిత్రములను ఏర్పరచవచ్చును. 360^0 లను పునరావృత స్థితుల భాగించిన భ్రమణకోణము వచ్చును.

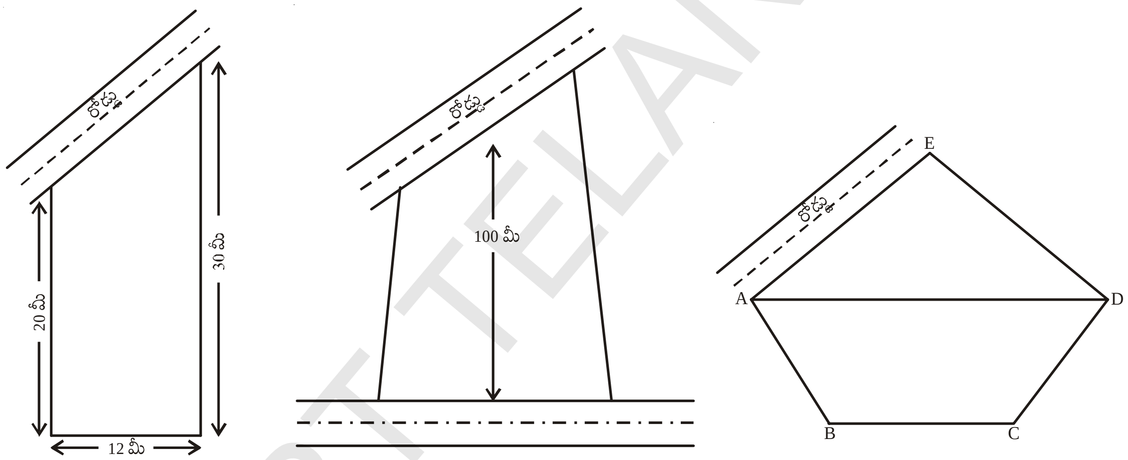
చతురస్రాన్ని దాని కర్ణపు మధ్య బిందువు ఆధారంగా భ్రమణము చేసిన వచ్చు ఆకృతులు ఎలా ఉంటాయి?

అధ్యాయం 9

సమతల పటముల వైశాల్యములు

9.0 పరిచయం

దేవర్ష తను నివసించుట కొరకు ఇంటిస్థలమును కొని దానిలో ఇంటిని నిర్మించాలని అనుకొన్నాడు. అతడు చూసిన కొన్ని స్థలముల ఆకృతులు ఈ క్రింద చూపబడినవి.



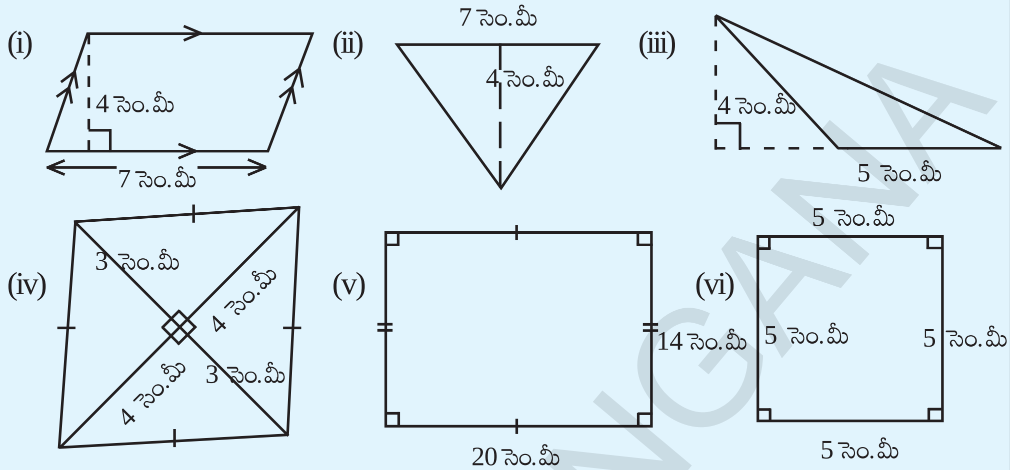
(ఎ) (బి) (సి)

ఇంటిస్థలం (ఎ) , సమలంబ చతుర్భుజి ఆకృతిలోనూ, ఇంటిస్థలం (బి) చతుర్భుజి ఆకృతిలోనూ, ఇంటిస్థలం (సి) పంచభుజి ఆకృతిలోనూ వుంది. దేవర్ష తను చూచిన ఇంటిస్థలముల వైశాల్యములను గణించి తనకు అవసరమైన స్థలమును ఎంపిక చేసుకోవాలి అని తలిచాడు.

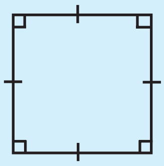
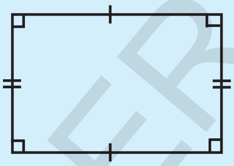
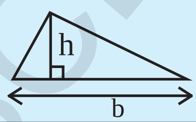
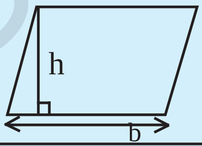
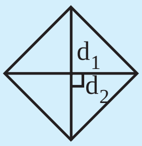
దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం మరియు సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యములను కనుగొను పద్ధతులను నేర్చుకొన్నారు. ఈ అధ్యాయంలో చతుర్భుజం, సమలంబ చతుర్భుజం, వృత్తం మరియు సెక్టరు యొక్క వైశాల్యములను కనుగొను పద్ధతులను నేర్చుకొందాం. ముందుగా మనం నేర్చుకొన్న దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం మరియు సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యములను గూర్చి పునఃశ్చరణ చేసుకుందాం.

ఇవి చేయండి.

1. ఈ క్రింది పటముల యొక్క వైశాల్యములను కనుక్కోండి.

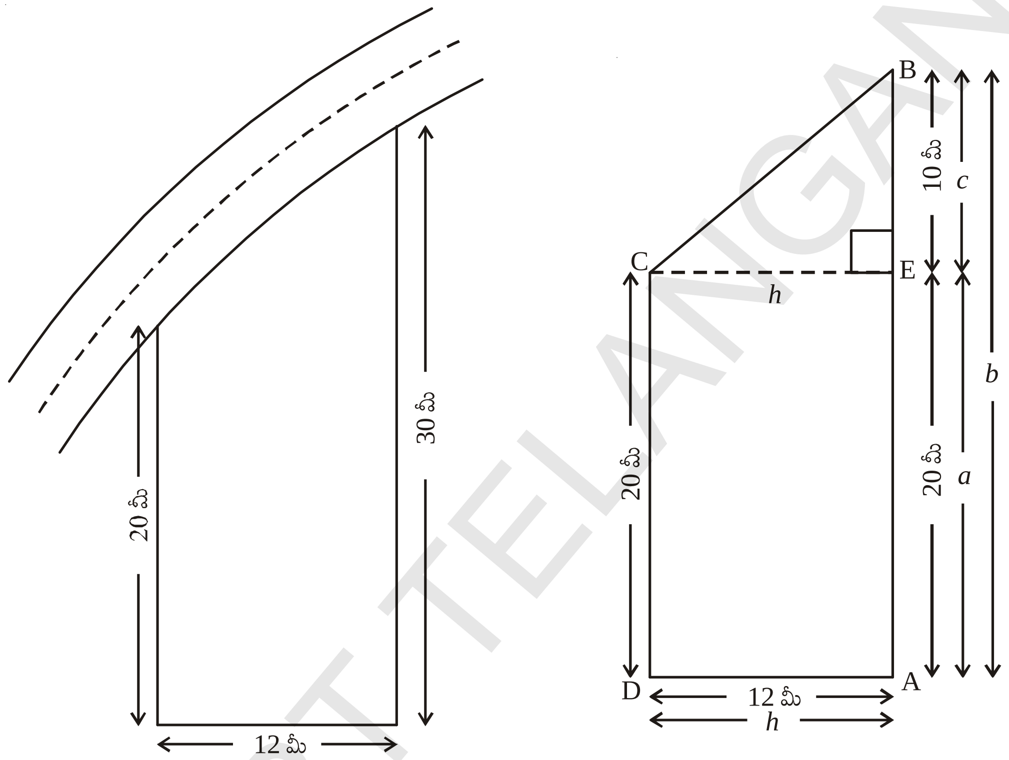


2. కొన్ని సమతల పటముల యొక్క కొలతలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. ఇచ్చిన సమాచారం అసంపూర్తిగా యున్నది. లోపించిన సమాచారమును కనుగొనుము.

పటం	కొలతలు	వైశాల్యమునకు సూత్రం	పటవైశాల్యం
 చతురస్రం	చతురస్రభుజం = 15 సెం.మీ	A = భుజం×భుజం	....
 దీర్ఘచతురస్రం	పొడవు = 20 సెం.మీ వెడల్పు = ...	$A = l \times b$	280 చ.సెంమీ
 త్రిభుజం	భూమి = 5 సెంమీ ఎత్తు = ...	A = ...	60 చ.సెంమీ
 సమాంతర చతుర్భుజం	ఎత్తు = 7.6సెం.మీ భూమి = ...	$A = b \times h$	38 చ.సెంమీ
 (రాంబస్) సమచతుర్భుజం	d_1 = 4 సెం.మీ d_2 = 3 సెం.మీ	....	....

9.1 సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యము

కుమార్ నకు ప్రధాన రహదారికి సమీపంలో ఇంటిస్థలం యున్నది. తన ఇంటిస్థలంనకు సమీపంలో యున్న ఇంటిస్థలములన్నీ దీర్ఘచతురస్రాకార ఆకృతిలో ఉండగా, తన ఇంటి స్థలం మాత్రము కేవలం ఒక జత సమాంతర భుజములను మాత్రమే కల్గియుంది. అందుచే ఆ స్థలం సమలంబచతుర్భుజి ఆకృతిని పోలియున్నదిగా గుర్తించాడు. ఆ ఇంటి స్థల వైశాల్యమును మీరు కనుగొనగలరా?



(i) (ii)

పటం (i) లో చూపబడిన ఇంటిస్థలము యొక్క శీర్షములకు పేర్లు పెడదాం. CE ⊥ AB ను గీయడం వలన ఈ స్థలమును రెండు భాగములుగా విభజించవచ్చు. పటం (ii)లో చూపిన విధముగా అందులో ఒకటి దీర్ఘ చతురస్రాకృతి మరొకటి త్రిభుజ ఆకృతిని కల్గియున్నవి.

$$\Delta\ ECB \text{ వైశాల్యం} = \frac{1}{2} h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 \text{ చ.మీ}$$

$$ADCE \text{ దీర్ఘచతురస్ర వైశ్యాలం} = AE \times AD = 20 \times 12 = 240 \text{ చ.మీ}$$

$$ABCD \text{ సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం} = \Delta\ ECB \text{ వైశాల్యం} + ADCE \text{ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం}$$

$$= 60 + 240 = 300 \text{ చ.మీ}$$

కావున సమలంబ చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం కనుగొనాలంటే ADCE దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం మరియు ECB త్రిభుజ వైశాల్యం కలపాలి.

$\overline{AD} = \overline{EC} = h$

$\overline{AE} = a,\ \overline{AB} = b = a + c$

$\therefore$ ABCD వైశాల్యం = ADCE వైశాల్యం + ECB త్రిభుజవైశాల్యం

$$= (h \times a) + \frac{1}{2}(h \times c)$$

$$= h(a + \frac{1}{2}c)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right) = \frac{h}{2}(a + a + c)$$

$$= \frac{1}{2}h\,(a + b)\ (\because\ c + a = b)$$

$= \frac{1}{2}$ ×(సమాంతర భుజముల మధ్య లంబదూరం)

× (సమాంతరభుజముల పొడవుల మొత్తం)

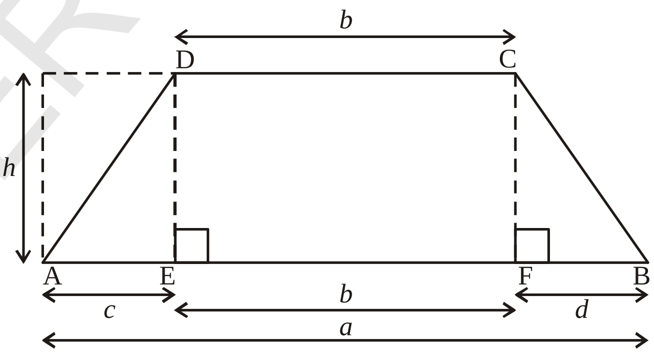
h, b మరియు a విలువలను ప్రతిక్షేపించుట ద్వారా సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చు.

ఇక్కడ	$h = 12$
	$a = 20$
	$b = 30$

సమలంబ చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం $= \frac{1}{2}h\,(a + b)$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times (30 + 20) = 300$ చ.మీ

ఉదాహరణ 1: ఇక్కడ ఆటస్థలము యొక్క పటము ఇవ్వబడింది. ఆటస్థలము యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.



సాధన: పటంను దీర్ఘచతురస్రం, త్రిభుజంగా విభజించలేము. దానికి బదులుగా ఒక దీర్ఘచతురస్రం, రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చు. $DE \perp AB$ మరియు $CF \perp AB$ ను గీయుట ద్వారా సమలంబ చతుర్భుజం ABCD ను మూడు భాగాలుగా విభజించవచ్చు. వాటిలో DEFC దీర్ఘచతురస్రం మరియు రెండు త్రిభుజాలు ΔADE మరియు ΔCFB.

ABCD సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యం = ΔADE వైశాల్యం + DEFC దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం
+ CFB త్రిభుజ వైశాల్యం

$$= (\frac{1}{2} \times h \times c) + (b \times h) + (\frac{1}{2} \times h \times d)$$

$$= h\left[\frac{1}{2}c + b + \frac{1}{2}d\right]$$

$$= h\left[\frac{c+2b+d}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{c+b+d+b}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{a+b}{2}\right] \quad (c + b + d = a)$$

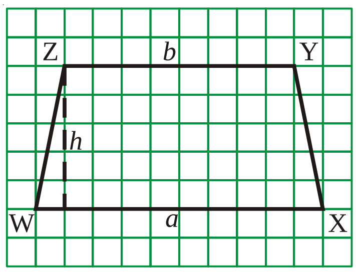
కావున సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమునకు సూత్రమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$\text{వైశాల్యం} = \text{ఎత్తు} \times \left[\frac{\text{సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times (\text{సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరం}) \times (\text{సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం})$$

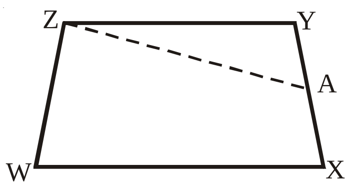
కృత్యము

1. గ్రాఫు కాగితముపై సమలంబ చతుర్భుజము WXYZ ను ప్రక్క పటములో చూపిన విధముగా గీయుము మరియు దానిని కత్తిరించుము. (పటము (i))



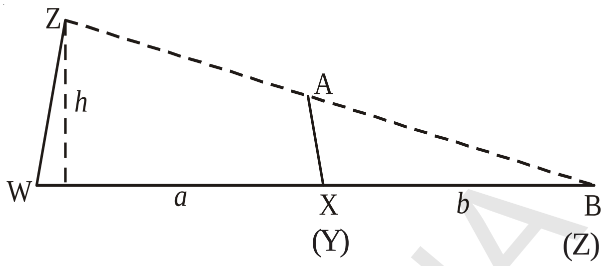
పటం (i)

2. XY యొక్క మధ్యబిందువును గుర్తించి (పటము (ii))లో చూపిన విధముగా మడచాలి.



పటం (ii)

3. రేఖాఖండము AZను గీయుము.



పటం (iii)

4. ZA వెంబడి సమలంబచతుర్భుజంలో WXAZ ను కత్తిరించడం ద్వారా అది రెండు భాగాలుగా విభజించబడుతుంది. AY ను AX తో ఏకీభవించేటట్లుగా పటం (iii) లో చూపిన విధముగా Δ ZYA ను అమర్చితే త్రిభుజములో Δ WZB ఏర్పడుతుంది.

పెద్ద త్రిభుజం యొక్క భూమి పొడవు ఎంత? పటం (iii) ఆధారంగా దాని వైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రం రాయండి.

5. Δ WZB వైశాల్యము మరియు సమలంబ చతుర్భుజం WXAZ వైశాల్యముల సమానమేనా? (ఎందుచేత?)

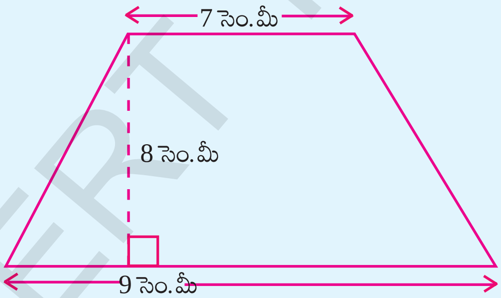
సమలంబ చతుర్భుజము WXAZ వైశాల్యం = త్రిభుజం WZB వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times \text{ఎత్తు} \times \text{భూమి} = \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$$

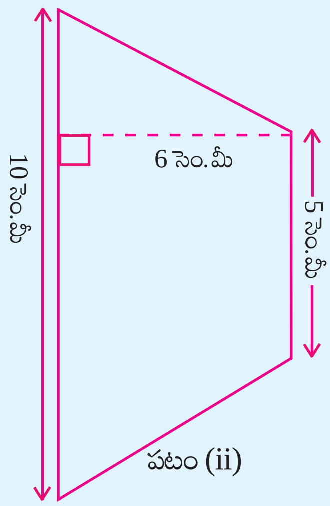
గమనిక : గ్రాఫ్ కాగితంలోని ప్రమాణ చదరాలను లెక్కించుట ద్వారా వైశాల్యాన్ని పరీక్షించండి.

ఇవి చేయండి.

1. ఈ క్రింది సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యములను కనుక్కోండి.



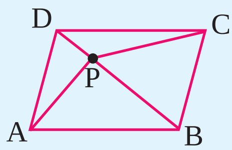
పటం (i)



పటం (ii)

2. సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం 16 చ.సెం.మీ. సమాంతరభుజాలలో ఒక భుజం పొడవు 5 సెంమీ మరియు వాటి మధ్యదూరం 4 సెంమీ. రెండవ సమాంతర భుజం యొక్క పొడవును కనుగొనుము. ఈ సమలంబ చతుర్భుజమును గ్రాఫు కాగితముపై గీసి దాని వైశాల్యంతో సరిచూడండి.

3. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము దాని వైశాల్యం 100 చ.సెం.మీ. P అనేది పటంలో చూపినట్లు దాని అంతరంలో బిందువు. అయినా ΔAPB + ΔCPD ల వైశాల్యం కనుగొనండి.

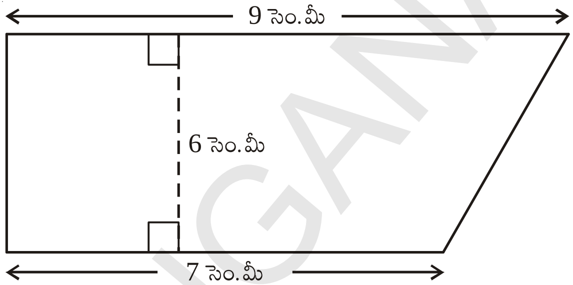


సాధించిన సమస్యలు

ఉదాహరణ 2: సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క సమాంతర భుజాల కొలతలు వరుసగా 9 సెంమీ మరియు 7 సెం.మీ. వాటి మధ్య లంబదూరం 6 సెం.మీ అయిన సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన : సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం = (9 + 7) సెం.మీ॥ = 16 సెం.మీ॥

వాటి మధ్య లంబదూరం = 6 సెం.మీ



సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) × (సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరం)

$= (\frac{1}{2} \times 16 \times 6)$ చ.సెంమీ

$= 48$ చ.సెంమీ

ఉదాహరణ 3: సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యం 480 చ.సెంమీ. సమాంతర భుజాలలో ఒక భుజం కొలత 24 సెంమీ మరియు వాటి మధ్య లంబదూరం 8సెం.మీ రెండవ సమాంతర భుజము యొక్క కొలతను కనుగొనుము.

సాధన :

సమాంతర భుజాల ఒకదాని పొడవు = 24 సెంమీ॥

రెండవ సమాంతర భుజము పొడవు = 'x' సెంమీ అనుకొందాం.

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = 480 చ.సెంమీ

సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరం = 8 సెంమీ॥

∴ సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$\therefore \quad 480 = \frac{1}{2} \times (24 + x) \times 8$

$\Rightarrow \quad 480 = 96 + 4x$

$\Rightarrow \quad 480 - 96 = 4x$

$\Rightarrow \quad 4x = 384$

$\Rightarrow \quad x = \frac{384}{4} = 96$ సెంమీ॥

ఉదాహరణ 4: సమలంబ చతుర్భుజములోని సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి 4:1. వాటి మధ్యదూరం 10సెంమీ. సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం 500 చ.సెంమీ అయిన సమాంతర భుజాల కొలతలను కనుగొనుము.

సాధన : సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = 500 చ.సెంమీ

సమలంబ చతుర్భుజ సమాంతర భుజాల మధ్యదూరం =10 సెంమీ॥

సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి = 4 : 1

సమలంబ చతుర్భుజ సమాంతర భుజాల పొడవులు $4x$ సెం.మీ మరియు x సెం.మీ అనుకొందాం.

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$$\Rightarrow \quad 500 = \frac{1}{2}(x + 4x) \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 500 = (x + 4x)\, 5$$

$$\Rightarrow \quad 500 = 25x$$

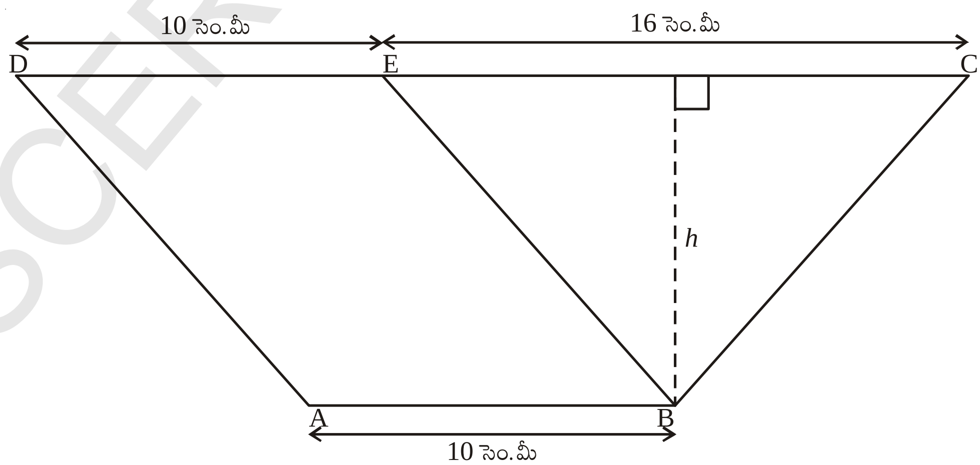
$$\Rightarrow \quad x = \frac{500}{25} = 20\text{సెంమీ}$$

$\therefore$ ఒక సమాంతర భుజం పొడవు = 20సెంమీ॥

$\therefore$ మరో సమాంతర భుజం పొడవు $= 4x = 4 \times 20 = 80$ సెంమీ

($\because$ సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి 4:1)

ఉదాహరణ 5: ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజం ABEDలో AB = DE = 10 సెంమీ॥ మరియు Δ BEC వైశాల్యం 72 చ.సెంమీ. CE = 16సెం.మీ అయినచో సమలంబ చతుర్భుజం ABCD యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.



సాధన : Δ BEC త్రిభుజవైశాల్యం = × భూమి × ఎత్తు

$$72 = \frac{1}{2} \times 16 \times h$$

$$h = \frac{72 \times 2}{16} = 9 \text{ సెంమీ॥}$$

సమలంబ చతుర్భుజం ABCD లో

AB = 10 సెంమీ॥

DC = DE + EC ($\because$ DE = AB)

= 10 సెంమీ + 16 సెంమీ = 26 సెంమీ

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం ABCD

$$= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$$

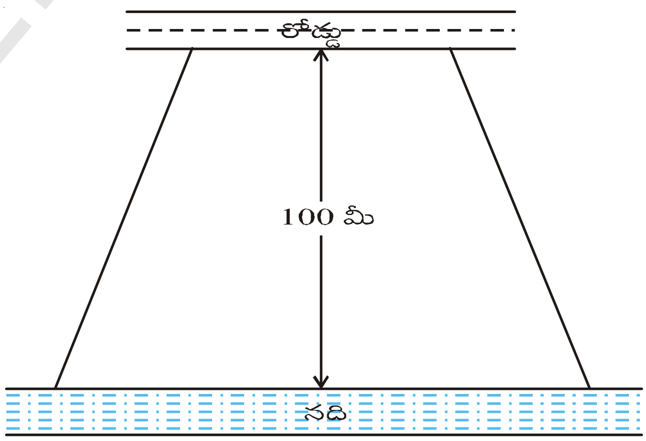
$$= \frac{1}{2} (AB + DC)\, h$$

$$= \frac{1}{2} (10 + 26) \times 9 \text{ చ.సెంమీ}$$

= 18 × 9 చ.సెంమీ

= 162 చ.సెంమీ

ఉదాహరణ 6: మోహన్ నదీతీరంలో యున్న కొంత పొలంను కొనాలి అని అనుకొన్నాడు. ఆ పొలం యొక్క ఆకృతి ఈ క్రింది పటమువలె యున్నది. నదీతీరము వైపు యున్న స్థలం పొడవు, రహదారి వైపు యున్న పొడవునకు రెట్టింపు యున్నది మరియు రెండు వైపులు సమాంతరముగా యున్నవి.



ఆ స్థల వైశాల్యం 10,500 చదరపు మీటర్లు మరియు నది, రహదారి మధ్యదూరం 100 మీ॥. నదీతీరము వెంబడి యున్న స్థలం యొక్క పొడవును కనుక్కోండి ?

సాధన: రహదారి వైపు యున్న స్థలము యొక్క అంచు పొడవు = x మీ॥ అనుకొందాం.

అయిన, నది తీరము వెంబడి యున్న స్థలము యొక్క అంచుపొడవు = $2x$ మీ.

రెండింటి మధ్య దూరము = 100 మీ॥

స్థలవైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$$10{,}500 = \frac{1}{2}(x + 2x) \times 100$$

$$10{,}500 = 3x \times 50$$

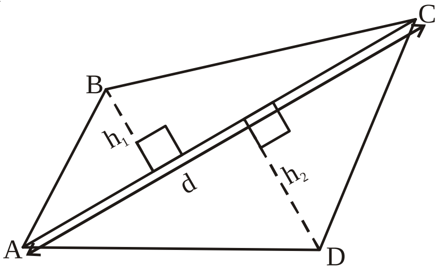
$$x = \frac{10{,}500}{3 \times 50} = 70 \text{ మీ.}$$

$\therefore$ నదీతీరం వెంబడి యున్న స్థలము యొక్క అంచుపొడవు $= 2x = 2 \times 70$

$= 140$ మీ॥

9.2 చతుర్భుజ వైశాల్యము

ఒక చతుర్భుజము కర్ణం గీయడం ద్వారా ఆ చతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చు. ఈ పద్ధతిని "త్రిభుజీకరణ" (ట్రయాంగులేషన్) అందురు.



మహేష్ చతుర్భుజం ABCD ని కర్ణం AC గీయుట ద్వారా చతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించాడు.
త్రిభుజవైశాల్యమును కనుగొనడానికి కావలసిన కొలతలు రెండు. అవి త్రిభుజము భూమి మరియు దానిపై గీయబడిన ఉన్నతి (ఎత్తు) యొక్క కొలతలు.
మహేష్ కర్ణము AC పై శీర్షములు B మరియు D ల నుండి రెండు లంబాలను గీసాడు. వాటిని వరుసగా h_1 మరియు h_2 లుగా గుర్తించాడు.

చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యం = (ABC త్రిభుజ వైశాల్యం) + (ADC త్రిభుజ వైశాల్యం)

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times h_1\right) + \left(\frac{1}{2} AC \times h_2\right)$$

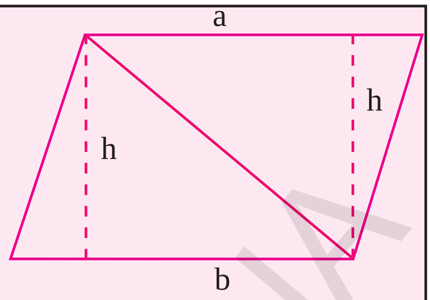
$$= \frac{1}{2} AC[h_1 + h_2]$$

ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

ఇక్కడ కర్ణము AC యొక్క పొడవు d.

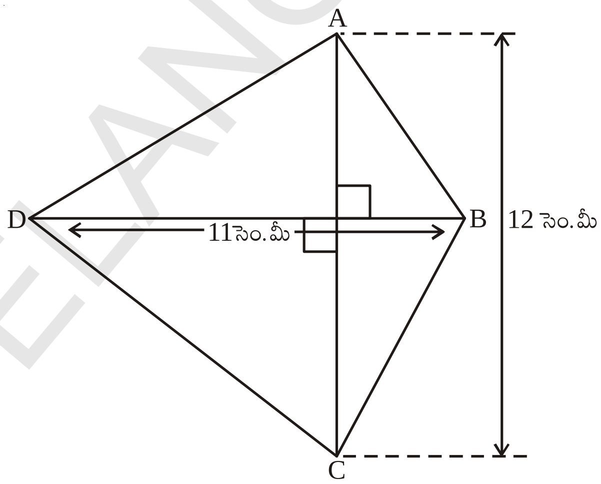
ప్రయత్నించండి :

సమాంతర చతుర్భుజము, ఒక చతుర్భుము అని మనకు తెలుసుకదా! అందుచే సమాంతర చతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిద్దాం. కావున ఆ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యం కనుగొనిన అది సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం అవుతుంది. ఈ పద్ధతి ద్వారా వచ్చిన సూత్రము మీకు ముందే తెలుసా?



చతుర్భుజవైశాల్యము = $\frac{1}{2}$ × (కర్ణము పొడవు) × (కర్ణముపై మిగిలిన రెండు శీర్షముల నుండి గీచిన లంబముల పొడవుల మొత్తము)

ఉదాహరణ 7: ప్రక్క పటములో చూపబడిన చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.



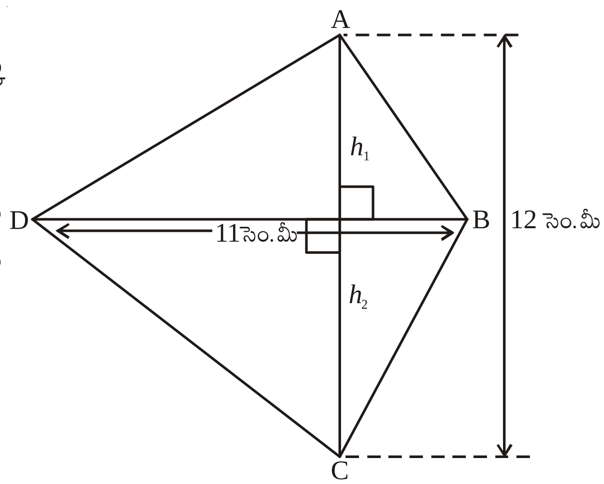
పటం (i)

సాధన: చతుర్భుజము ABCD యొక్క

వైశాల్యము = $\frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$

కర్ణముపై మిగిలిన రెండు శీర్షముల నుండి గీచిన లంబముల పొడవుల మొత్తం AC = $(h_1 + h_2)$

$h_1 + h_2 = 12$ సెంమీ.

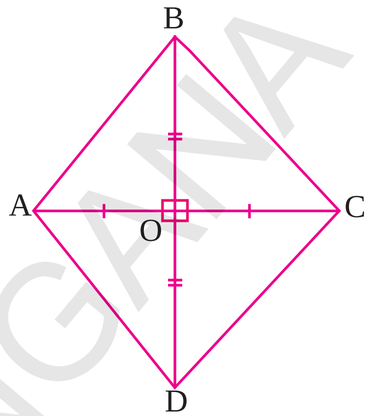


పటం (ii)

కర్ణము BD యొక్క పొడవు = 11 సెంమీ॥

$\therefore$ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం = $\frac{1}{2}d(h_1+h_2) = \frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 6 \times 11 = 66$ చ.సెంమీ.

9.3 సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము



త్రిభుజీకరణ పద్ధతి ద్వారా సమచతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజములుగా విభజించి వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చు.

సమ చతుర్భుజము ABCD లో కర్ణములు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయన్న విషయము మనకు తెలుసు. అందుచే

$\therefore$ OA = OC, OB = OD

మరియు $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^0$

సమ చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యం = Δ ABC వైశాల్యం + Δ ADC వైశాల్యం

$$= \quad \times AC \times OB + \frac{1}{2} \times AC \times OD$$

$$= \frac{1}{2} \times AC\ (OB+OD)$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD \qquad (\because OB + OD = BD)$$

అందుచే సమచతుర్భుజ వైశాల్యము = $\frac{1}{2} \times d_1d_2$, d_1 మరియు d_2 లు కర్ణములు యొక్క పొడవులు.

వేరే విధంగా తెలిపిన సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము = కర్ణముల పొడవుల లబ్దములో సగం.

ఉదాహరణ 8: కర్ణముల పొడవులు 10 సెంమీ మరియు 8.2 సెంమీలుగా గల సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యములను కనుక్కోండి.

సాధన : సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యం

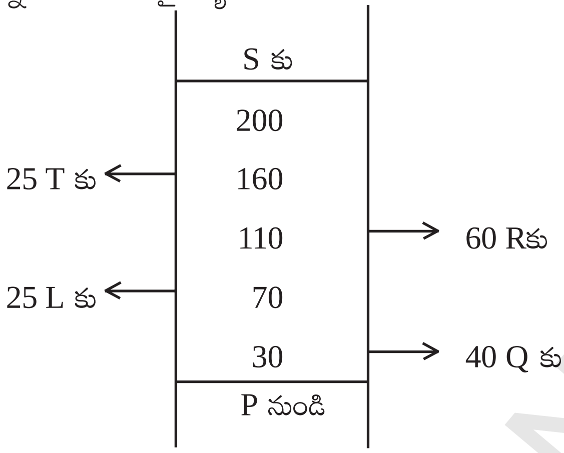
$$= \frac{1}{2} \times d_1d_2 \ (d_1, d_2 \text{ లు కర్ణముల యొక్క పొడవులు})$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2 \text{ చ.సెంమీ}$$

$$= 41 \text{ చ.సెంమీ}$$

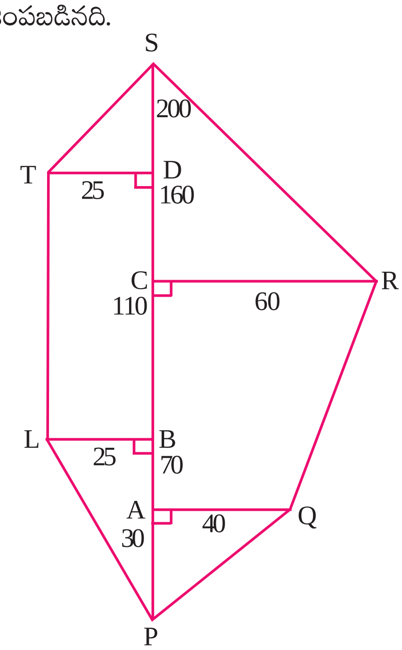
9.4 పొలం కొలతలతో వైశాల్యం కనుగొనుట

ఒక సర్వేయరు తన పొలం చిట్టా (Field Book) లో ఒక పొలమును గురించి కొలతలు ఈ క్రింది విధంగా నమోదు చేసుకొన్నాడు ఆ పొలం వైశాల్యం కనుగొనండి.



పై దత్తాంశము ఈ క్రింది సమాచారంను తెలియ జేస్తుంది.

1. పొలం P, Q, R, S, T, L శీర్షాలుగా గల షడ్భుజి.
2. PS కర్ణంగా తీసుకోబడింది.
3. PS కు ఒక వైపున శీర్షములు Q, R లు రెండవ వైపున T, L లు శీర్షములుగా ఉన్నవి.
4. Q నుండి A కు 40 మీ. లంబం గీయబడినది. ఇదేవిధంగా R, T, L ల నుండి మిగిలిన లంబాలు గీయబడ్డాయి.
5. పొలం యొక్క నిజమైన కొలతలను క్రింది నుండి పై వరకు పొలం చిట్టాలో నమోదు చేయబడి ఉంటాయి.
6. పొలం రెండు త్రిభుజాలు, రెండు సమలంబ చతుర్భుజాలుగా విభజింపబడినది.



పై పటం నుండి ఈ క్రింది కొలతలను కనుగొనండి.

AC $= PC - PA$

$= 110 - 30 = 80$ మీ

CS $= PS - PC$

$= 200 - 110 = 90$ మీ

DS $= PS - PD$

$= 200 - 160 = 40$ మీ

BD $= PD - PB$

$= 160 - 70 = 90$ మీ

$\triangle$ APQ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$ చ.యూ.

సమలంబ చతుర్భుజం AQRC వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times AC\ (AQ + CR)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40 + 60)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times 100$

$= 4000$ చ.మీ.

$\triangle$ CRS వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times CR \times CS = \frac{1}{2} \times 60 \times 90 = 2700$ చ.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజం PLTS వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times LB\ (TL + SP)$

$= \frac{1}{2} \times 25(90 + 200)$ $(\because TL = BD = 90)$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 290$

$= 3625$ చ.మీ.

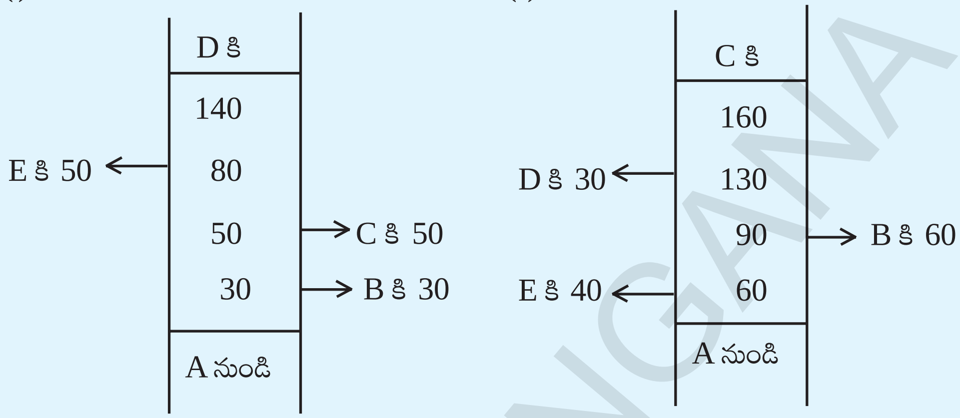
పొలం వైశాల్యం $= 600 + 4000 + 2700 + 3625$

$= 10,925$ చ.మీ.

ఇవి చేయండి.

ఒక సర్వేయరు ఫీల్డుబుక్‌లో నమోదు చేయబడిన ఈ దిగువ వివరాల సహాయంతో పొలం వైశాల్యం కనుగొనండి?

(i) (ii)

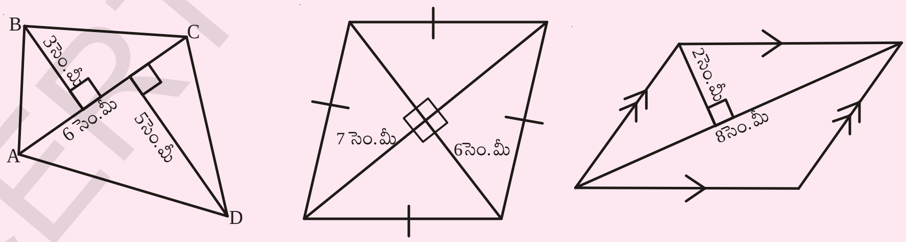


ఆలోచించు మరియు చర్చించు:

సమాంతర చతుర్భుజములో, ఒక కర్ణము గీయడం ద్వారా ఆ సమాంతర చతుర్భుజమును రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చు. ఈ విధముగానే సమలంబ చతుర్భుజమును రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజించగలమా?

వీటిని ప్రయత్నించండి.

ఈ క్రింది చతుర్భుజముల యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనండి.

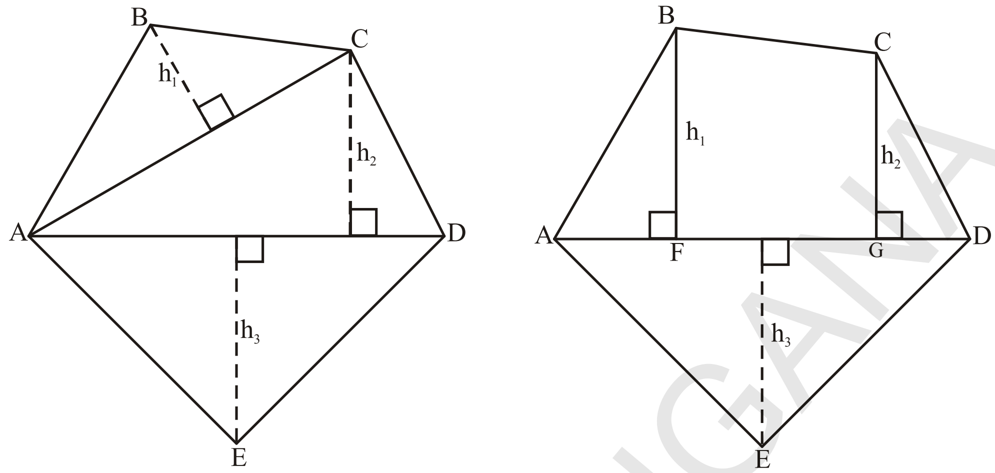


(i) (ii) (iii)

9.5 బహుభుజి వైశాల్యము

బహుభుజి యొక్క వైశాల్యమును, బహుభుజిని కొన్ని చిన్న చిన్న సమతల పటములుగా (త్రిభుజము, దీర్ఘచతురస్రం మొదలగునవి) విభజించడము ద్వారా కనుక్కోవచ్చు. ఆ సమతల పటముల వైశాల్యములను కనుగొని వాటిని కూడుట ద్వారా ఇచ్చిన బహుభుజి యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చు.

ఈ క్రింది పటములను పరిశీలించండి.



(i) (ii)

పటం.(i) : కర్ణములు AC మరియు AD లను గీయుట ద్వారా పంచభుజి ABCDE ను మూడు భాగములుగా విభజించవచ్చు. అందుచే

పంచభుజి ABCDE వైశాల్యము = ΔABC వైశాల్యం + ΔACD వైశాల్యం + ΔAED వైశాల్యం

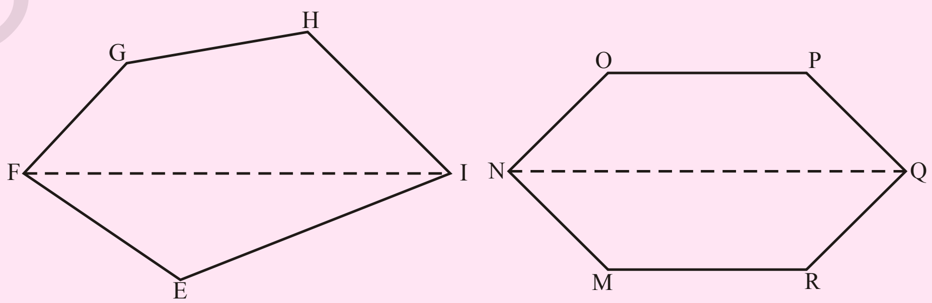
పటం.(ii) : కర్ణము AD పై రెండు లంబములు BF మరియు CG లను గీయుట ద్వారా పంచభుజి ABCDE ను నాలుగు భాగాలుగా విభించవచ్చు. అందుచే

పంచభుజి ABCDE వైశాల్యము = AFB లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం + సమలంబ చతుర్భుజం BFGC వైశ్యాలం + CGD లంబకోణ త్రిభుజవైశాల్యం + AED త్రిభుజవైశాల్యం

దీనికి గల కారణములు ఏమిటి ? (సమలంబ చతుర్భుజము BFGC యొక్క సమాంతర భుజాలను గుర్తించండి).

ప్రయత్నించండి.

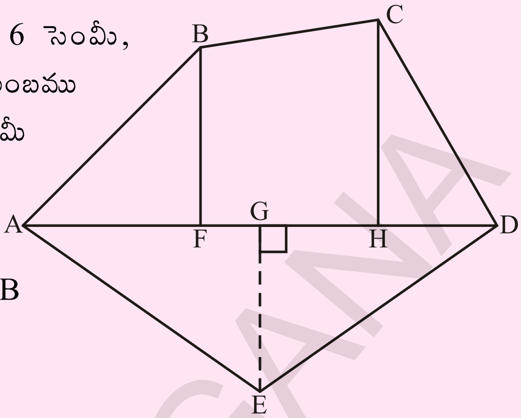
(i) ఈ క్రింద గీయబడిన బహుభుజిని భాగములుగా (త్రిభుజములు మరియు సమలంబ చతుర్భుజం)గా విభజించి వాటి యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనండి.



బహుభుజి EFGHI యొక్క కర్ణం FI బహుభుజి MNOPQRలో NQ కర్ణం

(ii) ప్రక్క పటంలో బహుభుజి ABCDE భాగములుగా విభజించబడింది.

AD = 8సెం.మీ, AH = 6 సెంమీ,
AF = 3సెంమీ మరియు లంబము
BF = 2సెం.మీ, CH = 3సెంమీ
EG = 2.5సెం.మీ అయిన
వైశాల్యం కనుక్కోండి.



ABCDE బహుభుజి వైశాల్యం $= \Delta AFB$

వైశాల్యం + ________

ΔAFB వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times AF \times BF$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ ________

FBCH సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యం $= FH \times \frac{(BF + CH)}{2}$

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ $[\because FH = AH - \mathbf{AF}]$

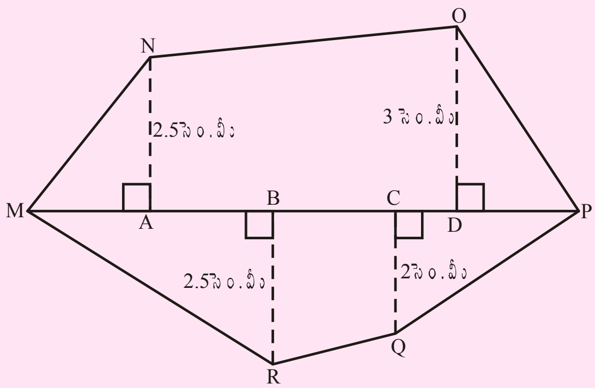
Δ CHD వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times HD \times CH =$ ________

Δ ADE వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AD \times GE =$ ________

కావున ABCDE బహుభుజి వైశాల్యము = ...

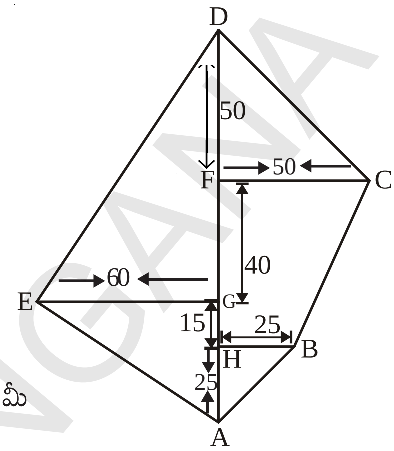
(iii) MNOPQR బహుభుజిలో MP = 9 సెం.మీ, MD = 7 సెంమీ, MC = 6 సెంమీ, MB = 4 సెంమీ, MA = 2 సెంమీ అయితే వైశాల్యమును కనక్కోండి.

కర్ణము MP పై గీయబడిన లంబాలు NA, OD, QC మరియు RB.



ఉదాహరణ 9: ప్రక్క పటములో చూపిన పొలము యొక్క వైశాల్యము కనక్కోండి. పటములో చూపిన కొలతలు అన్నియూ మీటర్లలో ఉన్నవి.

సాధన: ABCDE వైశాల్యం = Δ ABH వైశాల్యం + సమలంబ చతుర్భుజం BCFH వైశాల్యం + Δ CDF వైశాల్యం + Δ AED వైశాల్యం



ABH త్రిభుజ వైశాల్యం

$= \quad \times AH \times HB$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 25$

$= \frac{625}{2}$ చ.మీ = 312.5 చ.మీ

సమలంబ చతుర్భుజం BCFH వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times (HB + FC) \times HF$

$= \frac{1}{2}(25 + 50) \times 55$ చ.మీ

$= \frac{75 \times 55}{2} = 2062.5$ చ.మీ

Δ CDF వైశాల్యం $= \quad \times FC \times DF$

$= \frac{1}{2} \times 50 \times 50$ చ.మీ = 1250 చ.మీ

Δ AED వైశాల్యం $= \quad \times AD \times EG$

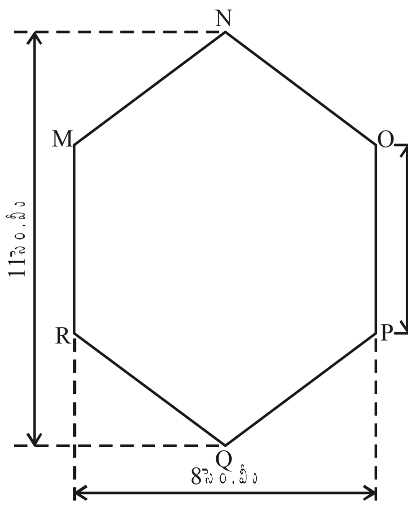
$= \frac{1}{2} \times 130 \times 60$

= 3900 చ.మీ

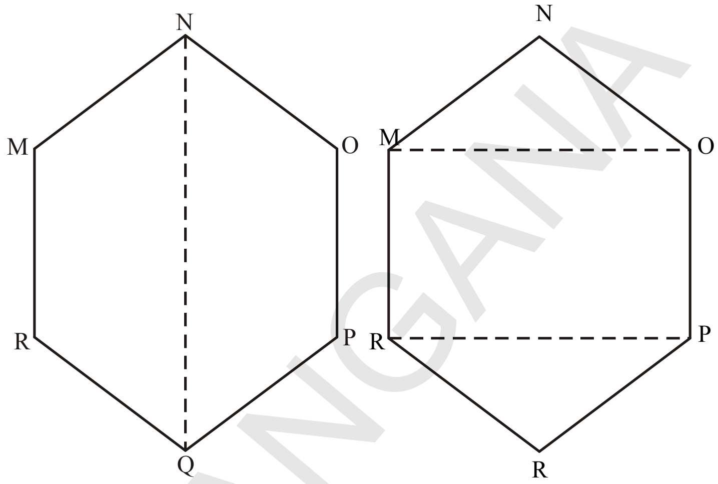
కనుక ABCDE బహుభుజి వైశాల్యము = 312.5 చ.మీ + 2062.5చ.మీ + 1250చ.మీ + 3900చ.మీ

= 7525చ.మీ

ఉదాహరణ 10: షడ్భుజి MNOPQR లో ప్రతి భుజము పొడవు 5 సెంమీ మరియు NQ సౌష్టావాక్షము. సురేష్ మరియు రుషిక షడ్భుజిని విభిన్న విధాలుగా (పటములో చూపిన విధముగా) విభజించారు. రెండు విధాలుగా షడ్భుజి యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.



(i)

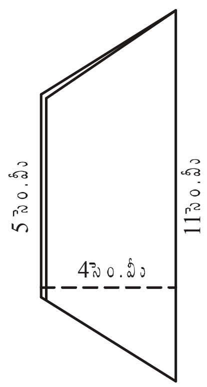


సురేష్ విధానము రుషిక విధానము

(ii)

సాధన: సురేష్ అనుసరించిన విధానము

ఇచ్చిన పటము క్రమ షడ్భుజి కనుక NQ షడ్భుజిని రెండు సర్వసమానమయిన సమలంబ చతుర్భుజములుగా విభజిస్తుంది. దీనిని 'పేపర్ ఫోల్డింగ్' ప్రక్రియద్వారా పరిశీలించవచ్చు.

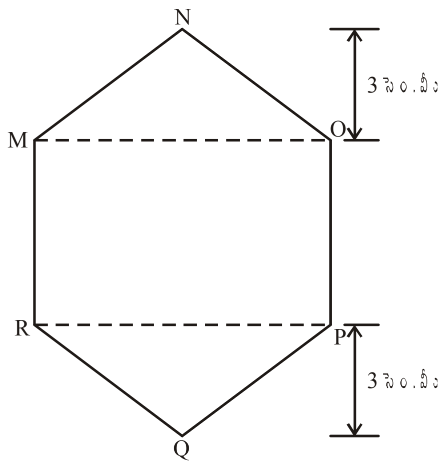


MNQR సమలంబ చతుర్భుజము వైశాల్యము

$= 4 \times \dfrac{11+5}{2} = 2 \times 16 = 32$ చ.సెంమీ

కావున MNOPQR షడ్భుజి యొక్క వైశాల్యము $= 2 \times 32 = 64$ చ.సెంమీ

రుషిక అనుసరించిన విధానము :



ΔMNO మరియు ΔRPQ లు 3 సెం.మీ ఉన్నతికల్గిన సర్వసమాన త్రిభుజాలు. దానిని ΔMNO, ΔRPQ లను కత్తిరించి ఒకదానిపై మరొకటి పెట్టుట ద్వారా (అధ్యారోహణం) గమనించవచ్చు.

ΔMNO వైశాల్యం $= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$ చ.సెంమీ

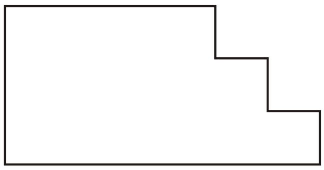
$= \Delta RPQ$ వైశాల్యం

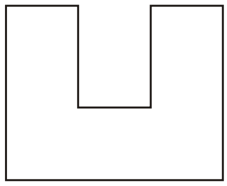
MOPR దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $= 8 \times 5 = 40$ చ.మీ

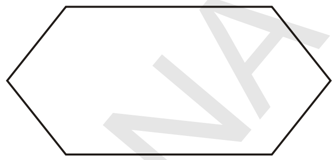
$\therefore$ MNOPQR షడ్భుజి వైశాల్యం $= 40+12+12 = 64$ చ.సెంమీ.

అభ్యాసము - 9.1

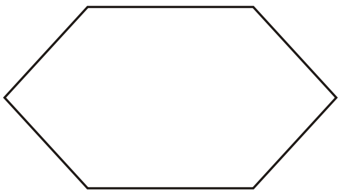
1. సూచించిన విధముగా ఇచ్చిన ఆకృతులను విభజించండి.

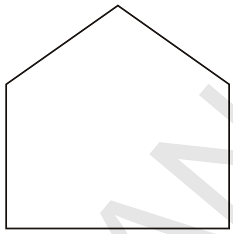






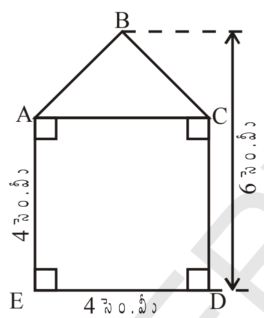
(i) మూడు దీర్ఘచతురస్రాలు (ii) మూడు దీర్ఘచతురస్రాలుగా (iii) రెండు సమలంబ చతుర్భుజాలుగా



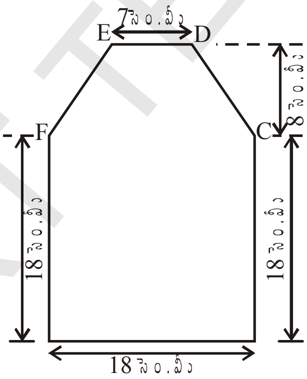


(iv) రెండు త్రిభుజాలు మరియు దీర్ఘచతురస్రము (v) 3 త్రిభుజాలుగా

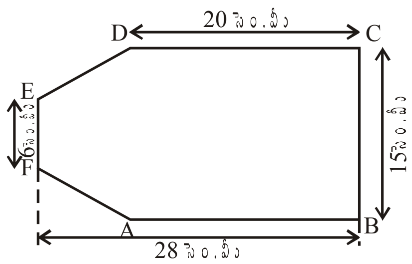
2. ఈ క్రింది పటములు యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనుము.



(i)



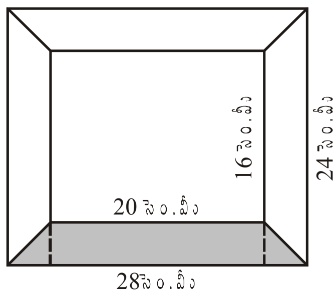
(ii)



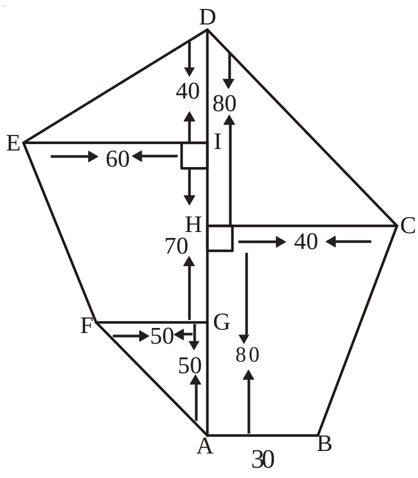
(iii)

3. ABCD చతుర్భుజములో కర్ణము AC = 10 సెంమీ మరియు AC పై శీర్షములు B మరియు D నుండి గీచిన లంబములు 5 సెంమీ మరియు 6 సెంమీ పొడవులు కల్గియుంటే ABCD చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

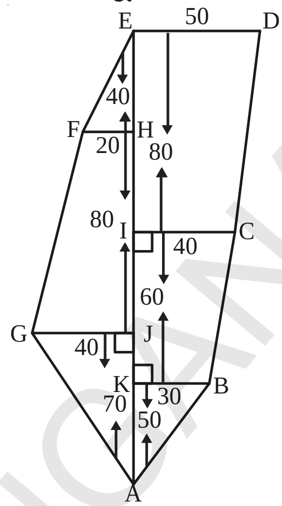
4. ప్రక్క పటములో చూపబడిన ఫోటో ఫ్రేము యొక్క బయటి అంచుకొలతలు 28 సెం.మీ × 24 సెంమీ మరియు లోపలి అంచుకొలతలు 20 సెం.మీ × 16 సెం.మీ. ఫ్రేమ్ వెడల్పు ఏకరీతిగా యున్నచో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



5. ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన పొలముల యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము. కొలతలన్నియూ మీటర్లలో యున్నవి.



(i)

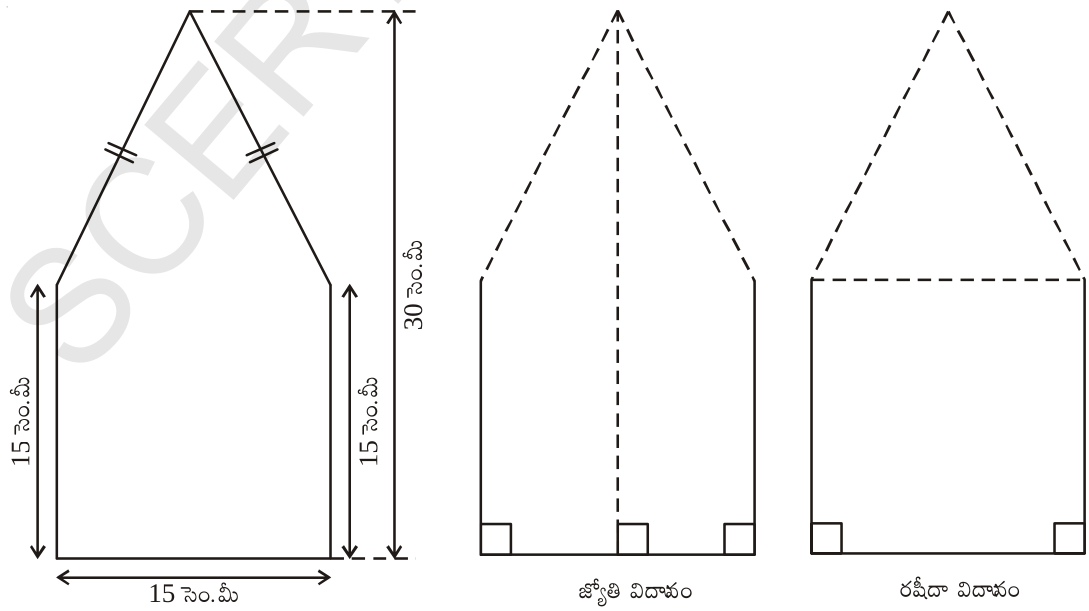


(ii)

6. సమలంబ చతుర్భుజంలోని సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి 5:3 వాటి మధ్యదూరం 16 సెంమీ. సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యము 960 చ.సెంమీ అయిన సమాంతర భుజముల పొడవులను కనుగొనుము.

7. ఒక భవనము యొక్క నేల 3000 టైల్స్‌చే కప్పబడినది. ప్రతి టైల్ సమచతుర్భుజ ఆకృతిని కల్గియుండి కర్ణముల పొడవులు 45 సెంమీ, 30 సెంమీలు కల్గియున్నది. ప్రతీ టైల్ యొక్క వెల చదరపు మీటరుకు 20 రూపాయలు అయిన ఫ్లోరింగ్‌నకు అయ్యే మొత్తము ఖర్చుఎంత?

8. ఈ క్రింద పంచభుజి ఆకృతిలో యున్న పటము ఇయ్యబడినది. దీని వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు జ్యోతి మరియు రషీదా దానిని రెండు వేర్వేరు విధాలుగా విభజించారు. అయిన రెండు విధాలుగా పంచభుజి వైశాల్యం కనుగొనండి. దాని నుండి మీరు ఏమి గమనించారు?

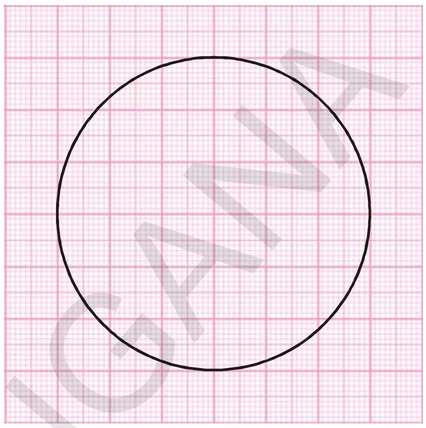


జ్యోతి విధానం

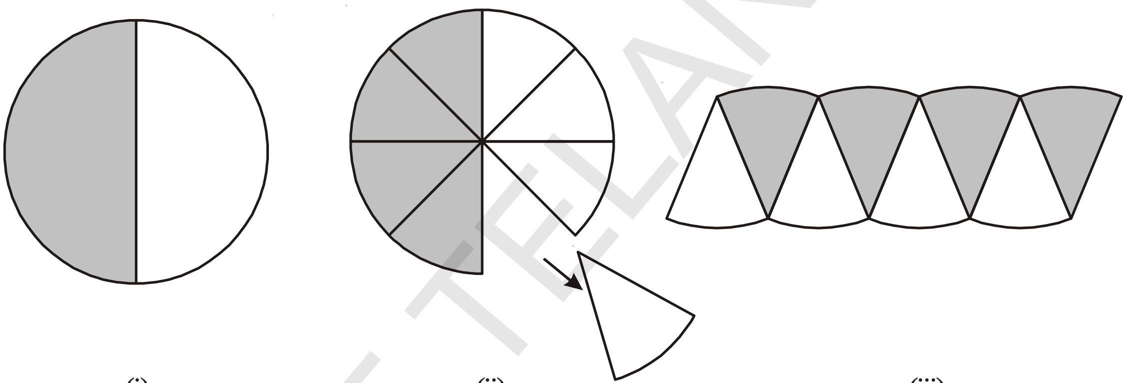
రషీదా విధానం

9.6 వృత్త వైశాల్యము

కొన్ని సందర్భాలలో వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనవలసి వస్తుంది. ముందుగా మనము వృత్త వైశాల్యమును గ్రాఫు పేపరు ద్వారా గణిద్దాం.

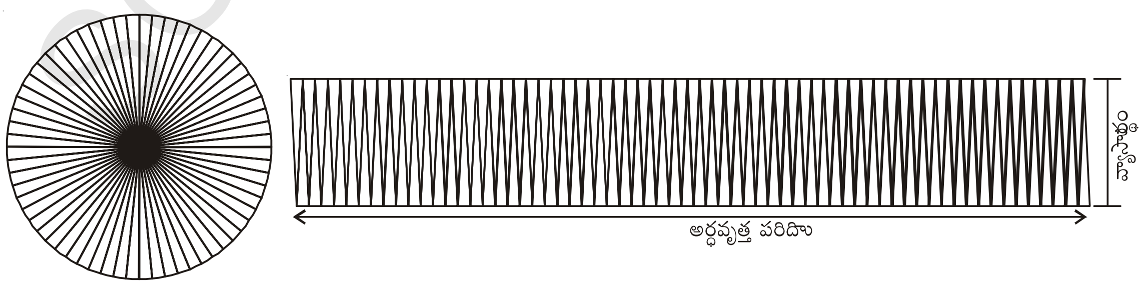


4 సెం.మీ వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తమును గ్రాఫు కాగితముపై గీద్దాం. వృత్తముచే ఆవరించబడిన చతురస్రములను గణించి వృత్త వైశాల్యమును కనుగొందాం. వృత్త అంచులు సరళరేఖలు కావు కనుక, ఈ పద్ధతిలో గణించిన వృత్త వైశాల్యము ఖచ్చితమైనదిగా కాకుండా సుమారుగా యున్న విలువను ఇస్తుంది. వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు మరో పద్ధతి యున్నది.



(i) (ii) (iii)

పటం (i) లో చూపిన విధంగా ఒక వృత్తమును గీచి, దానిలో సగభాగమును షేడ్ చేయుము. వృత్తమును పటము(ii) లో చూపిన విధముగా 8 సమాన భాగములుగా మడిచి, మడిచిన విధముగానే కత్తిరించవలెను. తరువాత పటము (iii) లో చూపిన విధముగా 8 భాగములను అమర్చవలెను. పటము సుమారుగా సమాంతర చతుర్భుజము వలే ఉంటుంది. వృత్తమును 64 సమాన భాగములుగా పటములో చూపిన విధముగా మడిచి, కత్తిరించినట్లయితే సుమారుగా దీర్ఘచతురస్రమువలే ఉంటుంది.



దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు ఎంత? దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు వృత్త వ్యాసార్థమునకు (r) సమానముగా యుంటుంది.

వృత్తమును 64 సెక్టరులుగా విభజించినట్లయితే ప్రతి వైపు 32 సెక్టర్లు. ఉంటాయి. అనగా దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు, 32 సెక్టర్ల యొక్క పొడవునకు సమానము. ఇది వృత్తపరిధిలో సగమునకు సమానము.

వృత్తవైశాల్యము = ఏర్పడిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము

$= l \times b$

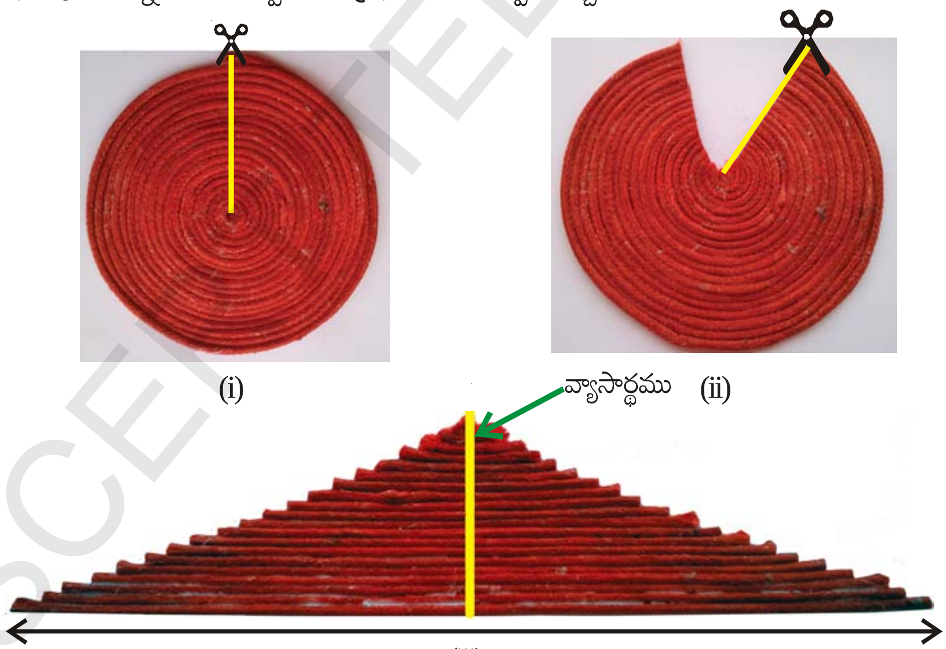
= (వృత్త పరిధిలో సగము) × వ్యాసార్థం

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

అందుచే వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

దారపు కృత్యము :

వృత్తవైశాల్యము, 'ఏబుక్ ఆఫ్ జ్యూస్' లో ఒక కృత్యము ద్వారా వివరించబడింది. ఒక దారపు యొక్క కొనను ఒక బిందువు వద్ద స్థిరముగా యుంచి పటములో చూపిన విధముగా ఏక కేంద్ర వృత్తములుగా చుట్టి, క్షితిజ లంబముగా కత్తిరించి ఆధారపుకొనలన్నీ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజముగా ఏర్పడవచ్చు.



(i) (ii)

(iii)

వృత్త పరిధి

సమద్విబాహు త్రిభుజము యొక్క భూమి వృత్త పరిధినకు సమానముగా, ఎత్తు వృత్త వ్యాసార్థమునకు సమానముగా ఉంటుంది.

త్రిభుజవైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times$ భూమి × ఎత్తు

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

$$= \pi r^2$$

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$ (ఇందులో r వృత్తవ్యాసార్థం)

ప్రయత్నించండి :

విభిన్న వ్యాసార్థములు గల వృత్తములను గ్రాఫు కాగితముపై గీయుము. ఆ వృత్తములోని యూనిట్ చతురస్రములను లెక్కించి వృత్త వైశాల్యములను గణించండి. సూత్రము ద్వారా వృత్త వైశాల్యములను లెక్కించి ఆ విలువలను పోల్చిచూడండి. ఏమి గమనించారు?

ఉదాహరణ 11: ఒక తీగ 27.5 సెంమీ. భుజముగా గల చతురస్రముగా తయారు చేయబడినది. తీగను నిటారుగా చేసి వృత్తముగా మార్చబడినది. అయిన ఆ వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము ఎంత?

సాధన: తీగ పొడవు = చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత

$= (27.5 \times 4)$ సెంమీ॥ $= 110$ సెంమీ॥

తీగ, వృత్తముగా మలచబడితే, ఆ వృత్తము యొక్క పరిధి 110 సెంమీ॥ అవుతుంది కదా!

వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము 'r' అనుకొందాం.

అందువలన వృత్తపరిధి $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times r$ సెంమీ

$$= \frac{44}{7} r \text{ సెంమీ}$$

$$\therefore \quad 110 = \frac{44}{7} r$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{110 \times 7}{44} \text{ సెంమీ}$$

$$= 17.5 \text{ సెంమీ}$$

ఉదాహరణ 12: వృత్తపరిధి 22 సెంమీ అయిన వృత్తవైశాల్యము ఎంత? మరియు దాని అర్ధవృత్త వైశాల్యం ఎంత?

సాధన: వృత్తవ్యాసార్థము = r సెంమీ॥ అనుకొందాం.

వృత్తపరిధి $= 2\pi r$

$$\therefore \quad 2\pi r = 22$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$r = 22 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2} \qquad = 3.5 \text{ సెం.మీ}$$

$\therefore$ వృత్తవ్యాసార్థం $= 3.5$ సెం.మీ

$\therefore$ వృత్తవైశాల్యం $\pi r^2 = \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right)$ చ.సెం.మీ

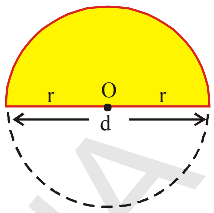
$= 38.5$ చ.సెం.మీ

అర్ధవృత్త వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times 38.5 = 19.25$ చ.సెం.మీ

అర్ధవృత్త వైశాల్యం ఎంత?

ఒక వృత్తాన్ని దాని వ్యాసం వెంబడి మడిచినట్లుగా ఊహించిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం ఏర్పడినది.



షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం వృత్త వైశాల్యంలో సగము అని చెప్పగలమా?

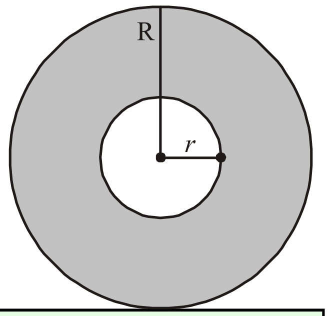
దాని వైశాల్యం వృత్త వైశాల్యంలో సగము

$= \frac{1}{2}\pi r^2$

అర్ధవృత్తం చుట్టుకొలత ఎంత?

9.7 బాట లేదా కంకణాకార స్థల వైశాల్యము

ఒక పార్కులో పటంలో చూపిన విధంగా వృత్తాకార బాట వేయబడినది. వృత్తాకార బాటలో బాహ్య, అంతరవృత్తాలు ఏక కేంద్ర వృత్తాలు. అయినా ఆ వృత్తాకార బాట వైశాల్యం కనుగొందాం. కంకణాకార స్థల వైశాల్యము, బాహ్యవృత్త, అంతర వృత్తవైశాల్యముల భేదమునకు సమానము.



బాహ్య వృత్త వ్యాసార్థము 'R' మరియు అంతర వృత్త వ్యాసార్థము 'r' అయిన

కంకణాకార స్థల వైశాల్యము = బాహ్యవృత్త వైశాల్యం – అంతర వృత్త వైశాల్యం

$= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi (R^2 - r^2)$

అందుచే కంకణాకార స్థల వైశాల్యము $= \pi (R^2 - r^2)$ లేదా $\pi (R + r)(R - r)$

ఇందులో R, బాహ్య వృత్త వ్యాసార్థం, r అంతర వృత్త వ్యాసార్థం

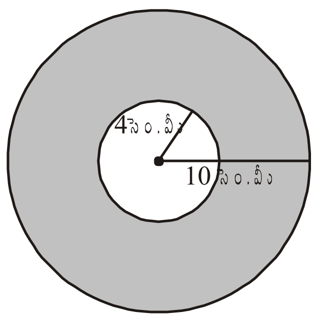
ఉదాహరణ:13 ప్రక్కపటమును పరిశీలించండి. ఇది ఏకకేంద్రము గల రెండు వృత్తములను సూచిస్తుంది. బాహ్య వృత్త వ్యాసార్థము 10 సెం.మీ॥ అంతర వృత్త వ్యాసార్థము 4 సెం.మీ॥

అయిన (i) పెద్ద వృత్త వైశాల్యము ఎంత?

(ii) చిన్న వృత్త వైశాల్యము ఎంత?

(iii) షేడ్ చేయబడిన భాగము వైశాల్యము ఎంత?

($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి)



సాధన: (i) బాహ్య వృత్త వ్యాసార్ధము = 10 సెంమీ॥

అందుకే బాహ్యవృత్త వైశాల్యం = πR^2

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ చ.సెంమీ

(ii) అంతర వృత్త వ్యాసార్ధము = 4 సెంమీ

అందుచే అంతర వృత్త వైశాల్యం = πr^2

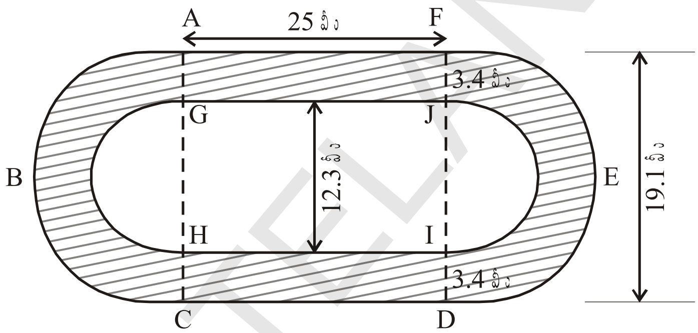
$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ చ.సెంమీ

(iii) షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం = బాహ్యవృత్త వైశాల్యం − అంతరవృత్త వైశాల్యం

$= (314 - 50.24)$ చ.సెంమీ

$= 263.76$ చ.సెంమీ.

ఉదాహరణ 14: ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.



సాధన : షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యము = AGJF దీ.చ.వై. + HCDI దీ.చ.వై.+ ABCHG అర్ధ కంకణ వైశాల్యం + DEFJI అర్ధ కంకణ వైశాల్యం

AGJF దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం $= 25 \times 3.4 = 85$ చ.మీ

HCDI దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం $= 25 \times 3.4 = 85$ చ.మీ

ABCHG అర్ధ కంకణ వైశాల్యం $= \frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{2 \times 7}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$ చ.మీ

DEFJI అర్ధ కంకణ వైశాల్యం $= \frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{2 \times 7}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$ చ.మీ

షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం

$$= (25 \times 3.4) + (25 \times 3.4) + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2] + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2]$$

$= [85 + 85 + \frac{22}{7} \times 15.7 \times 3.4]$ చ.మీ

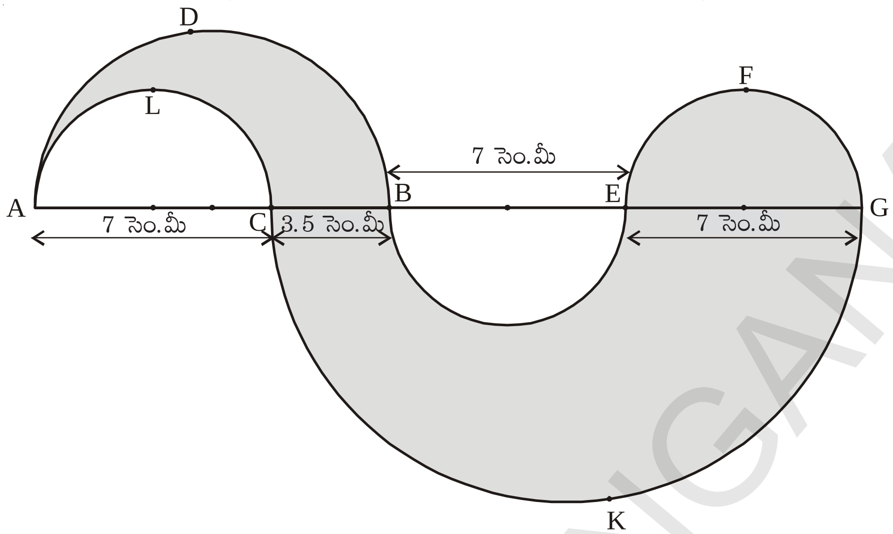
$= (170 + 167.77)$ చ.మీ

$= 337.77$ చ.మీ

$R = \frac{19.1}{2} = 9.55$

$r = \frac{12.3}{2} = 6.15$

ఉదాహరణ 15: ఈ క్రింద ఇయ్యబడిన పటములో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



సాధన : షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం = ADBCLA వైశాల్యము + EFGE వైశాల్యం + BEGKCB వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\times\pi\left[\left(\frac{10.5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{17.5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right] \text{ చ.సెంమీ}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{35}{4}\times\frac{7}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{49}{4}\right) \text{ చ.సెంమీ}$$

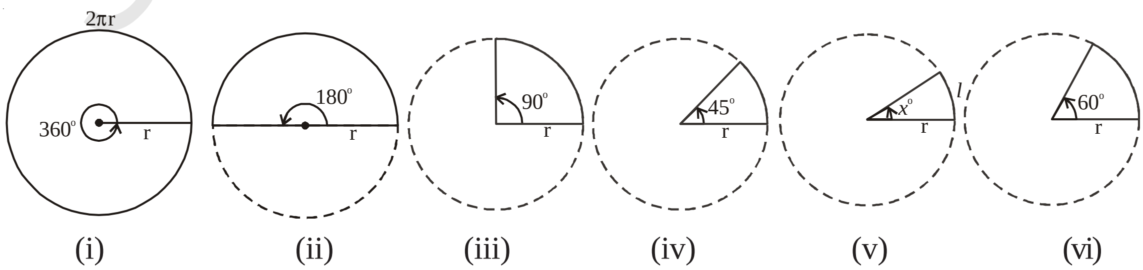
$$= \left(\frac{385}{16}+\frac{77}{4}+\frac{1617}{16}\right) \text{ చ.సెంమీ}$$

$$= \left(\frac{2310}{16}\right) \text{ చ.సెంమీ}$$

= 144.375 చ.సెంమీ.

9.8 చాపము పొడవు

ఈ క్రింది వృత్తములను పరిశీలించి, దిగువనియ్యబడిన పట్టికను పూరింపుము.



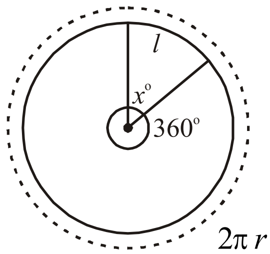
పటం	కోణం	చాపంపొడవు	చాపము పొడవు మరియు సెక్టరు కోణము మధ్య గల సంబంధం
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	________
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	________
(v)	x^o	l	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r = l$
(vi)	60^0	$\frac{\pi r}{3}$	________

పట్టికను పరిశీలించిన తరువాత సెక్టరు చాపము పొడవు (l) = $\frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ ఇందులో r వృత్త వ్యాసార్ధం మరియు 'x' అనేది సెక్టరు చాపము కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం

సెక్టరు చాపము పొడవు l అయిన

$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$$



9.9 సెక్టరు వైశాల్యము

చాపము, రెండు వ్యాసార్థములతో ఆవరించబడిన వృత్తములోని భాగమును సెక్టరు అంటారు.

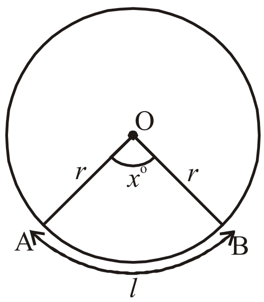
r వ్యాసార్థము కల్గిన వృత్త వైశాల్యము = πr^2

సెక్టరు చాపము వృత్త కేంద్రము వద్ద చేయు కోణము = x^0

సెక్టరు కోణము, వైశాల్యము అనులోమానుపాతములో ఉంటాయి.

$\therefore$ సెక్టరు వైశాల్యము : వృత్తవైశాల్యము = $x^o : 360^o$

సెక్టరు OAB వైశాల్యము = $\frac{x^\circ}{360^\circ} \times$ వృత్త వైశాల్యం



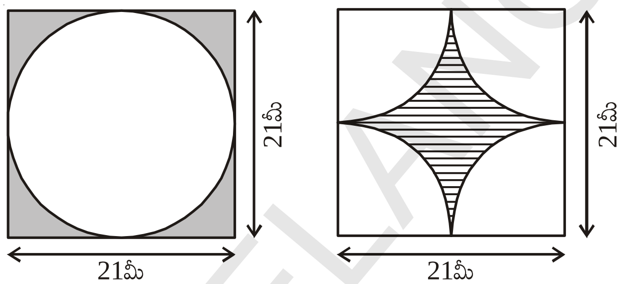
$\therefore$ సెక్టరు OAB వైశాల్యము $= \dfrac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \quad [\because \pi r^2 = \pi r \times \dfrac{2r}{2}]$

$= \dfrac{x^0}{360^0} \times 2\pi r \times \dfrac{r}{2}$

$= l \times \dfrac{r}{2}$

$A = \dfrac{lr}{2}$ (l అనేది చాపం పొడవు)

ఉదాహరణ 13: క్రింది ఇచ్చిన పటములలో షేడ్ చేయబడిన భాగము వైశాల్యం కనుగొనండి.



సాధన : **(i)** షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యము

={21మీ భుజముగా గల చతురస్రవైశాల్యం} – {21మీ॥వ్యాసముగా గల వృత్త వైశాల్యము}

వృత్తము యొక్క వ్యాసము 21 మీ

కావున వృత్త వ్యాసార్ధము = $\dfrac{21}{2}$ =10.5 మీ

షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం = $(21 \times 21) - \left(\dfrac{22}{7} \times \dfrac{21}{2} \times \dfrac{21}{2}\right)$ చ.మీ

= 441 – 346.5

= 94.5 చ.మీ

(ii) షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యము = {21 మీ॥భుజముగా గల చతురస్ర వైశాల్యమ} –

{4$\times$సెక్టారు వైశాల్యము}

$= (21 \times 21) - \left(4 \times \dfrac{90^0}{360^0} \times \dfrac{22}{7} \times \dfrac{21}{2} \times \dfrac{21}{2}\right)$ చ.మీ

(వ్యాసము 21 మీ కావున వ్యాసార్ధము $\dfrac{21}{2}$ మీ)

$$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$$

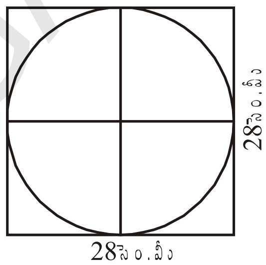
$$= (441 - 346.5) \text{ చ.మీ}$$

$$= 94.5 \text{ చ.మీ}$$

అభ్యాసము - 9.2

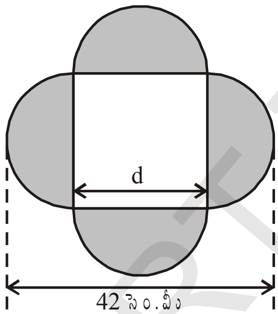
1. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార షీట్ యొక్క కొలతలు 36 సెంమీ × 25 సెం.మీ. షీట్ నుండి 3.5 సెం.మీ వ్యాసము కల్గిన 56 వృత్తాకార గుండీలను కత్తిరించగా మిగిలిన షీట్ వైశాల్యము ఎంత?

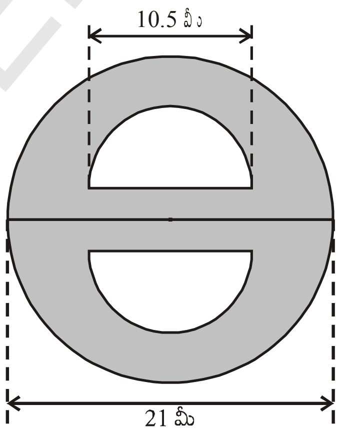
2. 28 సెంమీ. భుజముగా గల చతురస్రములో అంతర్లిఖించబడిన వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనుము.



[సూచన : వృత్తము యొక్క వ్యాసము చతురస్ర భుజమునకు సమానము.]

3. క్రింది ఇవ్వబడిన పటములలో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యములను కనుగొనుము.



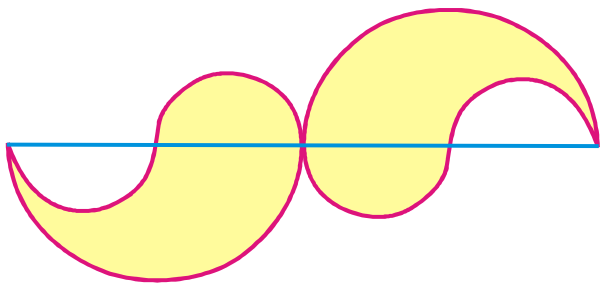


[గమనిక: $d + \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 42$]

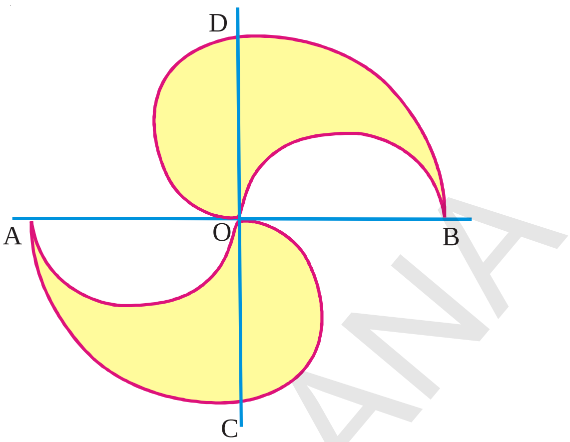
$d = 21$

∴ చతురస్రభుజం = 21 సెం.మీ

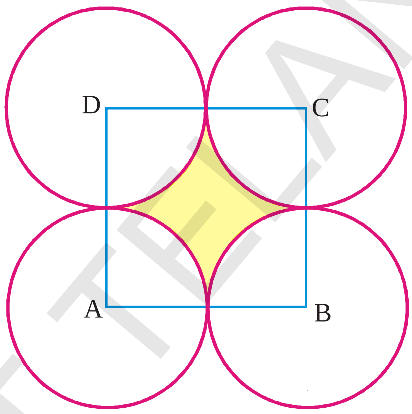
4. సమాన వ్యాసార్ధములు కల్గిన 4 అర్థవృత్తములు మరియు సమాన వ్యాసార్థాలు కల్గిన రెండు పెద్ద అర్థవృత్తములు (ప్రతిది 42 సెం.మీ). పటములో చూపిన విధముగా జతచేయబడినవి. అయిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతము వైశాల్యం కనుగొనండి.



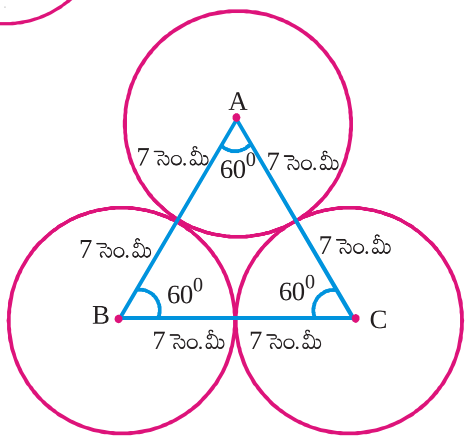
5. నాలుగు అర్ధవృత్తములు, రెండు పావు వృత్తములు పటములో చూపిన విధముగా జత చేయబడినవి. OA = OB = OC = OD = 14 సెం.మీ, అయిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



6. పటములో చూపిన విధముగా A, B, C మరియు D కేంద్రముగా గల సమాన వ్యాసార్థములు కల్గిన నాల్గు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పృశించు కొంటున్నాయి. ABCD చతురస్రము యొక్క భుజము 7 సెం.మీ అయిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



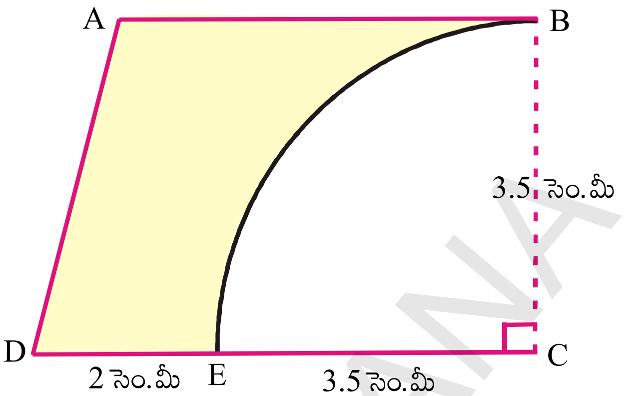
7. ఒక సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము $49\sqrt{3}$ చ.సెం.మీ. వృత్త కేంద్రమును శీర్షములుగా మూడు వృత్తములు బాహ్యముగా పటములో చూపిన విధముగా స్పృశించుకొంటున్నాయి. అయినచో వృత్తమును కల్గియుండని త్రిభుజ ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



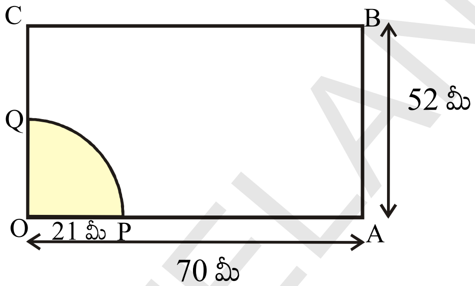
8. (i) 'a' వ్యాసార్ధము కల్గిన నాలుగు సమాన వృత్తములు స్పృశించుకొంటున్నాయి. అయినచో ఆ వృత్తముల మధ్య ప్రాంత వైశాల్యం కనుగొనండి.

(ii) నాలుగు వృత్తవ్యాసార్థములు సమానము మరియు ప్రతి వృత్తము మరో రెండు వృత్తములను బాహ్యంగా స్పృశించుకొంటూ ఉంటే వృత్త కేంద్రములు శీర్షములుగా ఒక చతురస్రమును ఏర్పాటు చేస్తే, ఆ చతురస్ర భుజము 24 సెం.మీ. అయిన ఆ వృత్తముల మధ్యప్రాంతమును షేడ్‌చేస్తే, షేడ్ చేయవలసిన ప్రాంత వైశాల్యము ఎంత?

9. ప్రక్కపటములో ABCD ఒక సమలంబ చతుర్భుజం $AB||CD$ మరియు $\angle BCD = 90^0$ మరియు పావు భాగము వృత్తము తొలగించబడినది. $AB = BC = 3.5$ సెం.మీ।। మరియు $DE = 2$ సెం.మీ. అయిన మిగిలిన ప్రాంతము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి)



10. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పొలములో ఒక గుర్రము కట్టబడి ఉన్నది. దీర్ఘచతురస్రకొలతలు 70 మీ మరియు 52 మీ కల్గియున్నది. దీర్ఘచతురస్రకార పొలములో ఒక మూలలో 21 మీ పొడవు కల్గిన ఒక తాడుకి గుర్రము కట్టబడి యున్నది అయిన గుర్రము కదలగలిగే ప్రాంత వైశాల్యము కనుగొనుము.



మనము ఏమి నేర్చుకొన్నాం

సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యము $= \frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) $\times$ (సమాంతర భుజాల మధ్య దూరం)

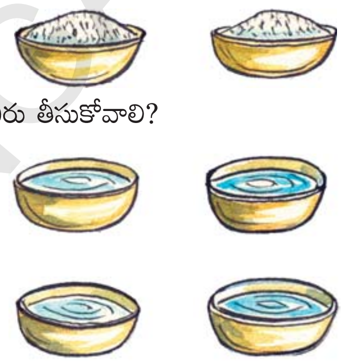
- చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times$ కర్ణము పొడవు $\times$ కర్ణముపై గీయబడిన లంబముల పొడవుల మొత్తము
- సమచతుర్భుజవైశాల్యము = కర్ణముల పొడవుల లబ్ధములో సగం
- వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$ ఇందులో 'r' వృత్త వ్యాసార్థం
- కంకణాకార స్థల వైశాల్యం $= \pi(R^2 - r^2)$ లేదా $\pi(R + r)(R - r)$ ఇందులో R- బాహ్యవృత్త వ్యాసార్థం r - అంతర వృత్త వ్యాసార్థం
- సెక్టరు వైశాల్యము $(A) = \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$ ఇందులో r- వృత్తవ్యాసార్థం x° - సెక్టరు వృత్త కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం

  లేదా $A = \frac{lr}{2}$, l - సెక్టరు చాపము పొడవు, r -వృత్త వ్యాసార్థము

అధ్యాయం **10**

అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములు

10.0 పరిచయం



గోపి అన్నము వండటానికి ప్రతి దినము 2 కప్పుల బియ్యానికి 4 కప్పుల నీటిని తీసుకొంటాడు. ఒకరోజు అతని యింటి బంధువులు రావడం వల్ల 6 కప్పుల బియ్యం వండవలసి వచ్చింది. ఇలా 6 కప్పుల బియ్యం వండడానికి అతను ఎన్ని కప్పుల నీరు తీసుకోవాలి?

మన దైనందిన జీవితంలో ఇలా అనేక సందర్భాలలో ఒక రాశిలోని మార్పు, వేరొక రాశిలో కూడా మార్పు తీసుకురావడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. ఉదాహరణకు

(i) మీ పాఠశాలలో నమోదు అయిన విద్యార్థుల సంఖ్యపెరిగినపుడు మధ్యాహ్నభోజనానికి కావలసిన ఆహార పరిమాణంలో ఏరకమైన మార్పు గమనిస్తావు? మధ్యాహ్నభోజనానికి కావలసిన ఆహార పరిమాణం పెరుగుతుంది. కదా!

(ii) బ్యాంక్‌లో మీరు మరింత సొమ్ము డిపాజిట్ చేసిన, ఆ సొమ్ముపై వచ్చే వడ్డీ గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఆ సొమ్ముపై వచ్చే వడ్డీ కూడా పెరుగుతుంది. అవునా!

(iii) మీరు కొన్న వస్తువుల సంఖ్య తగ్గినపుడు వాటి మొత్తం వెల ఏ రకంగా మారుతుంది? ఖచ్చితంగా ఆ వస్తువుల వెల కూడా తగ్గుతుంది కదా!

(iv) 40 టీ పేకెట్‌ల బరువు 1.6 కి.గ్రా. అయిన 20 టీ పేకెట్‌ల బరువు ఎంత? ఖచ్చితంగా 20 టీ పేకెట్ల బరువు తక్కువే.

పై ఉదాహరణలలో, ఒక రాశిలోని మార్పు వలన వేరొక రాశిలో కూడా మార్పు రావడాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

ఇవి చేయండి.

ఒక రాశిలోని మార్పు వలన వేరొక రాశిలో కూడా మార్పు వచ్చే ఐదు సందర్భాలను వ్రాయండి.

గోపికి కావలసిన నీటి పరిమాణాన్ని ఎలా కనుగొంటాము? దీనికి జవాబు చెప్పడానికి మనం ఈ మార్పులలోని రకాలను నేర్చుకుందాం.

10.1 అనులోమాను పాతము

వన మహోత్సవం సందర్భంగా ఒక పాఠశాలలోని పర్యావరణ పరిరక్షణ కమిటీ అధ్యక్షుడు, ఆ పాఠశాలో మొక్కలు నాటాలని నిశ్చయించుకున్నాడు. ఆ పాఠశాలలోని పర్యావరణ కమిటీలో ప్రతీ తరగతి నుండి వున్న విద్యార్థుల సంఖ్య క్రింద వ్రాయబడింది.

తరగతి	VI	VII	VIII	IX	X
పర్యావరణ కమిటీలో విద్యార్థుల సంఖ్య	5	7	10	12	15

ప్రతీ విద్యార్థి రెండు మొక్కలను నాటాలి. అయిన ప్రతీ తరగతికి కావలసిన మొక్కల సంఖ్యను కనుగొనండి.

తరగతి	VI	VII	VIII	IX	X
పర్యావరణ కమిటలో విద్యార్థుల సంఖ్య	5	7	10	12	15
కావలసిన మొక్కల సంఖ్య	10	14	20	24	30

కావలసిన మొక్కల సంఖ్య గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? విద్యార్థుల సంఖ్యలోను, కావలసిన మొక్కల సంఖ్యలోను ఏరకమైన మార్పుని మీరు కనుగొన్నారు? రెండూ పెరుగుతున్నాయి లేదా తగ్గుతున్నాయి.

$\frac{\text{కావాలసిన మొక్కాల సంఖ్య}}{\text{విద్యార్థుల సంఖ్య}} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{20}{10} = \ldots\ldots = \frac{2}{1} = 2$ ఇది ఎప్పుడూ ఒక స్థిరరాశి. దీనినే మనం అనుపాత స్థిరాంకం అంటాము.

స్థిర నిష్పత్తి వుంది కనుక ఇటువంటి మార్పునే మనం అనులోమానుపాతం అంటాము.

x, y అనే రెండు రాశులు రెండూ పెరుగుతూ లేదా రెండూ తగ్గుతూ వుండి, $\frac{x}{y}$ విలువ స్థిరాంకం వుంటే (k అనుకొనుము) గా ఆ రెండు రాశులు x, y లు అనులోమానుపాతంలో వున్నాయి అంటాము. దీనిని మనం $x \propto y$ అని వ్రాస్తాము మరియు x అనే రాశి y అనే రాశికి అనులోమానుపాతంలో వుంది అని చదువుతాము.

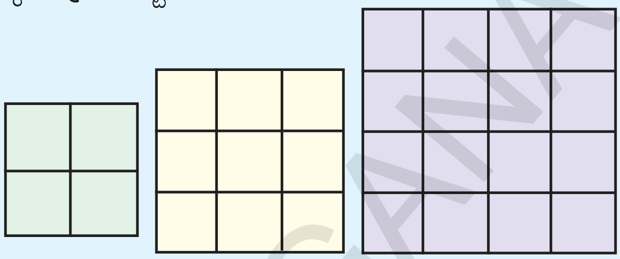
$\therefore \frac{x}{y} = k \Rightarrow x = ky$ దీనిలో k అనేది అనుపాత స్థిరాంకము.

x యొక్క విలువలు x_1, x_2 కు అనుగుణంగా y యొక్క విలువలు వరుసగా y_1, y_2 అయితే $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

ఇవి చేయండి.

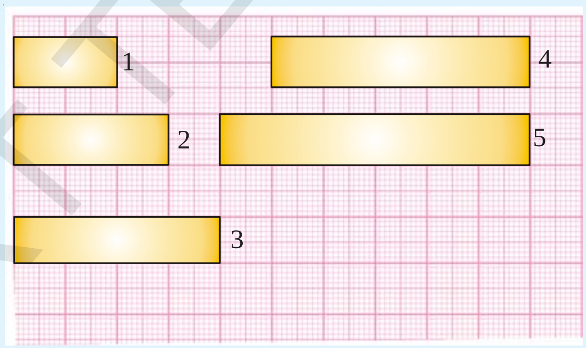
1. మీరు గమనించిన మూడు అనులోమానుపాత సందర్భాలను రాయండి.
2. భుజముల పొడవులు 2 సెం॥మీ, 3సెం॥మీ, 4 సెం॥మీ మరియు 5సెం॥మీ గల చతురస్రాలను తీసుకొని వాటి వైశాల్యాలను లెక్కించి క్రింది పట్టికను నింపండి.

భుజంపొడవు (సెం.మీలలో)	వైశాల్యము (చ.సెం.మీలలో)
2	
3	
4	
5	



మీరు ఏమి గమనిస్తారు ? చతురస్రభుజము కొలత మారితే చతురస్ర వైశాల్యంలో ఏమైనా మార్పు వచ్చినదా? ఖచ్చితంగా వస్తుంది కదా. ఇంకా దాని వైశాల్యానికి, భుజము పొడవుకి గల నిష్పత్తిని కనుగొనండి. ఈ నిష్పత్తి సమానంగా వుందా? లేదు కదా. కాబట్టి ఈ మార్పు అనులోమానుపాతం కాదు.

3. ఇక్కడ మీకు గ్రాఫ్ కాగితంపై ఒకే వెడల్పు కలిగిన కొన్ని దీర్ఘ చతురస్రాలు యివ్వబడ్డాయి. ప్రతీ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాన్ని కనుగొని క్రింది పట్టికను నింపండి.



దీర్ఘచతురస్రము	1	2	3	4	5
పొడవు (సెంమీ)					
వైశాల్యము (చసెంమీ.)					

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము పొడవుకు అనులోమానుపాతంలో వుందా?

4.. ఒకగ్రాఫ్ కాగితంపై ఒకే పొడవు వేరువేరు వెడల్పులు గల దీర్ఘచతురస్రాలను గీయండి. ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రము వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. వాటి వైశాల్యాలు మరియు వెడల్పుల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలుగుతారు?

ఉదాహరణ 1: ఒకే పరిమాణంలో గల 65 టీ ప్యాకెట్ల వెల ₹ 2600 అయిన అదే పరిమాణం గల అటువంటి 75 టీ ప్యాకెట్ల వెల ఎంత?

సాధన : టీ ప్యాకెట్ల సంఖ్య పెరిగిన వాటి ధర కూడా పెరుగుతుందని మనకు తెలుసును. కావున టీ ప్యాకెట్ల ధర వాటి సంఖ్యతో అనులోమానుపాతంలో వుంటుంది.

టీ ప్యాకెట్ల సంఖ్య (x)	65	75
వెల (y)	2600	?

అందువలన $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ఇక్కడ $x_1 = 65$ $y_1 = 2600$ $x_2 = 75$ $y_2 = ?$

ప్రతిక్షేపించగా $\frac{65}{2600} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 2600}{65} =$ ₹ 3000

కావున అటువంటి 25 టీ ప్యాకెట్ల ధర ₹ 3000.

ఉదాహరణ 2: ఒక రైల్వేస్టేషన్ వద్దకారు పార్కింగ్ ధరలు యీ క్రింది విధంగా వున్నాయి.

పార్కింగ్ కాలము (x)	పార్కింగ్ రుసుము (y)
4 గంటల వరకు	₹ 60
8 గంటల వరకు	₹ 100
12 గంటల వరకు	₹ 140
24 గంటల వరకు	₹ 180

పార్కింగ్ ధరలు మరియు పార్కింగ్ చేయబడిన సమయము అనులోమానుపాతంలో వున్నాయో లేదో సరిచూడండి.

సాధన : ఇక్కడ రెండు రాశుల విలువలు క్రమంగా పెరగడాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

అయితే అవి అనులోమానుపాతంలో వున్నాయా? $\frac{x}{y}$ విలువ ఎంత ?

ఒక వేళ $\frac{x}{y}$ విలువ స్థిరాంకము అయితే అవి అనులోమానుపాతంలో వున్నట్లు. అలా కానిచో అవి అనులోమానుపాతంలో లేనట్లు

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{60}, \frac{8}{100}, \frac{12}{140}, \frac{24}{180}$$

ఈ నిష్పత్తులన్నీ సమానం కాదని మీరు సులభంగా గ్రహించగలరు. కావున యీ రెండు రాశులు అనులోమానుపాతంలో లేవు.

ఉదాహరణ 3: 8 మీటర్ల ఎత్తుగల ఒక స్తంభం 10 మీటర్ల పొడవుగల నీడను ఏర్పరచినది. అదే సమయంలో అవే పరిస్థితుల వద్ద ఒక చెట్టు 40 మీటర్ల పొడవుగల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ చెట్టు ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన : స్థంభము నీడ పొడవు, స్థంభము ఎత్తునకు అనులోమానుపాతంలో వున్నది.

కావున $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ఇక్కడ x_1 = 8 మీ $y_1 = 10$ మీ $x_2 = ?$ మరియు $y_2 = 40$ మీ

ప్రతిక్షేపించగా $\frac{8}{10} = \frac{x_2}{40} \Rightarrow x_2 = \frac{8 \times 40}{10} = 32$ మీ.

కావున ఆ చెట్టు ఎత్తు 32 మీ.

ఉదాహరణ 4: ఒక కుళాయి 50 లీటర్ల సామర్థ్యము గల ఒక ట్యాంకును 5 గంటలలో నింపిన, 75 లీటర్ల సామర్థ్యము గల వేరొక ట్యాంకును నింపుటకు ఎంతకాలము పట్టును ?

సాధన: ట్యాంక్‌లోని నీటి ఘనపరిమాణం, దానిని నింపుటకు పట్టుకాలం అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

కావున $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ఇక్కడ $x_1 = 50$ లీటర్లు $y_1 = 5$గం॥ $x_2 = 75$ లీ॥, $y_2 = ?$

$$\frac{50}{5} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 5}{50} = \frac{\cancel{375}^{15}}{\cancel{50}_{2}} = 7\frac{1}{2} \text{ గం॥}$$

కావున 75 లీ సామర్థ్యము గల ట్యాంక్‌ను నింపుటకు $7\frac{1}{2}$ గంటల కాలము పట్టును.

ఉదాహరణ 5: 20మీటర్ల బట్ట ఖరీదు ₹ 1600. అయిన అదే బట్ట 24.5 మీటర్ల ఖరీదు ఎంత?

సాధన: బట్ట ఖరీదు మరియు బట్ట పొడవులు అనులోమానుపాతంలో వుంటాయి.

కావున $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ఇక్కడ $x_1 = 20$ మీ $y_1 =$ ₹ 1600, $x_2 = 24.5$ మీ మరియు $y_2 = ?$

ప్రతిక్షేపించగా $\frac{20}{1600} = \frac{24.5}{y_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1600 \times 24.5}{20} =$ ₹ 1960

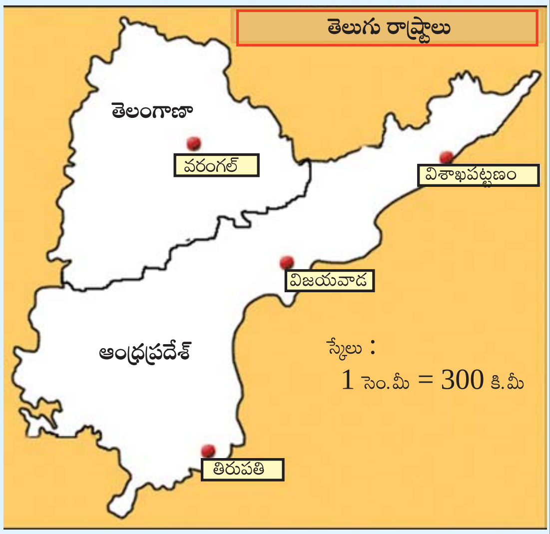
24.5 మీటర్ల బట్ట ఖరీదు ₹ 1960.

ఇవి చేయండి.

ఇచ్చిన మ్యాపులోని దూరాలను కొలిచి, దాని సహాయంతో (i) విజయవాడ మరియు విశాఖ పట్నం (ii) తిరుపతి మరియు వరంగల్‌ల మధ్యగల నిజదూరాలను కనుగొనండి. ఇచ్చిన మ్యాపు 'స్కేలు' పటములో రెండు పట్టణాల మధ్యగల దూరము తగ్గింది చూపుటయే స్కేలు

'స్కేలు' : 1 సెం.మీ = 300 కి.మీ

స్కేలును 1 : 30000000 సెం.మీ నిష్పత్తికి మార్పు చేయుము. సెం.మీ ఉమ్మడి కొలతగా తీసుకొనుము.



అభ్యాసము - 10.1

1. ఒక ప్రత్యేక నాణ్యత గల బట్ట 5 మీటర్ల ఖరీదు ₹ 210 అయిన, (i) 2 మీ (ii) 4 మీ (iii) 10 మీ (iv) 13 మీటర్లు పొడవు కల బట్ట ఖరీదు ఎంతో కనుగొనండి.
2. ఈ క్రింది పట్టికను నింపండి.

యాపిల్ పండ్ల సంఖ్య	1	4	7	12	20
వాటి వెల (₹ లలో)	8	....	....	....	....

3. 48 ధాన్యం బస్తాల ఖరీదు ₹ 16, 800 అయిన 36 ధాన్యం బస్తాల ఖరీదు ఎంత?
4. నలుగురు సభ్యులు కల ఒక కుటుంబానికి నెలకు అయ్యే సగటు ఖర్చు ₹ 2,800. ముగ్గురు సభ్యులు గల కుటుంబానికి నెలకు అయ్యే సగటు ఖర్చు ఎంతో కనుగొనండి.
5. 28 మీటర్ల పొడవు గల ఒక ఓడ స్థంభము ఎత్తు 12 మీ. ఆ ఓడ నమూనా తయారీలో ఓడ స్థంభము ఎత్తు 9 సెం.మీ. అయిన ఆ నమూనా ఓడ పొడవు ఎంత?
6. 5.6 మీ ఎత్తు గల ఒక స్తంభము ఏర్పరచు నీడ పొడవు 3.2 మీ. అదే నియమంలో (i) 10.5 మీ ఎత్తు గల మరొక స్తంభము యొక్క నీడపొడవు ఎంత? (ii) 5 మీ నీడను ఏర్పరచు స్తంభము యొక్క పొడవు ఎంత?
7. సరుకులతో నింపబడిన ఒక లారీ 14 కి.మీ దూరము ప్రయాణించుటకు పట్టుకాలం 25 నిమిషములు. ఆ లారీ అదే వేగముతో ప్రయాణించుచున్న 5 గంటల కాలములో అది ప్రయాణించు దూరమెంత?
8. 12 దళసరి కాగితముల బరువు 40 గ్రాములు అయిన అటువంటి ఎన్ని దళసరి కాగితముల బరువు $16\frac{2}{3}$ కిలోగ్రాములగును?
9. ఒక రైలు గంటకు 75 కి.మీ. సమవేగంతో ప్రయాణించుచున్నది.
   (i) అయిన అది 20 నిమిషాలలో ఎంతదూరము ప్రయాణించును?
   (ii) 250 కి.మీ. దూరమును ప్రయాణించుటకు ఆ రైలుకు ఎంతకాలము పట్టును?
10. ఒక మైక్రోచిప్ పథకం(డిజైన్) యొక్క స్కేలు 40:1. గా వున్నది. నమూనాలో దాని పొడవు 18సెం.మీ. అయిన ఆ మైక్రోచిప్ యొక్క నిజమైన పొడవును కనుగొనండి.
11. డాక్టర్లు, లాయర్లు యొక్క సరాసరి వయస్సు '40'. డాక్టర్ల యొక్క సరాసరి వయస్సు 35 , లాయర్ల యొక్క సరాసరి వయస్సు '50' అయినచో డాక్టర్ల సంఖ్య, లాయర్ల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

ప్రాజెక్ట్ పని

1. భారతదేశపటాన్ని తీసుకొనుము. ఆ మ్యాపులో సూచించిన స్కేలును మీ నోట్ పుస్తకంలో రాయండి. ఏవైనా రెండు ప్రదేశాల మధ్యదూరాన్ని కొలవండి. దాని సహాయంతో ఆ రెండు ప్రదేశాల నిజదూరాన్ని కనుగొనండి.
2. 5 గురు వ్యక్తులకు హల్వా చేయడానికి కావలసిన పదార్థాలు. రవ్వ = 250 గ్రా, పంచదార = 300 గ్రా, నెయ్యి = 200 గ్రా, నీరు = 500 మి.లీ అనుపాత భావనను వుపయోగించుకుంటూ, మీ క్లాసులోని విద్యార్థులందరికీ హల్వా చేయడానికి కావలసిన పదార్థాల పరిమాణాలను అంచనా వేయండి.

10.2 విలోమానుపాతము

ఒక పార్సిళ్ళు రవాణా చేసే సంస్థ వద్ద కొన్ని పార్సిళ్ళు రవాణాకు సిద్ధంగా వున్నాయి. ఆ సంస్థ 36 మంది వ్యక్తులను ఆ పనిలో నియమిస్తే 12 రోజులలో వాటిని రవాణా చేయగలదు. 18 మంది వ్యక్తులనే ఆ పనికి నియమిస్తే, ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు 24 రోజుల కాలం పట్టును. అనగా రోజుల సంఖ్య రెట్టింపు అయినది. ఆ సంస్థ 72 మంది వ్యక్తులను నియమిస్తే, రవాణాకు పట్టే కాలము సగము అవుతుందా?

క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

వ్యక్తుల సంఖ్య	36	18	9	72	108
పట్టేకాలం	12	24	48	6	4

ఒకవేళ ఆ సంస్థ ఒకేరోజులో అన్ని పార్సిళ్ళను రవాణా చేయాలంటే ఎంతమంది వ్యక్తులను నియమించాలి?

రెండు రాశులలోని మార్పు, ఒకరాశిలో పెరుగుదల (తగ్గుదల) రెండవరాశిలో తగ్గుదల (పెరుగుదల) వుండి అవి అనుపాతంలో వుంటే ఆ రాశులు విలోమానుపాతంలో వున్నాయి అంటాము. పై ఉదాహరణలో కావలసిన వ్యక్తుల సంఖ్య, రవాణాకు పట్టే రోజుల సంఖ్య ఒకదానికొకటి విలోమానుపాతంలో వున్నాయి.

దీనిని మనం రవాణాకు పట్టే రోజు సంఖ్య $\propto \dfrac{1}{\text{కావలసిన వ్యక్తుల సంఖ్య}}$ అని వ్రాస్తాము.

x, y లు విలోమానుపాతంలో వుంటే $x \propto \dfrac{1}{y}$

$x = \dfrac{k}{y}$ (k అనుపాత స్థిరాంకము)

$xy = $ k.

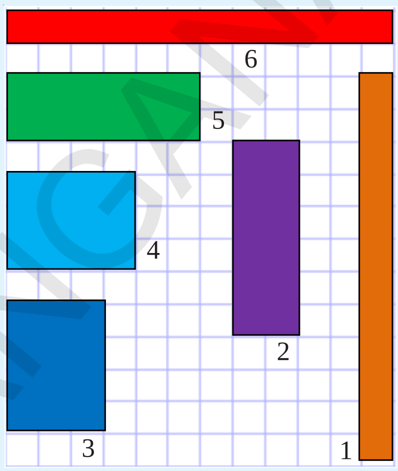
x_1, x_2 లకు అనుగుణంగా వచ్చిన విలువలు వరుసగా y_1, y_2 అయిన $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k) (లేదా) $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_2}{y_1}$.

ఇవి చేయండి.

1. మీరు గమనించిన మూడు విలోమానుపాత సందర్భాలను రాయండి.

2. గళ్ళ కాగితంపై ప్రక్క ప్రక్క నుండే 12 చదరాలను వుపయోగించుకొంటూ వివిధ కొలతలు గల దీర్ఘ చతురస్రాలను గీయాలి. ఇలా ఏర్పడిన ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు వెడల్పులను కనుగొని, ఆ వచ్చిన విలువలను క్రింది పట్టికలో రాయండి.

దీర్ఘచతురస్రం సంఖ్య	పొడవు (సెం.మీలలో)	వెడల్పు (సెం.మీలలో)	వైశాల్యము (చ.సెం.మీలలో)
1	l ……	b ……	……...
2	l ……	b ……	……...
3	l ……	b ……	……...
4	l ……	b ……	……...
5	l ……	b ……	……...
6	l ……	b ……	……...



మీరు ఏమి గమనిస్తారు? పొడవు పెరిగిన, వెడల్పు తగ్గును లేదా వెడల్పు పెరిగిన, పొడవు తగ్గును (వైశాల్యము స్థిరాంకముగా వున్నపుడు)

ఒక దీర్ఘచతురస్ర పొడవు, వెడల్పులు విలోమానుపాతంలో వున్నాయా?

ఉదాహరణ 6: 36 మంది కూలీలు ఒక గోడను 12 రోజులలో కట్టగలరు. అయిన అదేగోడను 16 మంది కూలీలు ఎన్నిరోజులలో కట్టగలరు?

సాధన: కూలీల సంఖ్య తగ్గిన, కావలసిన రోజుల సంఖ్య విలోమానుపాతంలో వున్నాయి.

కావున $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_2}{y_1}$ ఇక్కడ $x_1 = 36$ మంది కూలీలు $y_1 = 12$ రోజులు $x_2 = 16$ మంది కూలీలు మరియు $y_2 = ?$ రోజులు

కూలీల సంఖ్య ↓	కావలసిన రోజుల సంఖ్య ↑
36	12
16	y_2

ప్రతిక్షేపించగా, $\dfrac{36}{16} = \dfrac{y_2}{12} \Rightarrow y_2 = \dfrac{12 \times 36}{16} = 27$ రోజులు.

కావున 16 మంది కూలీలు ఆ గోడను 27 రోజులలో కట్టగలరు.

కూలీల సంఖ్య తగ్గుచున్నది కావున

$36 \div x = 16 \Rightarrow x = \dfrac{36}{16}$

అయిన రోజుల సంఖ్య

$x \times 12 = \dfrac{36}{16} \times 12$

$= 27$ రోజులు.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

ప్రతీ మార్పుని మనం అనుపాతంలో వుంది అని చెప్పగలమా?

ఒక పుస్తకంలో 100 పేజీలు కలవు. పుస్తకంలో మనము చదివిన పేజీల సంఖ్య, మిగిలిన పేజీల సంఖ్య ఏవిధంగా మారుతాయో గమనించండి.

చదివిన పేజీల సంఖ్య (x)	10	20	30	50	70
మిగిలిన పేజీల సంఖ్య (y)	90	80	70	50	30

మనం చదివిన పేజీల సంఖ్య క్రమంగా పెరుగుతూ వున్నపుడు మిగిలిన పేజీల సంఖ్యలోమార్పు ఏరకంగా వస్తోంది? ఆ రెండు రాశులు విలోమానుపాతంలో వుంటాయా? వివరించండి.

అభ్యాసము - 10.2

క్రింది పట్టికలను పరిశీలించండి. ఏ పట్టికలోని చరరాశులు x, yలు విలోమానుపాతంలో వున్నాయో కనుగొనండి.

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

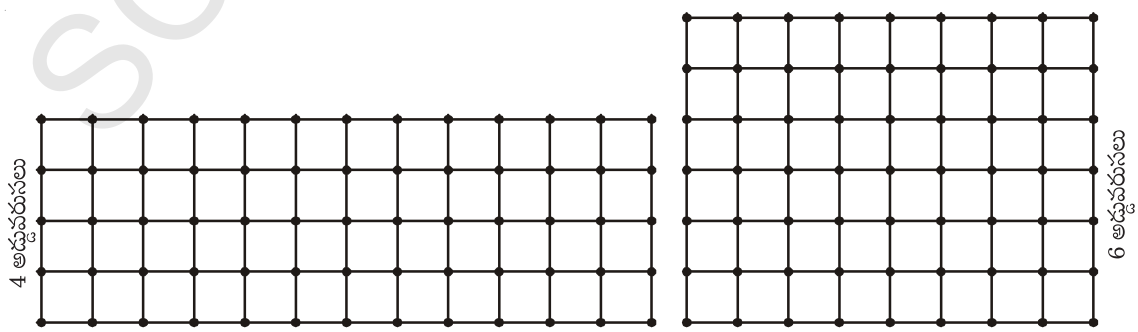
(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	25

2. ఒక పాఠశాల వారు పుస్తకాలను కొనడానికి ₹ 6000 ఖర్చుపెట్టదలిచినారు. ఈ సమాచారాన్ని వుపయోగించుకొంటూ క్రింది పట్టికను నింపండి.

ప్రతీ పుస్తకము వెల (₹లలో)	40	50		75	
కొనగలిగిన పుస్తకాల సంఖ్య	150		100		75

3. ఒక గళ్ళకాగితాన్ని తీసుకోండి. 48 చదరపు గడులను క్రింద చూపినట్లు వివిధ వరుసలలో అమర్చండి.



అడ్డువరుసల సంఖ్య (R)	2	3	4	6	8
నిలువు వరుసల సంఖ్య(C)	---	---	12	8	---

మీరు ఏమి గమనిస్తారు? R విలువ పెరిగితే, C విలువ తగ్గుతుంది.

(i) $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ అవుతుందా?

(ii) $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ అవుతుందా?

(iii) R మరియు C లు ఒకదానికొకటి విలోమానుపాతంలో వున్నాయా?

(iv) ఇదే కృత్యాన్ని గళ్ళకాగితంపై 36 చదరపుగడులను తీసుకొని చేయండి.

తరగతి గది ప్రాజెక్ట్

ఒక వారం రోజుల పాటు మీ తరగతిలో పాఠశాలకు హాజరయ్యే మరియు హాజరు కాని వారి సంఖ్యను పట్టికలో పొందు పరుచుము.

మీ మిత్రులతో చర్చించి మీ పరిశీలనలను నోట్‌పుస్తకంలో రాయండి.

వారంలోని రోజులు	హాజరైన విద్యార్థుల సంఖ్య (x)	హాజరుకాని విద్యార్థుల సంఖ్య (y)	$x : y$
సోమవారం			
మంగళవారం			
బుధవారం			
గురువారం			
శుక్రవారం			
శనివారం			

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ 7: ఒక బాలుర వసతి గృహంలో 100 మంది విద్యార్థులకు 40 రోజులకు సరిపడు బియ్యము నిల్వ కలదు. ఆ వసతి గృహమునకు 4 రోజుల తరువాత అదనంగా 20 మంది విద్యార్థులు వచ్చిన ఆ బియ్యము ఎన్ని రోజుల వరకు సరిపోవును?

సాధన: విద్యార్థుల సంఖ్య పెరిగిన, బియ్యము నిల్వ సరిపోయే రోజుల సంఖ్య అదే అనుపాతములో తగ్గును. అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య సరిపోయే రోజుల సంఖ్య విలోమానుపాతములో వుండును.

	రోజుల సంఖ్య	విద్యార్థుల సంఖ్య
	40 ↓	↑ 100
4 రోజుల తరువాత	36	100
	x	120

నాలుగు రోజుల తరువాత 100 మంది విద్యార్థులకు సరిపడు బియ్యము 36 రోజులు వచ్చిన 120 మంది విద్యార్థులకు ఆ బియ్యము ఎన్నిరోజులకు సరిపోవును?

$$\frac{36}{x} = \frac{120}{100}$$

$$x = \frac{\cancel{36}^{3} \times 10\cancel{0}}{\cancel{12}\ \cancel{0}} = 30 \text{ రోజులు}$$

విద్యార్థుల సంఖ్య పెరుగుతున్నది కావున

$$100 \times x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{100}$$

కావున విద్యార్థుల సంఖ్య అదే అనుపాతములో తగ్గను.

అనగా $36 \div x$

$$= 36 \div \frac{120}{100}$$

$$\Rightarrow 36 \times \frac{100}{120} = 30 \text{ రోజులు}$$

ఉదాహరణ 8: ఒక కారు గంటకు 60 కి.మీ వేగముతో ప్రయాణించి గమ్యమును 4 గంటలలో చేరును. ఒకవేళ ఆ కారు గంటకు 80 కి.మీ వేగముతో ప్రయాణించిన, గమ్యమును చేరుటకు ఎంతకాలము పట్టును?

సాధన : వేగము పెరిగిన, కావలసిన కాలము అదే నిష్పత్తిలో తగ్గను. అనగా స్థిరదూరానికి, ప్రయాణానికి పట్టు కాలము ఆ వాహన వేగానికి విలోమానుపాతములో వుండును.

పద్ధతి 1

వేగము	కాలము
60 ↓	4 ↑
80	x

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$$

$$60 \times 4 = 80 \times x$$

$$x = \frac{60 \times 4}{80} = 3 \text{ గం.లు}$$

(లేదా)

పద్ధతి II

	వేగము	కాలము	
$x \times$	60	4	$\div x$
	80	y	

$60 \times x = 80$ and $4 \div x = y$

$$x = \frac{80}{60}$$

$$4 \div \frac{80}{60} = y$$

$$y = \frac{4 \times 60}{80} = 3 \text{ గం.లు}$$

ఉదాహరణ 9: ఒక ట్యాంకును నింపుటకు 6 కుళాయిలకు 1 గంట 20 నిమిషాల కాలము పట్టును. అవే కుళాయిలు 5 మాత్రమే వదిలిన ఆ ట్యాంకు ఎంతకాలములో నిండును?

సాధన : 5 కుళాయిలు ట్యాంకును నింపుటకు పట్టు కాలము x నిమిషములు అనుకొనుము. వీటిని పట్టికలో వ్రాయగా

కుళాయిల సంఖ్య	6	5
సమయము(నిమిషములలో)	80	x

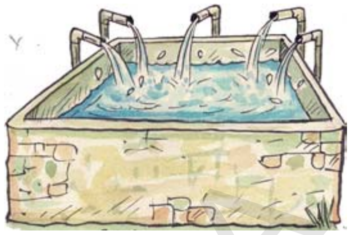
కుళాయిల సంఖ్య తగ్గిన, ట్యాంకు నిండుటకు పట్టు సమయము పెరుగును. కావున విలోమానుపాతము.

కావున, $80 \times 6 = x \times 5 \; [x_1 y_1 = x_2 y_2]$

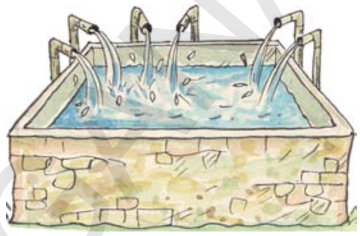
$$\frac{80 \times 6}{5} = x$$

లేదా $x = 96$ నిమిషములు

5 కుళాయిలు ఆ ట్యాంకును నింపుటకు పట్టుకాలము 96 నిమిషములు లేదా 1 గంట 36 నిమిషములు



5 కుళాయి నింపుతున్న తొట్టె



6 కుళాయి నింపుతున్న తొట్టె

అభ్యాసము - 10.3

1. సిరివద్ద, కిలో 8 రూపాయల చొప్పున 5 కిలోల బంగాళ దుంపలు కొనుటకు సరిపడ డబ్బులు కలవు. బంగాళా దుంపల వెల కిలో 10 రూపాయలకు పెరిగిన ఆమె వద్ద వున్న సొమ్ముతో ఎన్నికిలోలు కొనగలదు ?
2. ఒక శిబిరంలో 500 మంది వ్యక్తులకు 70 రోజులకు సరిపడు ఆహార ధాన్యాల నిల్వ కలదు. ఆ శిబిరంలో అదనంగా 200 మంది చేరిన ఆ ఆహారధాన్యాల నిల్వ ఎన్ని రోజుల వరకు సరిపోతుంది?
3. 36 గురు కులీలు ఒక పనిని 12 రోజులలో చేయగలరు. అయిన అదే పనిని 9 గురు కూలీలు ఎన్ని రోజులలో చేయగలరు?
4. ఒక వ్యక్తి సైకిల్‌పై 28 కి.మీ దూరమును 2 గంటలలో చేరును. అతను అదే వేగముతో ప్రయాణించిన 56కి.మీ దూరమును ఎంతకాలములో చేరగలడు?
5. ఒక ఓడ గంటకు 16 నాటికల్ మైళ్ళవేగముతో కొంత దూరమును 10 గంటలలో చేరగలదు. అదే దూరము 8 గంటలలో చేరవలెనన్న ఆ ఓడ ఎంత అధిక వేగముతో ప్రయాణము చేయాలి? సముద్రములపై దూరమునకు ప్రమాణము నాటికల్‌మైల్ (1 నాటికల్ మైల్ = 1852 మీటర్లు).
6. ఒక ట్యాంకును 5 కుళాయిలు $1\frac{1}{2}$ గంటల కాలములో నింపును. అదే ట్యాంకును అర్థగంటలో నింపవలెనన్న అటువంటి కుళాయిలు ఎన్ని కావలెను?
7. 15 మంది కూలీలు ఒక గోడను 48 గంటలలో కట్టగలరు. అదే గోడను 30 గంటలలోనే కట్టవలెనన్న ఎంతమంది కూలీలు కావలెను?
8. ఒక పాఠశాలలో 45 నిమిషములలో కాలవ్యవధితో 8 పీరియడ్లు కలవు. ఒకరోజులో 6 పీరియడ్లు మాత్రమే వుండవలెనన్న ఒక పీరియడ్‌కు కాలవ్యవధి ఎంత వుండవలెను? (పాఠశాల పనివేళలలో మార్పులేదని భావించుము)

9. z అనే రాశి x అనే రాశికి అనులోమానుపాతంలోను, y అనే రాశికి విలోమానుపాతంలోను వుంటుంది. x రాశిలో 12% పెరుగుదల, y రాశిలో 20% తరుగుదల వున్న z రాశిలో వచ్చే పెరుగుదల శాతమను కనుగొనుము.

10. $(x + 1)$ మంది పనివారు ఒక పనిని $(x + 1)$ రోజులలో చేయగలరు. అయిన అదే పనిని $(x + 2)$ మంది పనివారు ఎన్ని రోజులలో చేయగలరు?

11. ఒక దీర్ఘచతురస్రము చుట్టుకొలత 24 మీ. దాని చుట్టుకొలతను మార్పు చేయకుండా పొడవును 1మీ పెంచినపుడు, దాని వెడల్పు మరియు వైశాల్యములలో మార్పు వచ్చును. క్రింది పట్టికను నింపి ఆ విలువల ఆధారంగా, వెడల్పు, వైశాల్యములలో విలువలు పొడవు విలువ మార్పు మీద ఏ విధంగా ఆధారపడతాయో గమనించుము.

మీరు ఏమి గమనించారు? మీ పరిశీలనను నోట్ పుస్తకములో వ్రాయండి.

పొడవు(సెం.మీలలో)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
వైశాల్యము(సెం.మీలలో)	11	10	…	...	…	…	…	…	…
వైశాల్యము (చసెం.మీలలో)	11	20	…	…	…	…	…	…	…

10.3 మిశ్రమానుపాతము

కొన్ని సందర్భాలలో ఒక రాశిలోని మార్పు, ఒకటి కంటే ఎక్కువ రాశులలో అనుపాతంలో వుండేటట్లు మార్పును కలిగించవచ్చును. అటువంటి సందర్భాలలో మనం మొదటి రాశి నిష్పత్తిని, మిగిలిన రెండు రాశులలో బహుళ నిష్పత్తికి సమానం చేస్తాము.

(i) ఒకరాశి, మిగిలిన రాశులతో అనులోమానుపాతంలో వుండవచ్చును.

(ii) ఒకరాశి, మిగిలిన రెండు రాశులతో విలోమానుపాతంలో వుండవచ్చును.

(iii) ఒకరాశి మిగిలిన రెండు రాశులలో ఒకదానితో అనులోమానుపాతంలోను రెండవ దానితో విలోమానుపాతంలోను వుండవచ్చును.

ఉదాహరణ 10: 35 మంది విద్యార్థులకు 24 రోజులకు భోజనాలకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 6300 అయిన 25 మంది విద్యార్థులకు 18 రోజులకు భోజనాలకు ఎంతఖర్చు అవుతుంది?

సాధన: ఇక్కడ మనకు మూడు రాశులు అనగా భోజన ఖర్చులు, విద్యార్థుల సంఖ్య, రోజుల సంఖ్య వున్నాయి.

భోజనఖర్చు (₹లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య	రోజుల సంఖ్య
6300	35	24
? (x)	25	18
$6300 : x$	$35:25 = 7:5$	$24:18 = 4:3$

భోజన ఖర్చులు విద్యార్థుల సంఖ్యకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

అంటే, భోజన ఖర్చు ∝ విద్యార్థుల సంఖ్య

$6300 : x = 7:5$

అదేవిధంగా భోజన ఖర్చులు, రోజుల సంఖ్యకు అనులోమానుపాతంలో వుంటాయి.

అంటే, భోజన ఖర్చు $\propto$ రోజుల సంఖ్య

$6300 : x = 4 : 3$

ఇక్కడ భోజన ఖర్చులు రెండు రాశుల మీద అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు రోజుల సంఖ్య మీద ఆధారపడతాయి. కావున మనం ఆ రెండు రాశుల బహుళనిష్పత్తి తీసుకోవాలి.

భోజన ఖర్చులు $\propto$ విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు రోజుల సంఖ్య యొక్క బహుళనిష్పత్తి

$6300 : x = 7 : 5$ మరియు $4 : 3$ ల బహుళనిష్పత్తి

$6300 : x = 7 \times 4 : 5 \times 3$

$6300 : x = 28 : 15$

మధ్యముల లబ్ధము = అంత్యముల లబ్ధము

$28 \times x = 15 \times 6300$

$$x = \frac{15 \times 6300}{28}$$

x = ₹ 3375.

కావున భోజన ఖర్చులకు అయ్యే సొమ్ము ₹ 3375.

ఉదాహరణ 11: 24 మంది పనివారు ఒక పనిని రోజుకు 6 గంటల వంతున పనిచేస్తూ 14 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. అయిన రోజుకు 7 గంటల వంతున పనిచేస్తూ ఆ పనిని 8 రోజులలో పూర్తి చేయవలెనన్న కావలసిన పనివారి సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన: ఇక్కడ మనకు మూడురాశులు అనగా పనివారి సంఖ్య, రోజుకు పనిచేసే పనిగంటలు, రోజుల సంఖ్య వున్నాయి.

పనివారి సంఖ్య	రోజుకు పనిగంటలు	రోజుల సంఖ్య
24	6	14
? (x)	7	8
$24 : x$	$6 : 7$	$14 : 8 = 7 : 4$

పనివారి సంఖ్య, రోజులో చేసే పనిగంటల సంఖ్యకు విలోమానుపాతంలో వుండును.

అంటే, పనివారి సంఖ్య $\propto \dfrac{1}{\text{ఒక రోజులో చేసే పనిగంటలు}}$

$24 : x = 6 : 7$ విలోమ నిష్పత్తి అనగా $7 : 6$

$\Rightarrow$ 24 : x అనునది 7 : 6కు అనులోమానుపాతంలో వుండును.

అదేవిధంగా పనివారి సంఖ్య, రోజుల సంఖ్యకు విలోమానుపాతంలో వుండును.

అంటే, పనివారి సంఖ్య $\propto \frac{1}{\text{రోజులసంఖ్య}}$

24: x = 7 : 4 విలోమనిష్పత్తి అనగా 4 : 7

పనివారి సంఖ్య రెండు రాశుల మీద అనగా రోజుల సంఖ్య మరియు ఒక రోజులో చేసే పనిగంటల సంఖ్యపై ఆధారపడును కావున

పనివారి సంఖ్య $\propto$ రోజుల సంఖ్య విలోమ నిష్పత్తి మరియు రోజులో చేసే పనిగంటల సంఖ్య విలోమ నిష్పత్తుల బహుళనిష్పత్తి

24 : x = 7 : 6 మరియు 4 : 7 ల బహుళనిష్పత్తి

$24 : x = 7 \times 4 : 6 \times 7$

$24 : x = 4 : 6$

$24 : x = 2 : 3$

అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము.

$2 \times x = 24 \times 3$

$x = 36$

కావలసిన పనివారి సంఖ్య = 36.

వేరొక పద్ధతి

$$\frac{24}{x} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2 \times x = 24 \times 3$$

$$x = \frac{72}{2} = 36$$

ఉదాహరణ 12: 12 మంది పెయింటర్లు 180 మీటర్ల పొడవు గల గోడకు 3 రోజులలో రంగు వేయగలరు. అయిన 200 మీటర్లు పొడవు గల గోడకు 5 రోజులలో రంగు వేయవలెనన్న ఎంతమంది పెయింటర్లు కావలెను?

సాధన : దీనిలో పెయింటర్ల సంఖ్య, గోడ పొడవుకు అనులోమానుపాతంలోను, రోజుల సంఖ్యకు విలోమానుపాతంలో వుండును.

పెయింటర్ల సంఖ్య	గోడపొడవు (మీటర్లలో)	రోజుల సంఖ్య
12	180	3
x	200	5
$12 : x$	180 : 200 = 9 : 10	3 : 5

పెయింటర్ల సంఖ్య $\propto$ గోడపొడవు కావున,

$12 : x = 9 : 10$ ---- (1)

మరియు పెయింటర్ల సంఖ్య $\propto \frac{1}{\text{రోజులసంఖ్య}}$

$12 : x = 3 : 5$ యొక్క విలోమనిష్పత్తి

$12 : x = 5 : 3$ ---- (2)

(1), (2) ల నుండి

$12 : x \;=\; 9 : 10$ మరియు $5 : 3$ ల బహుళనిష్పత్తి

$12 : x \;=\; (9 : 10) \times (5 : 3)$

$12 : x \;=\; 9 \times 5 : 10 \times 3$

$12 : x \;=\; 45 : 30 = 3 : 2$

$12 : x = 3 : 2$ (అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము)

$3 \times x = 12 \times 2$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

కావలసిన పెయింటర్ల సంఖ్య = 8

వేరొకపద్ధతి :

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$$

$$12 \times 2 = 3 \times x$$

$$x = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times 2}{\cancel{3}} = 8$$

అభ్యాసము - 10.4

1. 8 మందికి 20 రోజులకు కావలసిన బియ్యము వెల ₹ 480. అయిన 12 మందికి 15 రోజులకు కావలసిన బియ్యము వెల ఎంత?

2. 10 మంది పనివారు 75 కి.మీ. పొడవు గల రోడ్డును 5 రోజులలో వేయగలరు. అదే పనితనము గల 15 మంది పనివారు 45 కి.మీ. పొడవు గల రోడ్డును ఎన్ని రోజులలో వేయగలరు?

3. రోజుకు 8 గంటల వంతున పనిచేస్తూ 24 మంది ఒక పనిని 15 రోజులలో చేయగలరు. రోజుకు 9 గంటల వంతున పనిచేస్తూ 20 మంది అదేపనిని ఎన్ని రోజులలో చేస్తారు ?

4. 175 మంది పనివారు 36 రోజులలో 3150 మీటర్ల పొడవు గల కాలువను త్రవ్వగలరు అయిన 3900 మీటర్ల పొడవు గల కాలువను 24 రోజులలో త్రవ్వుటకు ఎంతమంది పనివారు కావలెను?

5. 14 మంది టైపిస్ట్లు రోజుకు 6 గంటల వంతున పనిచేయుచూ 12 రోజులలో ఒక పుస్తకమును టైప్ చేయగలరు అయిన అదే పుస్తకమును 4 గురు టైపిస్ట్లు రోజుకు 7 గంటల వంతున పనిచేయుచూ ఎన్ని రోజులలో టైప్ చేయగలరు?

మనం ఏమి చర్చించాం

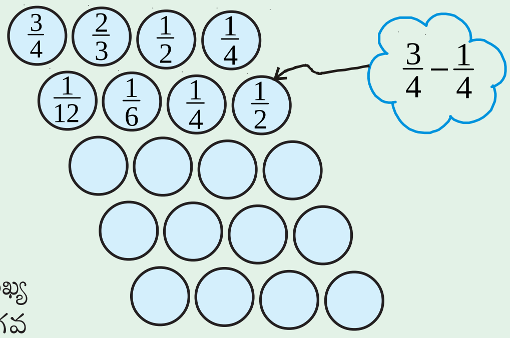
- x మరియు y అనే రెండు రాశులు అనులోమానుపాతంలో నున్న ఆ రెండు రాశులు ఒకే నిష్పత్తిలో మార్పుచెందును. అనగా $\frac{x}{y} = k$ లేదా $x = ky$. దానిని మనం $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ లేదా $x_1 : y_2 = x_2 : y_1$ గా వ్రాయవచ్చును. [ఇక్కడ x_1, x_2 విలువలకు అనుగుణంగా వచ్చిన విలువలు వరుసగా y_1, y_2].
- రెండు రాశులు x మరియు y లు విలోమానుపాతంలో వుంటే వాటి మధ్య $xy = k$ (k స్థిరాంకము) వంటి సంబంధము ఏర్పడుతుంది. x_1, x_2 విలువలకు అనుగుణంగా వచ్చిన విలువలు వరుసగా y_1, y_2 అయిన $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k), లేదా $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.
- ఒక రాశి పెరుగుదల (తగ్గుదల) రెండవరాశి తగ్గుదల (పెరుగుదల) ఒకే అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు రాశులు విలోమానుపాతంలో వుంటాయి. అపుడు మొదటి రాశి నిష్పత్తి $(x_1 : x_2)$ రెండ రాశి నిష్పత్తి $(y_1 : y_2)$ యొక్క విలోమ నిష్పత్తికి సమానంగా వుంటుంది. ఇక్కడ రెండు నిష్పత్తులు సమానం కావున ఈ విలోమ మార్పునే మనం విలోమానుపాతం అంటాము.
- కొన్నిసార్లు ఒకరాశిలోని మార్పు, రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ రాశులలో మార్పుకు కారణమవుతుంది. ఆ మార్పులు అనుపాతంలో వుంటే దానినే మనం మిశ్రమానుపాతం అంటాము. అప్పుడు మొదటి రాశి నిష్పత్తిని మిగిలిన రెండు రాశుల బహుళనిష్పత్తికి సమానం చేస్తాము.

వరుససంఖ్యల వ్యవకలనం Diffy

ఈ పద్ధతిలో వ్యవకలనము చేయు విధానమును Diffy అంటారు. వరుస సంఖ్యల నుండి తీసివేయుట జరుగును. కావున దీనికి Diffy అనిపేరు వచ్చినది. ఈ విధానము సంఖ్యల(భిన్నముల) తీసివేయుట యందు నేర్పు కలుగును.

సూచనలు:

సోపానము1: నాలుగు వృత్తములను ఒక వరుసగా పటములో చూపినట్లు వ్రాసిపై వరుసయందు ఏవైనా నాలుగు భిన్నములు తీసుకొనుము.



సోపానము 2 :పై వరుసలోని మొదటి మూడు వృత్తములతో గల భిన్నములను పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసివేయుచూ వాటికి క్రింద వరుసతో కల వృత్తములతో జవాబు వ్రాయండి. మొదటి వరుసలోని అన్నింటిని కంటే మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య నుండి మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య తీసివేసి ఫలితమును రెండవ వరుసలేని నాలుగవ వృత్తములో పటములో చూపినట్లు వ్రాయండి.

సోపానము 3 : మిగిలిన వృత్తములు నింపుటకు సోపానము 2 నందు చెప్పబడి నట్లు పూరించండి. చివరిగా ఒక వరుసలోని అన్ని సంఖ్యలు '0' వచ్చే వరకు చేయండి.

సోపానము 4 : వేర్వేరు భిన్నములు తీసుకొని మరలా పై విధంగా వ్రాయుచూ వృత్తములను పూరించండి.

ఉదా: $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$ భిన్నములతో ప్రయత్నించండి.

అధ్యాయం **11**

బీజీయ సమాసాలు

11.0 పరిచయం

క్రింది సమాసాలను పరిశీలించండి.

(i) $3 + 8 - 9$ (ii) $\frac{1}{3}xy$ (iii) 0 (iv) $3x + 5$ (v) $4xy + 7$ (vi) $15 + 0 - 19$ (vii) $\frac{3x}{y}(y \neq 0)$

(i), (iii) మరియు (vi) లు సంఖ్యా సమాసాలు, (ii), (iv), (v) మరియు (vii)లు బీజీయసమాసాలు. వీటి మధ్య తేడాల్ని గుర్తించారా?

మీరు మరిన్ని సమాసాలను ఏర్పరచడానికి ప్రయత్నించండి. వివిధ చరరాశులు, స్థిరరాశులతో సమాసాలు ఏర్పడతాయని మీకు తెలుసు కదా! $3x + 5$ సమాసంలో చలరాశి x ; 3, 5 లు స్థిరరాశులు. $3x$ అనునది బీజీయ పదం, 5 సంఖ్యా పదం. x, y చరరాశులు, 4 మరియు 7 స్థిరరాశులు ఉండేటట్లు రెండు పదాలతో $4xy + 7$ సమాసాన్ని ఏర్పరచగలము.

$\frac{1}{3}xy$ లో పదాల సంఖ్య 1, మరియు $2xy + pq - 3$ పదాల సంఖ్య 3.

ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ చరరాశులు మరియు స్థిరరాశుల లబ్ధంతో పదాలు ఏర్పడును. కొన్ని పదాల సంకలనం లేదా వ్యవకలనంతో సమాసాలు ఏర్పడుతాయి.

$3x + 5$ సమాసము విలువ ఏదైనా ఒక సంఖ్య ఉండగలదని మనకు తెలుసును. $x = 2$ ఐతే, సమాసము $3(2) + 5 = 6 + 5 = 11$, వివిధ x యొక్క వేర్వేరు విలువలకు $3x + 5$ సమాసానికి వేర్వేరు విలువలు ఉంటాయి. విలువలను రాబట్టండి.

ఇవి చేయండి.

1. క్రింది బీజీయ సమాసాలలోని పదాల సంఖ్యను తెలుపండి.
   $5xy^2$, $5xy^3 - 9x$, $3xy + 4y - 8$, $9x^2 + 2x + pq + q$.
2. x యొక్క వేర్వేరు విలువలకు $3x + 5$ యొక్క విలువ కనుక్కోండి.

చరరాశులు, స్థిరరాశులతో ఏర్పడే మరిన్ని సమాసాలను $5xy^2$, $5xy^3 - 9x$, $3xy + 4y - 8$ మొదలగు వాటిని పరిశీలించండి. మనకు $5xy^2$ ఏకపది, $5xy^3 - 9x$ ద్విపది; $3xy + 4y - 8$ త్రిపది అని తెలుసు.

> ఒక ఏకపదిలోని చరరాశుల ఘాతాంకాల మొత్తాన్ని ఆ ఏకపది పరిమాణం అంటారు.

$5x^2y$ ఏకపద సమాసము యొక్క పరిమాణం '3' అని మనకు తెలుసు. $5xy^3 - 9x$ సమాసము యొక్క పరిమాణము '4'.

> ఒక బీజీయ సమాసంలోని వివిధ పదాల పరిమాణాల్లో గరిష్ఠ పరిమాణాన్ని ఆ బీజీయ సమాస పరిమాణం అంటాము.

అలాగే, $3xy + 4y - 8$ త్రిపది యొక్క పరిమాణం '2'.

సమాసములో ఒకేఒక పదముంటే ఏకపది అని, రెండు పదాలుంటే ద్విపది అనీ మూడు పదాలుంటే త్రిపది అని అంటారు. సాధారణంగా శూన్యేతర గుణకాలతో ఒకటి లేదా ఎక్కువ పదాలు గల సమాసాన్ని బహుళపది అంటారు.

11.1 సజాతి - విజాతి పదాలు

కింది పదాలను పరిశీలించండి

$2x,\ 3x^2,\ 4x,\ -5x,\ 7x^3$

వీటిలో $2x, 4x$ మరియు $-5x$, లలో ఒకే చరరాశి x, ఒకే ఘాతం ఉంది ఇలాంటి పదాలను సజాతి పదాలు అంటారు. సజాతి పదాలకు గుణకాలు ఒకే రకంగా ఉండకపోవచ్చు. $8p, 8q$ సజాతి పదాలెందుకు కావు? అలాగే $8p, 8pq$ లు $8p$, $8p^2$ లు ఎందుకు సజాతి పదాలు కావు?

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటిలో సజాతి పదాలను గుర్తించండి.

   $ax^2y,\ 2x,\ 5y^2,\ -9x^2,\ -6x,\ 7xy,\ 18y^2.$

2. $5pq^2$ కు 3 సజాతి పదాలను తయారుచేయండి.

11.2 బీజీయ సమాసాల సంకలన వ్యవకలనాలు (కూడికలు, తీసివేతలు)

ఉదాహరణ:1 $5x^2 + 3xy + 2y^2$ మరియు $2y^2 - xy + 4x^2$ లను కూడండి.

సాధన: సమాసాలలోని సజాతి పదాలు ఒకదాని క్రింద ఒకటిగా ఉండేట్లు గుర్తులు మారకుండా అమర్చి కూడాలి.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^2 & + & 3xy & + & 2y^2 \\ + & 4x^2 & - & xy & + & 2y^2 \\ \hline & 9x^2 & + & 2xy & + & 4y^2 \\ \hline \end{array}$$

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.

1. షీలా $2pq, 4pq$ ల మొత్తం $8p^2q^2$ అని చెప్పింది. సమాధానం సరైందా? మీ వివరణ ఇవ్వండి.
2. రెహమాన్ $4x$ ను $7y$ కు కలిపితే $11xy$ వస్తుందన్నాడు మీరు ఏకీభవిస్తారా?

ఉదాహరణ:2 $12xy + 4x^2 - 3y^2$ నుండి $2xy + 9x^2$ ను తీసివేయండి.

సాధన: సజాతి పదాలు ఒకదానిపై మరొకటి ఉండేట్లు క్రింద చూపిన విధంగా రాయండి.

$$\begin{array}{l} 12xy + 4x^2 - 3y^2 \\ \quad 2xy + 9x^2 \\ (-) \qquad (-) \\ \hline 10xy - 5x^2 - 3y^2 \\ \hline \end{array}$$

రెండవ సమాసంలోని ప్రతీపదం గుర్తు మార్చి సూక్ష్మీకరించండి.

[**సూచన** : ఒక సంఖ్యను తీసివేయడం అంటే, ఆ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమాన్ని కూడడమే ఆ విధంగా -3 ని తీసివేయడం అంటే $+3$ ను కలపడమే, అదేవిధంగా $9x^2$ ను తీసివేయడం అంటే $-9x^2$ ను కలపడమే. $-3xy$ ని తీసివేయడమంటే $+3xy$ ని కలపడం].

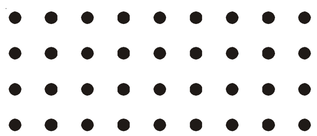
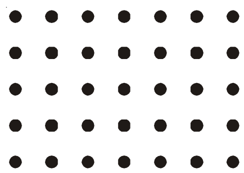
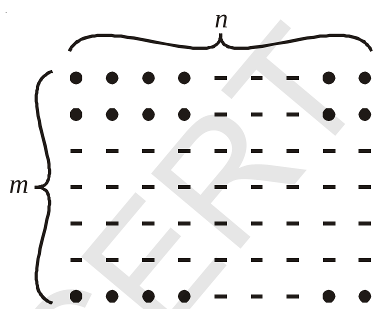
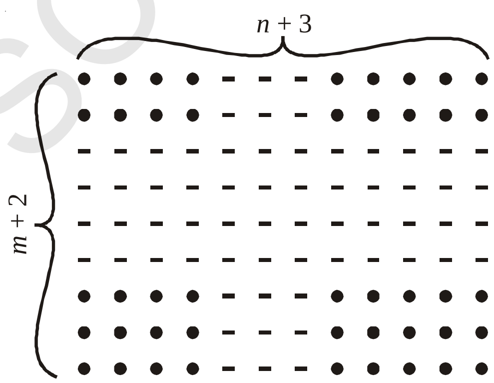
ఇవి చేయండి.

1. $A = 2y^2 + 3x - x^2$, $B = 3x^2 - y^2$ మరియు $C = 5x^2 - 3xy$ అయితే

   (i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $B + C$ (iv) $B - C$ (v) $A + B + C$ (vi) $A + B - C$

11.3 బీజీయ సమాసాలు గుణకారం

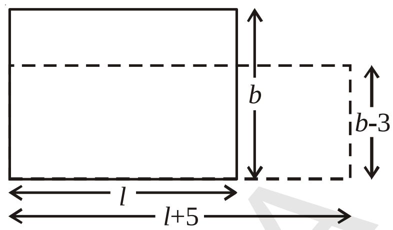
పరిచయం: (i) కింద ఇవ్వబడిన చుక్కల అమరికను చూడండి.

చుక్కల అమరిక	మొత్తం చుక్కల సంఖ్య
	అడ్డు × నిలువు
	4×9
	5×7
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

మొత్తం చుక్కల సంఖ్యను తెలుసు కొనుటకు అడ్డువరుసలోని చుక్కల సంఖ్యను నిలువు వరుసలోని చుక్కల సంఖ్యతో గుణించుము.

ఇందులో అడ్డువరుసలోని సంఖ్య కు 2 వరుసలు కలుపబడినవి (అనగా m+2), నిలువు వరుస లోని సంఖ్యకు 3 వరుసలు కలపబడినవి (అనగా n+3)

(ii) మీరు ఏవైనా రెండు బీజీయ సమాసాల లబ్ధం వ్రాయడానికి ఇలాంటి సందర్భాలను ఆలోచించండి.



l పొడవు, b వెడల్పుగా గల దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవును 5 యూనిట్లు పెంచి అనగా $(l + 5)$ యూనిట్లుని వెడల్పును 3 యూనిట్లు తగ్గించి అనగా $(b – 3)$ యూనిట్లు గల నూతన దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాన్ని గణిస్తే $(l + 5)\ (b – 3)$ చ.యూ.

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాన్ని గణించాలంటే $(l+5)\times(b–3)$ ల లబ్ధం కనుక్కోవాలి.

(iii) ఘనపరిమాణం గురించి ఆలోచించండి? (దీర్ఘ ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల లబ్ధం ఇస్తుంది).

(iv) మనం వస్తువులను ఖరీదు చేసినపుడు (కొన్నప్పుడు) గుణకారాలను చేస్తాము. ఉదా॥ డజను అరటిపళ్ళ వెల ₹ p లు, పాఠశాల విహారయాత్రకు z డజన్లు అవసరమైతే మనం చెల్లించాల్సిన మొత్తం వెల = ₹ $p \times z$

ఒకవేళ ధరను ₹ 2 తగ్గిస్తే, అలాగే ముందు కొనాలనుకొన్న z డజన్లలో 4 డజన్లను తగ్గిస్తే, చెల్లించవలసిన వెల ఎంత?

అరటిపళ్ళ ధర ప్రతిడజనుకు = ₹ $(p – 2)$ మరియు

అరటిపళ్ళు కొనాల్సినవి = $(z – 4)$ డజన్లు

కాబట్టి మొత్తం ధర = ₹ $(p – 2) \times (z – 4)$

ప్రయత్నించండి.

వేగము కాలము ఉపయోగించి దూరము లెక్కించునపుడు, అసలు, రేటు, కాలము ఇచ్చిననపుడు సామాన్య వడ్డీ లెక్కించుటకు బీజీయ సమాసములు వ్రాయుము.

బీజీయ సమాసములు ఉపయోగించి విలువలు కనుగొను మరొక రెండు సందర్భములు తెల్పండి.

పై ఉదాహరణలలో రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ రాశులతో గుణకారం చేయాలి. ఒకవేళ ఈ రాశులు బీజీయ సమాసాలు అయితే బీజీయ సమాసాల లబ్ధం కనుగొనాలి. ఈ బీజీయ లబ్ధాలను కనుగొనే విధానం మనం నేర్చుకొందాం. రెండు ఏకపదుల గుణకారాన్ని చూద్దాం.

11.4 ఏక పదుల గుణకారము

11.4.1 రెండు ఏక పదులను గుణించుట

మనకు ఇంతకు పూర్వమే తెలిసిన

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$

మరియు $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

ఇప్పుడు దిగువ లబ్ధాలను గమనించండి.

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

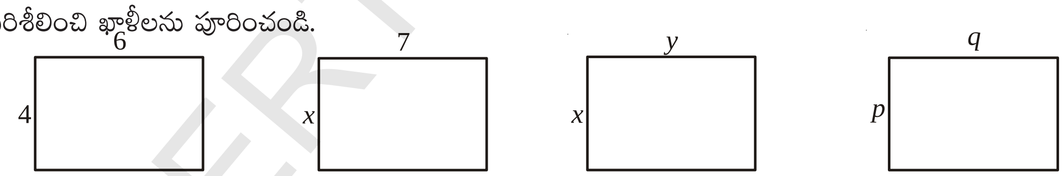
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

రెండు ఏకపదులలోని బీజీయ భాగములలో గల చలరాశుల ఘాత పదాలను ఎలా సమీకరిస్తామో గమనించండి. ఘాత పదాల సమీకరించుటకు ఘాతాంకాల న్యాయాలను ఉపయోగించుటను గమనించండి.

పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.



వైశాల్యము = $4 \times 6 = 24$ వైశాల్యము= $x \times 7$ = ... వైశాల్యము = $x \times y$ =......వైశాల్యము = ... ×...... = ...

దిగువ లబ్ధాలను గమనించండి.

1. $7x \times 5y = (7 \times 5) \times (x \times y) = 35xy$
2. $3x \times (-2y) = \{3 \times (-2)\} \times (x \times y) = -6xy$
3. $(-4x) \times (-6y) = (-4) \times (-6) \times (x \times y) = 24xy$
4. $3x \times 5x^2 = (3 \times 5) \times (x \times x^2) = 15x^3$
5. $(-2x^2) \times (-4x^2) = (-2) \times (-4) \times x^2 \times x^2 = 8x^4$

గమనిక	(i) రెండు ధనసంఖ్యల లబ్ధము ధనసంఖ్య
	(ii) రెండు ఋణ సంఖ్యల లబ్ధము ధనసంఖ్య
	(iii) ఒక ధన మరియు ఒక ఋణ సంఖ్యల లబ్ధము ఋణ సంఖ్య

ఇది చేయండి.

1. పట్టికను పూర్తిచేయండి.

మొదటి ఏకపది	రెండవ ఏకపది	రెండు ఏకపదుల లబ్ధము
$2x$	$-3y$	$2x \times (-3y) = -6xy$
$-4y^2$	$-2y$	....
$3abc$	$5bcd$	....
mn	$-4m$	....
$-3mq$	$-3nq$	....

2. రెండు ఏక పదముల లబ్ధము ఎల్లప్పుడు ఏకపదియేనా? సరిచూడండి.

11.4.2 మూడు లేక అంతకంటే ఎక్కువ ఏకపదుల గుణించుట

దిగువ ఉదాహరణముల గమనించండి.

ఉదాహరణ 3: $5x$, $6y$ మరియు $7z$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

మొదటి పద్ధతి

$$5x \times 6y \times 7z = (5x \times 6y) \times 7z$$
$$= 30xy \times 7z$$
$$= 210xyz$$

రెండవ పద్ధతి

$$5x \times 6y \times 7z = 5 \times x \times 6 \times y \times 7 \times z$$
$$= 5 \times 6 \times 7 \times x \times y \times z$$
$$= 210\ xyz$$ (చరరాశుల గుణకాలను మొదట గుణించండి.)

ఉదాహరణ 4: $3x^2y \times 4xy^2 \times 7x^3y^3$ ను కనుగొనండి.

సాధన:
$$= 3 \times 4 \times 7 \times (x^2y) \times (xy^2) \times (x^3y^3)$$
$$= 84 \times x^2 \times y \times x \times y^2 \times x^3 \times y^3$$
$$= 84 \times (x^2 \times x \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$$
$$= 84 \times x^6 \times y^6 = 84x^6y^6.$$

ఉదాహరణ 5: $3x$, $-4xy$, $2x^2$, $3y^2$ మరియు $5x^3y^2$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $3x \times (-4xy) \times 2x^2 \times 3y^2 \times 5x^3y^2$
$$= [3 \times (-4) \times 2 \times 3 \times 5] \times (x \times x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^2)$$
$$= -360x^7y^5.$$

పై ఉదాహరణల నుండి రెండు, రెండు కన్నా ఎక్కువ ఏకపదులను గుణించిన ఏకపదియే వచ్చునని గమనించాలి?

అభ్యాసము - 11.1

1. దిగువ ఇచ్చిన ఏకపది జతల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.
(i) 6, $7k$ (ii) $-3l, -2m$ (iii) $-5t^2, -3t^2$ (iv) $6n, 3m$ (v) $-5p^2, -2p$

2. క్రింది లబ్ధాల పట్టికను పూర్తిచేయండి.

x	$5x$	$-2y^2$	$3x^2$	$6xy$	$3y^2$	$-3xy^2$	$4xy^2$	x^2y^2
$3x$	$15x^2$	….	….	….	….	….	….	….
$4y$	….	….	….	….	….	….	….	….
$-2x^2$	$-10x^3$	$4x^2y^2$	….	….	….	….	….	….
$6xy$	….	….	….	….	….	….	….	….
$2y^2$	….	….	….	….	….	….	….	….
$3x^2y$	….	….	….	….	….	….	….	….
$2xy^2$	….	….	….	….	….	….	….	….
$5x^2y^2$	….	….	….	….	….	….	….	….

3. క్రింది పట్టికలో కొన్ని దీర్ఘఘనాల పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల కొలతలు ఇవ్వబడినవి. వాటి ఘన పరిమాణాల్ని కనుగొనండి.

వ.సం.	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు	ఘనపరిమాణము **(v) = $l \times b \times h$**
(i)	$3x$	$4x^2$	5	$v = 3x \times 4x^2 \times 5 = 60x^3$
(ii)	$3a^2$	4	$5c$	$v =$ …………………
(iii)	$3m$	$4n$	$2m^2$	$v =$ …………………
(iv)	$6kl$	$3l^2$	$2k^2$	$v =$ …………………
(v)	$3pr$	$2qr$	$4pq$	$v =$ …………………

4. క్రింది ఏకపదుల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.
(i) xy, x^2y, xy, x (ii) a, b, ab, a^3b, ab^3 (iii) kl, lm, km, klm
(iv) pq, pqr, r (v) $-3a, 4ab, -6c, d$

5. $A = xy$, $B = yz$ మరియు $C = zx$, అయిన ABC = ...

6. $P = 4x^2$, $T = 5x$ మరియు $R = 5y$, అయిన $\frac{PTR}{100} =$ ....

7. స్వంతంగా కొన్ని ఏకపదులను వ్రాసి వాటి లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

11.5 ద్విపది లేక త్రిపదిని ఏకపదితో గుణించుట

11.5.1 ద్విపదిని ఏకపదితో గుణించుట

ఏకపది $5x$ మరియు ద్విపది $6y + 3$ ల గుణించుట

గుణకార విధాన క్రమము (క్రింది విధంగా ఉండును)

సోపానము	సూచనలు	విధానక్రమము
1.	ఏకపది మరియు ద్విపదుల మధ్య గుణకార గుర్తు ఉంచి లబ్ధంగా వ్రాయండి.	$5x \times (6y+3)$
2.	విభాగన్యాయమును ఉపయోగించి ఏకపదిని ద్విపది మొదటి పదముతో మొదట గుణించి తరువాత ఏకపదిని ద్విపది రెండవ పదముతో గుణించి లబ్ధాలను సంకలనంగా వ్రాయండి	$(5x \times 6y) + (5x \times 3)$
3.	పదాలను సూక్ష్మీకరించండి.	$30xy + 15x$

కావున $5x$ మరియు $6y+3$ ల లబ్ధమును ఇలా రాయవచ్చు.

$$5x(6y + 3) = 5x \times (6y + 3)$$
$$= (5x \times 6y) + (5x \times 3)$$
$$= 30xy + 15x$$

ఉదాహరణ 6: $(-4xy)(2x - y)$ లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $(-4xy)(2x - y) = (-4xy) \times (2x - y)$

$$= (-4xy)\times 2x + (-4xy) \times (-y)$$
$$= -8x^2y + 4xy^2$$

ఉదాహరణ7: $(3m - 2n^2)(-7mn)$ లబ్ధాన్ని కనగొనండి.

$\because$ విభాగన్యాయము

సాధన: $(3m - 2n^2)(-7mn) = (3m - 2n^2) \times (-7mn)$

$$= (-7mn) \times (3m - 2n^2)$$
$$= ((-7mn) \times 3m) - ((-7mn) \times 2n^2)$$
$$= -21m^2 n + 14mn^3$$

ఇవి చేయండి.

1. (i) $3x(4ax + 8by)$ (ii) $4a^2b(a-3b)$ (iii) $(p + 3q^2)\, pq$ (iv) $(m^3 + n^3)5mn^2$ లబ్ధాలను కనుగొనండి.
2. ఒక ఏకపది మరియు ఒక ద్విపది లబ్ధంలో గరిష్ఠంగా ఎన్ని పదాలు ఉంటాయి?

11.5.2 త్రిపదిని ఏకపదిచే గుణించుట

> త్రిపది మరియు ఏకపదిల లబ్ధంలో గరిష్ఠంగా ఎన్ని పదాలు ఉంటాయి?

ఏకపది $2x$ మరియు త్రిపది $(3x + 4y - 6)$ లను తీసుకొనిన

వాటి లబ్ధము $= 2x \times (3x + 4y - 6)$

$= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) + (2x \times (-6))$ (విభాగన్యాయము)

$= 6x^2 + 8xy - 12x$

అభ్యాసము - 11.2

1. పట్టికను పూర్తి చేయండి.

క్ర.సం	మొదటి సమాసము	రెండవసమాసము	లబ్ధము
1	$5q$	$p+q-2r$	$5q(p+q-2r)=5pq+5q^2-10qr$
2	$kl+lm+mn$	$3k$	....
3	ab^2	$a+b^2+c^3$	....
4	$x-2y+3z$	xyz	....
5	$a^2bc+b^2cd-abd^2$	$a^2b^2c^2$	....

2. $4y(3y+4)$ సూక్ష్మీకరించండి.
3. $x(2x^2-7x+3)$ ను సూక్ష్మీకరించి (i) $x = 1$ మరియు (ii) $x = 0$ విలువలకు లబ్ధము విలువ కనుగొనండి.
4. క్రింది లబ్ధాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి $a(a-b), b(b-c), c(c-a)$
5. ఈ క్రింది లబ్ధాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి. $x(x+y-r), y(x-y+r), z(x-y-z)$
6. $3x(x+2y)$ లబ్ధం నుండి $2x(5x-y)$ లబ్ధాన్ని తీసివేయండి.
7. $6k(2k+3l-2m)$ నుండి $3k(5k-l+3m)$ ను తీసివేయండి.
8. $a^2(a-b+c)+b^2(a+b-c)-c^2(a-b-c)$ ని సూక్ష్మీకరించండి.

11.6 ద్విపదిని ఒక ద్విపది లేదా ఒక త్రిపదితో గుణించుట

11.6.1 ద్విపదుల మధ్య గుణకారము

ద్విపదులు $5x+6y$ మరియు $3x - 2y$ లను తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు మనము $5x+6y$ మరియు $3x -2y$ ద్విపదుల లబ్ధాన్ని కనుగొందాము.

గుణకార విధానక్రమము (క్రింది విధంగా ఉంటుంది)

సోపానము	సూచనలు	విధానక్రమము
1.	రెండు ద్విపదులను లబ్ధముగా వ్రాయండి.	$(\underline{5x}+\underline{6y})(3x-2y)$
2.	విభాగన్యాయాన్ని ఉపయోగించి మొదటిద్విపది మొదటి పదముతో రెండవ ద్విపదిని గుణించి పిదప మొదటి ద్విపది రెండవ పదముతో రెండవ ద్విపదిని గుణించి సంకలనంగా వ్రాయండి.	$\underline{5x}(3x-2y)+\underline{6y}(3x-2y)$ $= (5x\times3x)-(5x\times2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$
3.	పదాలను సూక్ష్మీకరించండి.	$(5x\times3x)-(5x\times2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$ $=15x^2 - 10xy + 18xy - 12y^2$
4.	సజాతి పదాలను కూడండి.	$15x^2+8xy-12y^2$

కావున $(5x + 6y)$ మరియు $3x - 2y$ ల లబ్ధము

$= (5x + 6y)(3x - 2y)$

$= 5x(3x - 2y) + 6y(3x - 2y)$ (విభాగన్యాయము)

$= (5x \times 3x) - (5x \times 2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$

$=15x^2 - 10xy + 18xy - 12y^2$

$= 15x^2+8xy - 12y^2$

ఇవి చేయండి.

1. లబ్ధాలను కనుగొనండి:

   (i) $(a - b)(2a + 4b)$ (ii) $(3x + 2y)(3y - 4x)$

   (iii) $(2m - l)(2l - m)$ (iv) $(k + 3m)(3m - k)$

2. రెండు ద్విపదుల లబ్ధములో గరిష్ఠంగా ఎన్ని పదములు ఉండును?

11.6.2 ద్విపదిని త్రిపదిచే గుణించుట

ద్విపది $2x + 3y$ మరియు త్రిపది $3x + 4y - 5z$ లను తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు మనము $2x + 3y$ ని $3x + 4y - 5z$ చే గుణిద్దాము.

గుణకార విధానక్రమము క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

సోపానము	సూచనలు	విధానక్రమము
1.	ద్విపది మరియు త్రిపదుల మధ్య గుణకార గుర్తునుంచి లబ్ధముగా వ్రాయాలి.	$(2x+3y)\ (3x+4y-5z)$
2.	విభాగన్యాయాన్ని ఉపయోగించి ద్విపదిలోని మొదటి పదముతో త్రిపదిని గుణించి తరువాత ద్విపది రెండవ పదముతో త్రిపది గుణించి లబ్ధాలను సంకలనంగా వ్రాయాలి.	$2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$
3.	సూక్ష్మీకరించండి.	$(2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)$ + $(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$
4.	సజాతి పదాలను కూడగా	$6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$ $6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

కావున $(2x+3y)$ మరియు $(3x+4y-5z)$ ల లబ్ధము

$= (2x+3y)(3x+4y-5z)$

$= 2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$ (విభాగన్యాయం)

$= (2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+\ (3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$

$=6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$

$= 6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

ఒక ద్విపది మరియు త్రిపదుల లబ్ధంలో గరిష్ఠంగా ఎన్ని పదాలు ఉంటాయి ?

అభ్యాసము - 11.3

1. క్రింది ద్విపదులను గుణించుట
   (i) $2a-9$ మరియు $3a+4$ (ii) $x-2y$ మరియు $2x-y$
   (iii) $kl+lm$ మరియు $k-l$ (iv) m^2-n^2 మరియు $m+n$

2. క్రింది లబ్ధాలను కనుగొనండి.
   (i) $(x+y)(2x-5y+3xy)$ (ii) $(a-2b+3c)(ab^2-a^2b)$
   (iii) $(mn-kl+km)(kl-lm)$ (iv) $(p^3+q^3)(p-5q+6r)$

3. సూక్ష్మీకరించండి.
   (i) $(x-2y)(y-3x)+(x+y)(x-3y)-(y-3x)(4x-5y)$

(ii) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$

(iii) $(a-2b+5c)(a-b)-(a-b-c)(2a+3c)+(6a+b)(2c-3a-5b)$

(iv) $(pq-qr+pr)(pq+qr)-(pr+pq)(p+q-r)$

4. a, b, c లు మూడు ధనవాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$, అయిన $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ విలువ కనుగొనుము.

11.7 సర్వసమీకరణము (Identity) అనగా నేమి?

$a(a-2)=a^2-2a$ సమీకరణమును తీసుకొనుము.

సమీకరణం ఇరువైపులా, a యొక్క వివిధ విలువలకు సరిచూడండి.

a=5 విలువ తీసుకొంటే L.H.S = 5(5–2) = 5×3 = 15

R.H.S = 5^2–2(5) = 25 – 10 =15

కావున, సమీకరణములో $a=5$ విలువలకు L.H.S = R.H.S.

అలాగే $a = -2$ ను తీసుకోండి.

L.H.S = (–2)(–2–2) = (–2)×(–4) = 8

R.H.S = $(-2)^2$–2(–2) = 4+4 = 8

ఆ విధంగా $a=-2$ విలువలకు కూడా సమీకరణములోని L.H.S = R.H.S నకు సమానం సమీకరణం a యొక్క ఏ విలువకైనా సత్యమైనది. అందువలన ఇలాంటి సమీకరణాల్ని సర్వసమీకరణం (Identity) అంటారు.

$a(a+1) = 6$ అనే సమీకరణాన్ని తీసుకోండి.

ఈ సమీకరణం a = 2 లేదా –3కు సత్యం కాని ఇతర విలువలకు సత్యం కావు.

ఈ తరహా సమీకరణాలు చరరాశి ఏ విలువకైనా సంతృప్తి నొందవు.

కావున $a(a+1) = 6$ సమీకరణం "సర్వసమీకరణం" కాదు. సమీకరణంలోని చరరాశుల బదులుగా ఏ విలువను ప్రతిక్షేపించినా సత్యమైతే దాన్ని సర్వసమీకరణమని, కొన్ని విలువలకే సత్యమైతే సమీకరణమని అంటారు. సర్వసమీకరణం రాసేటప్పుడు L.H.S మరియు R.H.S ల మధ్య '≡' గుర్తు (identically equal to) ఉపయోగిస్తాం.

11.8 ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలు

సమస్యల సాధనలో కొన్ని సర్వసమీకరణాలను తరచుగా ఉపయోగిస్తాము. అలాంటి సర్వసమీకరణాలను ప్రత్యేక లబ్ధాలని కూడా పిలుస్తారు. అందులో ముఖ్యమైన మూడు సర్వసమీకరణాలను అధ్యయనం చేద్దాం అవి ద్విపదుల లబ్ధముగా ఉండేవి అంటే ఒక ద్విపది ఇంకో ద్విపదిచే గుణించబడేవి.

$(a+b)^2$ ను పరిశీలించండి.

ఇప్పుడు, దీని లబ్ధం

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \qquad \text{(ఎందుచేతననగా } ab = ba\text{)}$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

కావున $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ (I)

ఇప్పుడు, a=2, b=3 తీసుకుంటే (L.H.S) $= (a+b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

(R.H.S) $= a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

L.H.S మరియు R.H.S ల విలువలు సమానం. కొన్ని, ఋణ మరియు ధన పూర్ణసంఖ్యలను, భిన్నాలను a, b లకు విలువలుగా ఎంచుకొని సర్వసమీకరణంను సరిచూడండి.

ఇవి చేయండి.

క్రింద ఇవ్వబడినవి సర్వసమీకరణాలు అవునో కావో సరిచూడండి. a, b, c లు ధన పూర్ణసంఖ్యలు

(i) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(ii) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

(iii) $(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

ఇంకొక సర్వసమీకరణాన్ని చూడండి. $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$,

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

ఇవి చేయండి.

ఇప్పుడు $x = 2$, $a = 1$ మరియు $b = 3$, విలువలకు పై సర్వసమీకరణం సరిచూడండి.

- L.H.S = R.H.S అగునేమో పరిశీలించండి.
- x, a మరియు b యొక్క వివిధ విలువలకు పై సర్వసమీకరణం సరిచూడండి.
- a, b యొక్క అన్ని విలువలకు L.H.S = R.H.S అగునా?

- $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$
  (i) 'p' బదులుగా 'q' ప్రతిక్షేపించండి. ఏమిగమనించారు?
  (ii) 'q' బదులుగా 'p' ప్రతిక్షేపించండి. ఏమిగమనించారు?
  (iii) మీరు గమనించిన సర్వ సమీకరణాలు ఏవి?

11.9 సర్వసమీకరణాల వినియోగం

ఉదాహరణ 8: $(3x + 4y)^2$ విస్తరించండి.

సాధన: $(3x + 4y)^2$, రెండు ద్విపదుల లబ్ధం. ఇందులో రెండు పదాలు $(3x + 4y)$ మరియు $(3x + 4y)$ సమాన పదాలు. ద్విపదులను రెండింటిని గుణించడం వల్ల విస్తరణ చేయవచ్చు. ఈ లబ్ధంతో సర్వసమీకరణాలను పోల్చండి. ఈ లబ్ధంలో $a = 3x$ మరియు $b = 4y$ లను

మొదటి సర్వసమీకరణం $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$ లోను ప్రతిక్షేపించి సరిచూడవచ్చును

కావున $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

> $a = 3x$ మరియు $b = 4y$ సర్వసమీకరణం $(a + b)^2 \equiv a^2+2ab + b^2$ వాస్తవం

ఉదాహరణ 9: 204^2 విలువను సర్వసమీకరణం ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

సాధన : $204^2 = (200 + 4)^2$

$= (200)^2 + 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 + 1600 + 16$

$= 41616$

> $a = 200$ మరియు $b = 4$
> $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ సర్వ సమీకరణం

ఇవి చేయండి.

(i) $(5m + 7n)^2$ (ii) $(6kl + 7mn)^2$ (iii) $(5a^2 + 6b^2)^2$ (iv) 302^2

(v) 807^2 (vi) 704^2 లను విస్తరించండి.

(vii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ సర్వసమీకరణాన్ని, $a = 3m$ మరియు $b = 5n$ అయినపుడు సరిచూడండి.

ఉదాహరణ 10: $(3m - 5n)^2$ను విస్తరించుము.

సాధన: $(3m - 5n)^2 = (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2$

$= 9m^2 - 30mn + 25n^2$

> $a = 3m$, $b = 5n$ అయినపుడు
> $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

ఉదాహరణ11: 196^2 విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $196^2 = (200-4)^2$

$= 200^2 - 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 - 1600 + 16$

$= 38416$

$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ సర్వ సమీకరణంలో $a = 200, b = 4$ అయినపుడు

ఇవి చేయండి.

(i) $(9m-2n)^2$ (ii) $(6pq-7rs)^2$ (iii) $(5x^2-6y^2)^2$ లను విస్తరించండి .

(iv) 292^2 (v) 897^2 (vi) 794^2 ల విలువలు కనగొనండి.

ఉదాహరణ:12: $(4x+5y)(4x-5y)$విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $(4x+5y)(4x-5y) = (4x)^2-(5y)^2$

$=16x^2-25y^2$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$
$a = 4x, b = 5y$ అయినపుడు

ఉదాహరణ:13: 407×393 విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $407 \times 393 = (400+7)(400-7)$

$= 400^2 - 7^2$

$= 160000 - 49$

$= 159951$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$
$a = 400, b = 7$ అయినపుడు

ఉదాహరణ:14: $987^2 - 13^2$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $987^2 - 13^2 = (987+13)(987-13)$

$= 1000 \times 974 = 974000$

$a^2-b^2 \equiv (a+b)(a-b)$
$a = 987, b = 13$ అయినపుడు

ఇవి చేయండి.

(i) $(6m+7n)(6m-7n)$ (ii) $(5a+10b)(5a-10b)$

(iii) $(3x^2+4y^2)(3x^2-4y^2)$ ల విలువలు కనుక్కోండి.

(iv)106×94 (v) 592×608 (vi) $92^2 - 8^2$ (vii) $984^2 - 16^2$లను సూక్ష్మీకరించండి.

ఉదాహరణ 15: 302×308 విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $302 \times 308 = (300+2)(300+8)$

$= 300^2 + (2+8)(300) + (2)(8)$

$= 90000 + (10 \times 300) + 16$

$= 90000 + 3000 + 16 = 93016$

సర్వసమీకరణం $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$, $x = 300, a = 2, b = 8$ అయినపుడు

ఉదాహరణ16: 93×104 విలువను కనుగొనుము.

సర్వసమీకరణం $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$, $x = 100$ $a = -7$, $b = 4$ అయినపుడు

సాధన:

$93 \times 104 = (100 + (-7))(100 + 4)$

$93 \times 104 = (100 - 7)(100 + 4)$

$= 100^2 + (-7 + 4)(100) + (-7)(4)$

$= 10000 + (-3)(100) + (-28)$

$= 10000 - 300 - 28$

$= 10000 - 328 = 9672$

మీరు గమనించారా ? నేరుగా సంఖ్యలను గుణించే కన్నా
ప్రత్యేక లబ్ధాలనుపయోగించడం వల్ల సులభమవుతుంది కదా!

అభ్యాసము - 11.4

1. క్రింది సమస్యలకు తగిన "సర్వసమీకరణాలను" (Identities) సూచించండి, లబ్ధము కనుక్కోండి.

(i) $(3k + 4l)(3k + 4l)$ (ii) $(ax^2 + by^2)(ax^2 + by^2)$

(iii) $(7d - 9e)(7d - 9e)$ (iv) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$

(v) $(3t + 9s)(3t - 9s)$ (vi) $(kl - mn)(kl + mn)$

(vii) $(6x + 5)(6x + 6)$ (viii) $(2b - a)(2b + c)$

2. కింది వాటిని తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి విలువలను కనుగొనండి.

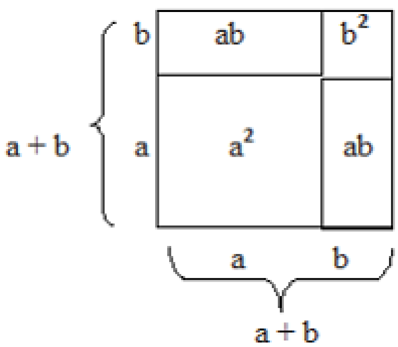
(i) 304^2 (ii) 509^2 (iii) 992^2 (iv) 799^2

(v) 304×296 (vi) 83×77 (vii) 109×108 (viii) 204×206

11.10 సర్వసమీకరణాలను జ్యామితీయంగా సరిచూచుట

11.10.1 క్రింది చతురస్రాన్ని పరిశీలించండి. $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

ఉదాహరణ



$(a + b)$ భుజంగా గల ఒక చతురస్రాన్ని తీసుకొండి.

దాని వైశాల్యం = భుజం యొక్క వర్గం = $(\mathbf{a + b})^2$

చతురస్రంను పటంలో చూపినట్లు నాలుగు భాగాలుగా విభజింపబడ్డాయి.

ఇందులో రెండు వర్గాలు a, b భుజాలు కలిగిన రెండు చతురస్రాలు, పొడవు 'a', వెడల్పు 'b' గా కల రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు కలవు.

చతురస్రవైశాల్యం, 4 భాగాల వైశాల్యముల మొత్తమునకు సమానము.

ఇచ్చిన చతురస్రవైశాల్యం

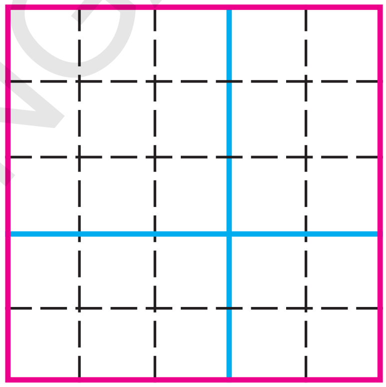
= భుజం a పొడవు గల చతురస్రవైశాల్యం + a, b లు భుజాలుగా కల దీ॥చ॥వై + a, b లు భుజాలుగా గల దీ॥చ॥వై. + 'b' భుజాలుగా కల చతురస్ర వైశాల్యం.

= $a^2 + ab + ba + b^2$

= $a^2 + 2ab + b^2$

కావున, $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

ఉదాహరణ17: $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ సర్వ సమీకరణంను జ్యామితీయంగా $a = 3, b = 2$ విలువలకు సరిచూడండి.



సాధన : $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

$a + b$ భుజంపొడవు అంటే $3 + 2$

ఉండేట్లు ఒక చతురస్రాన్ని గీయండి.

$= (3 + 2)^2 = 5^2 = 25$

R.H.S. = 3 యూనిట్లు భుజంగా గల చతురస్ర వైశాల్యం +
2 యూనిట్లు భుజంగా గల చతురస్రవైశాల్యం +
3 యూనిట్లు పొడవు 2 యూనిట్లు వెడల్పుగా గల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం +
2 యూనిట్లు పొడవు, 3 యూనిట్లు వెడల్పుగా గల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

= $3^2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$

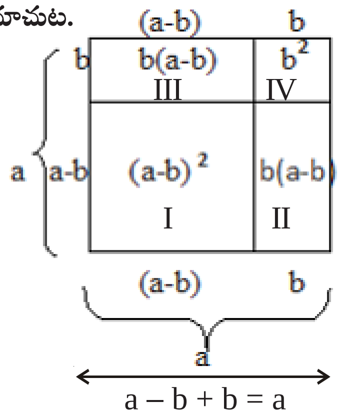
= $9 + 4 + 6 + 6 = 25$

L.H.S. = R.H.S.

$\therefore$ కావున సర్వసమానత (Identity) సరిచూబడింది.

> సర్వసమీకరణాన్ని "సమానత" అని కూడా అంటాము.

11.10.2 $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ సర్వసమానతను జ్యామితీయంగా సరిచూచుట.



'a' భుజము కొలతగా కల ఒక చతురస్రము తీసుకొనుము..

- చతురస్రవైశాల్యము = భు × భు = a^2
- ఈ చతురస్రం నాలుగు భాగాలుగా చేయబడింది.
- ఇది $(a - b)$, b భుజాలుగా కల రెండు చతురస్రాలు '$a - b$', 'b' భుజాలుగా కల రెండు దీ॥చ॥కలవు.

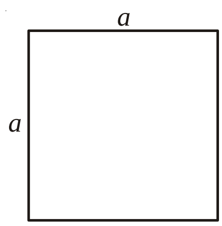
ఇప్పుడు Iవ ప్రాంత వైశాల్యం = సంపూర్ణ చతురస్ర వైశాల్యం (భుజం పొడవు ‘a’) –
ప్రాంతం II వైశాల్యం – ప్రాంతం III వైశాల్యం – ప్రాంతం IV వైశాల్యం

$$(a-b)^2 = a^2 - b\,(a-b) - b\,(a-b) - b^2$$
$$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

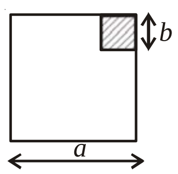
11.10.3 $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ సర్వసమానాలుకు జ్యామితీయంగా సరిచూడడం

$a^2 - b^2$ = భుజం పొడవు ‘a’గా గల చతురస్ర వైశాల్యం – భుజం పొడవు ‘b’గా గల చతురస్ర వైశాల్యం

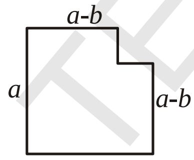
ప్రక్క చతురస్రాన్ని పరిశీలించండి.



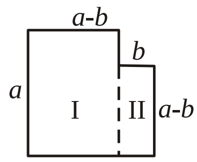
b భుజము పొడవు గల చతురస్రాన్ని ఒక మూల నుండి తొలగించాలి. $(b < a)$



తొలగిస్తే



దీనిలో రెండు భాగాలు కలవు.



కావున $a^2 - b^2$ = Iవ పట వైశాల్యం + IIవ పట వైశాల్యం

$$= a\,(a - b) + b\,(a - b)$$
$$= (a - b)\,(a + b)$$

అందుచే $a^2 - b^2 \equiv (a - b)\,(a + b)$ అయినది.

అభ్యాసము - 11.5

1. $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ ను జ్యామితీయంగా a, b ల క్రింది విలువలకు సరిచూడండి.

   (i) $a = 2$ యూనిట్లు, $b = 4$ యూనిట్లు

   (ii) $a = 3$ యూనిట్లు, $b = 1$ యూనిట్లు

   (iii) $a = 5$ యూనిట్లు, $b = 2$ యూనిట్లు

2. $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ ను జ్యామితీయంగా a, b ల క్రింది విలువలకు సరిచూడండి.

(i) $a = 3$ యూనిట్లు, $b = 1$ యూనిట్లు

(ii) $a = 5$ యూనిట్లు, $b = 2$ యూనిట్లు

3. $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ ను జ్యామితీయంగా a, b ల క్రింది విలువలకు సరిచూడండి.

(i) $a = 3$ యూనిట్లు, $b = 2$ యూనిట్లు

(ii) $a = 2$ యూనిట్లు, $b = 1$ యూనిట్లు

మనం ఏమి చర్చించాం

1. బీజీయ సమాసాలను గుణించడం ఎన్నో గణనీయమైన సందర్భాల్లో అవసరమవుతాయి. ఉదా: భుజాలు సమాసాల రూపంలో ఉన్నపుడు దీ.చ.వైశాల్యాలు.
2. ఏకపదిని మరొక ఏకపదిచే గుణించగా లబ్ధం ఏకపది వచ్చును.
3. ఒక బహుపదిని ఏకపదిచే గుణించాలంటే, ఏకపదిలోని ప్రతి పదంతో బహుపదిలోని అన్ని పదాలను గుణించాలి.
4. ద్విపది లేదా త్రిపదిచే బహుపదిని గుణించేటప్పుడు పదం వెంబడి పదం (అనగా ద్వి లేదా త్రిపదిలోని ప్రతీపదంతో బహుపదిలోని ప్రతీ పదాన్ని గుణించాలి). లబ్ధంలోని పదాల్లో కొన్ని సజాతి పదాలు ఉండచ్చు. వాటిని కూడాలి.
5. సర్వసమానత్వం అనునది ఒక సమానత. సమీకరణంలోని సమానత్వం, చరరాశిలోని అన్ని విలువలకు సత్యమైనపుడు సర్వసమానత్వం అవుతుంది. ఇంకోవైపు సమీకరణం కొన్ని విలువలకే సత్యం అయితే సర్వసమానత్వంలో అన్ని విలువలకు సత్యం అవుతాయి. అన్ని సమీకరణాలు, సర్వసమీకరణాలు కాదు.
6. సర్వసమీకరణములు :

   I. $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

   II. $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

   III. $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$

   IV. $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$
7. సర్వసమీకరణాల బీజీయ సమస్యల గుణకారముల యందు ఉపయోగపడును. సంఖ్యల లబ్ధములు కనుగొనుటకు సులభమైన పద్ధతుల ద్వారా గణించుటకు ఉపయోగపడును.

అధ్యాయం **12**

కారణాంక విభజన

12.0 పరిచయము

42 సంఖ్యను తీసుకోండి. '42' ను రెండు సంఖ్యల లబ్ధముగా వ్యక్తపరచండి.

$$42 = 1 \times 42$$
$$= 2 \times 21$$
$$= 3 \times 14$$
$$= 6 \times 7$$

అందుచే 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 మరియు 42 లు, 42 యొక్క కారణాంకములు, పై కారణాంకములలో ఏ సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు ?

42 ను ప్రధానసంఖ్యల లబ్ధముగా వ్యక్తపరచగలమా? ప్రయత్నించండి.

రఫీ ఈవిధముగా చేసాడు	శిరీష ఈవిధముగా చేసింది	అక్బరు ఈవిధంగా చేసాడు.
$42 = 2 \times 21$ $= 2 \times 3 \times 7$	$42 = 3 \times 14$ $= 2 \times 3 \times 7$	$42 = 6 \times 7$ $= 2 \times 3 \times 7$

మీరు ఏమి గమనించారు? మూడు పద్ధతులలోను $2 \times 3 \times 7$ గా కారణాంకాల లబ్ధముగా వచ్చినది.

ఇప్పుడు మరో సంఖ్య '70'ని గమనిద్దాం.

$$70 = 1 \times 70$$
$$= 2 \times 35$$
$$= 5 \times 14$$
$$= 7 \times 10$$

1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 మరియు 70 లు 70 యొక్క కారణాంకములు

70 ని $2 \times 5 \times 7$ గా ప్రధానసంఖ్యల లబ్ధముగా వ్యక్తపరచవచ్చు.

ఒక సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా వ్యక్తపరిచే పద్ధతి 'ప్రధాన కారణాంక విభజన పద్ధతి' అంటారు.

ఇవి చేయండి.

ఈ క్రింది వాటిని ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా వ్యక్తపరుచుము.

(i) 48 (ii) 72 (ii) 96

సంఖ్యలను వాటి కారణాంకము లబ్ధముగా రాసిన విధంగానే బీజీయ సమాసాలను కూడా వాటి కారణాంకముల లబ్ధంగా రాయవచ్చు.

12.1 బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజన

ఈ ఉదాహరణను పరిశీలింపుము.

$7yz = 7(yz)$ (7 మరియు yz కారణాంకములు)

$= 7y(z)$ ($7y$ మరియు z కారణాంకములు)

$= 7z(y)$ ($7z$ మరియు y కారణాంకములు)

$= 7 \times y \times z$ ($7, y$ మరియు z కారణాంకములు)

బీజీయ సమాసాలను కారణాంకముల లబ్ధముగా రాయవచ్చునని మనకు తెలుసు. $7, y, z$ లు $7yz$ యొక్క అవిభాజ్య కారణాంకములు. ఇందులో "అవిభాజ్య కారణాంకములు" అను పదము ప్రధాన కారణాంకాలు "అనుదానికి బదులుగా ఉపయోగించబడినది. అందుచే $7 \times y \times z$ అనేది $7yz$ యొక్క అవిభాజ్య కారణాంక రూపమని చెప్పవచ్చు. $7 \times (yz)$ లేదా $7y(z)$ లేదా $7z(y)$ లు అవిభాజ్య రూపములు కావు.

> $7yz = 1 \times 7 \times y \times z$ కనుక 1, $7yz$ నకు ఒక కారణాంకము. 1, ప్రతిసంఖ్యకు కారణాంకం కాని అవసరమనయినపుడు మాత్రమే '1' ని ఒక కారణాంకముగా చూపాలి

$7y(z+3)$బీజీయ సమాసమును తీసుకొందాం.

$7y\,(z + 3) = 7 \times y \times (z+3)$ ఇక్కడ $7, y, (z + 3)$ లు అవిభాజ్య కారణాంకములు.

అదేవిధముగా $5x\,(y+2)\,(z+3) = 5 \times x \times (y + 2) \times (z + 3)$ ఇచ్చట $5, x, (y + 2), (z + 3)$ లు అవిభాజ్య కారణాంకములు.

ఇవి చేయండి.

1. ఈ క్రింది బీజీయ సమాసము యొక్క కారణాంకములు కనుక్కోండి.

(i) $8x^2yz$ (ii) $2xy\,(x + y)$ (iii) $3x + y^3z$

12.2 కారణాంక విభజన ఆవశ్యకత

ఒక బీజీయ సమాసము యొక్క కారణాంక విభజన జరిగితే దానిని కారణాంకముల లబ్ధముగా రాయవచ్చు. కారణాంకములు సంఖ్యలు, బీజీయ చరరాశులు లేదా బీజీయ సమాసాలు కావచ్చు.

బీజీయ సమాసము $23a + 23b + 23c$ ను తీసుకొందాం.

$23a + 23b + 23c = 23(a + b + c)$ గా రాయవచ్చు.

అనగా 23 మరియు $a + b + c$ లు కారణాంకములు. ఇందులో 23 సంఖ్యాకారణాంకము మరియు $(a + b + c)$ బీజీయ కారణాంకము.

ఇప్పుడు బీజయ సమాస కారణాంక విభజన పద్ధతులను గూర్చి చర్చిద్దాం.

క్రింది బీజీయ సమాసములు తీసుకొనుము. (i) $x^2y + y^2x + xy$ (ii) $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$.

మొదటి సమానమును $x^2y + y^2x + xy = xy(x + y + 1)$ గా వ్రాయవచ్చును.

రెండవ సమాసము $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$

$$\frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{(2x)^2 - (1)^2}{2x - 1}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)}$$

$= (2x + 1)$ గా సూక్ష్మీకరించవచ్చు.

పై ఉదాహరణల నుండి బీజీయ సమాసములను సూక్ష్మీకరించుటకు, సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయుటకు కారణాకం విభజన సహాయపడునని తెలియుచున్నది.

ఇప్పుడు కొన్ని బీజీయ సమాసములను కారణాంకముల లబ్ధముగా రాయుట చర్చిద్దాము.

12.3 సామాన్య కారణాంకముల పద్ధతి

$3x + 12$ను కారణాంక విభజన చేద్దాం.

ప్రతీ పదమును అవిభాజ్య కారణాంకముల లబ్ధముగా రాస్తే

$3x + 12 = (3 \times x) + (2 \times 2 \times 3)$గా వస్తుంది.

రెండింటి యొక్క ఉమ్మడి కారణాంకము ఏమిటి?

3 ను ఉమ్మడి లేదా సామాన్య కారణాంకముగా తీసుకొంటే

$3 \times [x + (2\times2)] = 3 \times (x + 4) = 3\,(x + 4)$

$3x + 12$ మరియు $3\,(x + 4)$ ఒకే సమాసమును సూచిస్తాయి.

3, $(x + 4)$ లు $3x + 12$ యొక్క కారణాంకములు. మీరు గమనిస్తే అన్ని కారణాంకముల అవిభాజ్యకారణాంకములు.

$6ab+12b$ ను కారణాంక విభజన చేద్దాం.

$6ab+12b = (\underline{\mathbf{2} \times \mathbf{3}} \times a \times \underline{\mathbf{b}}) + (2 \times \underline{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{b}})$

$= \underline{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{b}} \times (a + 2) \quad = 6b\,(a + 2)$

$6ab$, $12b$ ల గ.సా.భా $6b$

$\therefore\ 6ab + 12b = 6b\,(a + 2)$

ఉదాహరణ 1: కారణాంక విభజన చేయండి. (i) $6xy + 9y^2$ (ii) $25\,a^2b + 35ab^2$

సాధన: (i) $6xy + 9y^2$

$6\,x\,y = 2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}$ మరియు $9y^2 = 3 \times \underline{3 \times y} \times y$

3 మరియు 'y' లు రెండు పదముల యొక్క సామాన్య కారణాంకములు.

అందుచే, $6xy + 9y^2$

$= (2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}) + (3 \times \underline{3 \times y} \times y)$

$= \underline{3 \times y} \times [(2 \times x) + (3 \times y)]$

$\therefore 6xy + 9y^2 = 3y(2x + 3y)$

(ii) $25a^2b + 35ab^2 = (5 \times \underline{5} \times a \times \underline{a \times b}) + (\underline{5} \times 7 \times \underline{a \times b} \times b)$

$= \underline{5 \times a \times b} \times [(5 \times a) + (7 \times b)]$

$= 5ab(5a + 7b)$

$\therefore 25a^2b + 35ab^2 = 5ab(5a + 7b)$

ఉదాహరణ 2: $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$ కారణాంకములుగా విభజింపుము.

$3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = (\underline{3 \times x} \times x) + (2 \times \underline{3 \times x} \times x \times y) + (3 \times \underline{3 \times x} \times y \times y)$

$= \underline{3 \times x}[x + (2 \times x \times y) + (3 \times y \times y)]$

$= 3x(x + 2xy + 3y^2)$ (3 × x ను ఉమ్మడి కారణాంకరాశిగా తీసుకొనగా)

$\therefore 3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = 3x(x + 2xy + 3y^2)$

ఇవి చేయండి.

కారణాంక విభజన చేయండి. (i) $9a^2 - 6a$ (ii) $15a^3b - 35ab^3$ (iii) $7lm - 21lmn$

12.4 పదాలను అనువైన సమూహాలను చేయటము ద్వారా కారణాంకవిభజన చేయుట.

$ax + bx + ay + by$ సమాసమును పరిశీలించండి. మొదటి రెండు పదాలు 'x'ను సామాన్యకారణాంకముగా, చివరి రెండు పదాలు 'y'ను సామాన్య కారణాంకముగా కల్గియున్నాయి. నాల్గు పదాలు ఒకేసామాన్య కారణాంకము కల్గిలేవు.

అందుచే $(ax + bx) + (ay + by)$ అను రెండు గ్రూపులుగా చేస్తే

$(ax + bx) + (ay + by) = x(a+b) + y(a+b)$ గా రాయుము (ప్రతి పదములోని ఉమ్మడి కారణ రాశులను తీసుకొనగా)

$= (a+b)(x+y)$ గా రాయవచ్చు. (ప్రతి పదములోని ఉమ్మడి కారణారాశులను తీసుకొనిగా)

$ax + bx + ay + by$ ను $(a+b), (x+y)$ ల లబ్ధముగా రాయవచ్చు.

అనగా $(a+b), (x+y)$ లు కారణాంకములుగా చెప్పవచ్చు.

దీనిని మరో విధంగా కారణాంక విభజన చేయుము.

$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$

$= a(x + y) + b(x + y)$

$= (x + y)(a + b)$

ఇవి చేయండి.

కారణాంక విభజన చేయండి. (i) $5xy + 5x + 4y + 4$ (ii) $3ab + 3a + 2b + 2$

ఉదాహరణ 3: $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ ను కారణాంక విభజన చేయాలి.

సాధన : సోపానము 1: మొదటి రెండు పదాలకు b మరియు చివరి రెండు పదాలకు $2c$ సామాన్య కారణాంకములుగా ఉండుట గమనించుము.

సోపానము 2: మొదటి రెండు పదాలను సమూహముగా చేస్తే,

$6ab - b^2 = b(6a - b)$ ———I

చివరి రెండు పదాలను సమూహముగా చేస్తే $12ac - 2bc$.

కావున $12ac - 2bc = 2c(6a - b)$ ———II

సోపానము 3: I, II సోపానములు కలిపి

$6ab - b^2 - 2bc + 12ac = b(6a - b) + 2c(6a - b)$

$= (6a - b)(b + 2c)$ — ($6a - b$) ను ఉమ్మడి కారణ రాశిగా తీసుకొనగా

$6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ యొక్క కారణాంకములు $(6a - b)$ మరియు $(b + 2c)$

అభ్యాసము - 12.1

1. ఈ క్రింద ఇచ్చిన పదముల యొక్క సామాన్య కారణాంకములు కనుక్కోండి.

   (i) $8x, 24$ (ii) $3a, 21ab$ (iii) $7xy, 35x^2y^3$ (iv) $4m^2, 6m^2, 8m^3$

   (v) $15p, 20qr, 25rp$ (vi) $4x^2, 6xy, 8y^2x$ (vii) $12x^2y, 18xy^2$

2. ఈ క్రింది వాటిని కారణాంక విభజన చేయండి.

   (i) $5x^2 - 25xy$ (ii) $9a^2 - 6ax$ (iii) $7p^2 + 49pq$

   (iv) $36a^2b - 60a^2bc$ (v) $3a^2bc + 6ab^2c + 9abc^2$

   (vi) $4p^2 + 5pq - 6pq^2$ (vii) $ut + at^2$

3. ఈ క్రింది వాటికి కారణాంక విభజన చేయండి.

   (i) $3ax - 6xy + 8by - 4ab$ (ii) $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

   (iii) $m^2 - mn + 4m - 4n$ (iv) $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ (v) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

12.5 సర్వసమానత్వములను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన చేయుట

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$$

ఇచ్చిన బీజీయ సమాసములు పై సర్వసమానత్వములలోని కుడివైపున గల పదముల రూపంలో ఉన్నప్పుడు, పై సర్వసమానత్వములు ఉపయోగించవచ్చు. అటువంటి ఉదాహరణలు కొన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 4: $x^2 + 10x + 25$ కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమాసములో మొదటి, మూడవ పదాలు పరిపూర్ణ వర్గములు, మధ్యపదము ధన సంజ్ఞను కల్గియుంది. అందుచే ఈ సమాసమును $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$ సర్వసమానత్వమునుపయోగించి సాధన చేయచ్చు. ఆ సమాసంను $a^2 + 2ab + b^2$ రూపంలో వ్రాయవచ్చును.

$$x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2$$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ తో పోల్చి చూస్తే $a = x$ మరియు $b = 5$

$$\therefore \; x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$$

ఉదాహరణ 5: $16z^2 - 48z + 36$ ను కారణాంకములుగా విభజించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమాసము నుండి ఉమ్మడి సంఖ్యాత్మక కారణాంకములు తీసుకొనగా

$$16z^2 - 48z + 36 = (4 \times 4z^2) - (4 \times 12z) + (4 \times 9) = 4(4z^2 - 12z + 9)$$

$4z^2 = (2z)^2$; $9 = (3)^2$ అని గమనించండి. మరియు $12z = 2(2z)(3)$

$$4z^2 - 12z + 9 = (2z)^2 - 2(2z)(3) + (3)^2 \quad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$$
$$= (2z - 3)^2$$

పోల్చిచూస్తే, $16z^2 - 48z + 36 = 4(4z^2 - 12z + 9) = 4(2z - 3)^2$
$$= 4(2z - 3)(2z - 3)$$

ఉదాహరణ 6: $25p^2 - 49q^2$ ను కారణాంకములుగా విభజించండి.

సాధన : ఈ సమాసములో రెండు పదాల పరిపూర్ణ వర్గములు మరియు రెండవ పదము ఋణసంజ్ఞను కల్గియుంది. కనుక $a^2 - b^2$ సర్వసమానత్వము నుపయోగించి రాయవచ్చు.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$25p^2 - 49q^2 = (5p)^2 - (7q)^2$$
$$= (5p + 7q)(5p - 7q) \; [\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$
$$\therefore \; 25p^2 - 49q^2 = (5p + 7q)(5p - 7q)$$

ఉదాహరణ 7: $48a^2 - 243b^2$ కారణాంకములుగా విభజించండి.

సాధన : రెండు పదములు ఖచ్చితమైన పరిపూర్ణ వర్గములు కావు. కాని రెండు పదములకు '3' ఒక ఉమ్మడి కారణరాశి.

$$48a^2 - 243b^2 = 3\,[16a^2 - 81b^2]$$
$$= 3\,[(4a)^2 - (9b)^2] \quad [a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ కావున}]$$
$$= 3\,[\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)]$$
$$= 3\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)$$

ఉదాహరణ 8: $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$ కారణాంకములుగా విభజించండి.

సాధన: ఇందు మొదటి మూడు పదములు $(x + y)^2$ రూపంలో కలవు. నాలుగవ పదము పరిపూర్ణ వర్గము.

కావున $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x + y)^2 - (2z)^2$

$= [(x + y) + 2z]\,[(x + y) - 2z]$

$= (x + y + 2z)\,(\,x + y - 2z)$

$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)}$

ఉదాహరణ 9: $p^4 - 256$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: $p^4 = (p^2)^2$ మరియు $256 = (16)^2$

$$p^4 - 256 = (p^2)^2 - (16)^2$$
$$= (p^2 - 16)\,(\,p^2 + 16\,)$$

$\boxed{\text{మరల } p^2 - 16 = (p+4)\,(p-4)}$

$$= (p+4)\,(p-4)\,(\,p^2 + 16\,)$$

12.6 (x + a) (x + b) = x² + (a + b)x + ab రూపములో ఉన్న సమాస కారణాంక విభజన

$x^2 + 12x + 35$, $x^2 + 6x - 27$, $a^2 - 6a + 8$, $3y^2 + 9y + 6$.... మొదలగు సమాసములను ముందు ఉపయోగించిన మూడు సర్వసమానత్వములనుపయోగించి కారణాంక విభజన చేయలేము. దీనికి గల కారణము స్థిరపదములు పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యలు కావు.

$x^2 + 12x + 35$ ను తీసుకొని $x^2 + (a + b)x + ab$తో పోల్చిన

35 ను రెండు కారణాంకాల లబ్దంగా విభజిస్తూ ఆ రెండు కారణాంకాలను కలిపితే 12 వచ్చేటట్లు ఉండాలి.

స్థిరరాశిని రెండు కారణరాశుల లబ్ధముగా సాధ్యమైన అన్ని విధాలుగా తీసుకొనుము.

35	$= 1 \times 35$	$1 + 35 = 36$
	$= (-1) \times (-35)$	$-1 - 35 = -36$
	$= 5 \times 7$	$5 + 7 = 12$
	$= (-5) \times (-7)$	$-5 - 7 = -12$

ఏ రెండు కారణాంకాల (జంట) మొత్తము మధ్యపదము యొక్క గుణకము అగుచున్నది? అది ఖచ్చితంగా $5 + 7 = 12$.

$\therefore\ x^2 + 12x + 35 = x^2 + (5+ 7)\, x + 35$

$= x^2 + 5x + 7x + 35$ $\quad (\because\ 12x = 5x + 7x)$

$= x\,(x + 5) + 7\,(x + 5)$ $\quad$ (ఉమ్మడి కారణరాశులు తీసుకొనగా)

$= (x + 5)\,(x + 7)$ $\quad$ [$(x + 5)$ ఉమ్మడి కారణరాశిగా తీసుకొనగా)]

పై ఉదాహరణననుసరించి $x^2 + (a + b)\, x + ab$ ను $(x + a)\,(x + b)$గా రాయవచ్చునని గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ 10: $m^2 - 4m - 21$ కారణాంక విభజన చేయాలి.

సాధన: $m^2 - 4m - 21$ ను $x^2 + (a + b)\, x + ab$ సర్వసమానత్వముతో పోల్చగా

$ab = -21$, మరియు $a+b = -4$. కావున $(-7) + 3 = -4$ మరియు $(-7)(3) = -21$

-21 యొక్క కారణాకములు	మరియు వాటి మొత్తం
$-1 \times 21 = -21$	$-1 + 21 = 20$
$1 \times (-21) = -21$	$1 - 21 = -20$
$\boxed{-7 \times 3 = -21}$	$\boxed{-7 + 3 = -4}$
$-3 \times 7 = -21$	$-3 + 7 = 4$

కావున $m^2 - 4m - 21 = m^2 - 7m + 3m - 21$

$= m\,(m - 7) + 3\,(m - 7)$

$= (m - 7)\,(m + 3)$

$\therefore\ m^2 - 4m - 21 = (m - 7)\,(m + 3)$

ఉదాహరణ 11: $4x^2 + 20x - 96$ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: 4 సామాన్యకారణాంకముగా గుర్తించవచ్చు.

$4x^2 + 20x - 96 = 4\,[x^2 + 5x - 24]$

$x^2 + 5x - 24$

$= x^2 + 8x - 3x - 24$

$= x\,(x + 8) - 3(x + 8)$

$= (x + 8)(x - 3)$

$\therefore\ 4x^2 + 20x - 96 = 4(x + 8)(x - 3)$

-24 యొక్క కారణాకములు	మరియు వాటి మొత్తం
$-1 \times 24 = -24$	$-1 + 24 = 23$
$1 \times (-24) = -24$	$1 - 24 = -23$
$-8 \times 3 = -24$	$3 - 8 = -5$
$\boxed{-3 \times 8 = -24}$	$\boxed{-3 + 8 = 5}$

అభ్యాసము - 12.2

1. ఈ క్రింది సమాసాలను కారణాంకములుగా విభజించండి

(i) $a^2 + 10a + 25$ $\quad$ (ii) $l^2 - 16l + 64$ $\quad$ (iii) $36x^2 + 96xy + 64y^2$

(iv) $25x^2 + 9y^2 - 30xy$ $\quad$ (v) $25m^2 - 40mn + 16n^2$

(vi) $81x^2 - 198\,xy + 121y^2$ $\quad$ (vii) $(x+y)^2 - 4xy$ $\quad$ (సూచన : మొదట$(x + y)^2$విస్తరించండి)

(viii) $l^4 + 4l^2m^2 + 4m^4$

2. ఈ క్రింది వాటిని కారణాంకములుగా విభజించండి.

(i) $x^2 - 36$ (ii) $49x^2 - 25y^2$ (iii) $m^2 - 121$

(iv) $81 - 64x^2$ (v) $x^2y^2 - 64$ (vi) $6x^2 - 54$

(vii) $x^2 - 81$ (viii) $2x - 32x^5$ (ix) $81x^4 - 121x^2$

(x) $(p^2 - 2pq + q^2) - r^2$ (xi) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

3. ఈ క్రింది సమాసాలను కారణాంకములుగా విభజించండి.

(i) $lx^2 + mx$ (ii) $7y^2 + 35Z^2$ (iii) $3x^4 + 6x^3y + 9x^2Z$

(iv) $x^2 - ax - bx + ab$ (v) $3ax - 6ay - 8by + 4bx$ (vi) $mn + m + n + 1$

(vii) $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$ (viii) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$ (ix) $x(y+z) - 5(y+z)$

4. ఈ క్రింది వాటిని కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $x^4 - y^4$ (ii) $a^4 - (b+c)^4$ (iii) $l^2 - (m - n)^2$

(iv) $49x^2 - \frac{16}{25}$ (v) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ (vi) $4(a+b)^2 - 9(a - b)^2$

5. ఈ క్రింది వాటిని కారణాంకములుగా విభజించండి.

(i) $a^2 + 10a + 24$ (ii) $x^2 + 9x + 18$ (iii) $p^2 - 10p + 21$ (iv) $x^2 - 4x - 32$

6. $x^2 + 3xy + x + my - m$ ను x, y లలో రెండు రేఖీయ కారణాంకములుగా వ్రాసిన 'm' విలువ కనుగొనుము. (x, y పదాలను గుణకములు పూర్ణసంఖ్యలు)

12.7 బీజీయ సమాసాల భాగాహారం

భాగహారము, గుణకారము యొక్క విలోమ ప్రక్రియ అని మనకు తెలుసు.

$3x \times 5x^3 = 15x^4$ ను తీసుకొందాం.

అందుచే $15x^4 \div 5x^3 = 3x$ మరియు $15x^4 \div 3x = 5x^3$

$6a(a + 5) = (6a^2 + 30a)$

అందుచే $(6a^2 + 30a) \div 6a = a + 5$

మరియు $(6a^2 + 30a) \div (a+5) = 6a$.

12.8 ఒక ఏకపదిని మరొక ఏకపదిచే భాగాహారం

$24x^3 \div 3x$ ను తీసుకొందాం.

$\therefore\ 24x^3 \div 3x$

$$= \frac{2\times2\times2\times3\times x\times x\times x}{3\times x}$$

$$= \frac{(3\times x)(2\times2\times2\times x\times x)}{(3\times x)} = 8x^2$$

ఉదాహరణ 12: ఈ క్రింది భాగాహారమును చేయండి.

(i) $70x^4 \div 14x^2$ (ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$

సాధన : (i) $70x^4 \div 14x^2 = \dfrac{2\times5\times7\times x\times x\times x\times x}{2\times7\times x\times x}$

$= \dfrac{5\times x\times x}{1}$

$= 5x^2$

(ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz = \dfrac{4\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z}{12\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{1}{3}x^2y^2z^2$

12.9 ఒక సమాసమును ఏకపదితో భాగహారము చేయుట

త్రిపది యొక్కభాగాహారమును తీసుకొందాం.

$6x^4+10x^3+8x^2$ ను ఏకపది $2x^2$ చే భాగిద్దాం.

$6x^4 + 10x^3 + 8x^2 = [2 \times 3 \times x \times x \times x \times x] + [2 \times 5 \times x \times x \times x] + [2 \times 2 \times 2 \times x \times x]$

$= \underline{(2x^2)}\,(3x^2) + \underline{(2x^2)}\,(5x) + \underline{2x^2}\,(4)$

$\because$ $2x^2$ సామాన్య కారణాంకము

$= 2x^2\,[3x^2 + 5x + 4]$

అందుచే $(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4+10x^3+8x^2}{2x^2} = \dfrac{2x^2(3x^2+5x+4)}{2x^2}$

$= (3x^2 + 5x + 4)$

ప్రత్యామ్నాయముగా సమాసములోని ప్రతీపదమును ఏకపదిచే భాగించి సామాన్య కారణాంకములనుకొట్టివేద్దాం.

$(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4}{2x^2} + \dfrac{10x^3}{2x^2} + \dfrac{8x^2}{2x^2}$

ఇచ్చట సమాసములోని ప్రతిపదమును ఏకపదిచే భాగిద్దాం.

$= 3x^2 + 5x + 4$

ఉదాహరణ 13: $30(a^2bc + ab^2c + abc^2)$ ను $6abc$ చే భాగింపుము.

సాధన : $30(a^2bc + ab^2c + abc^2)$

$= 2 \times 3 \times 5\,[(a \times a \times b \times c) + (a \times b \times b \times c) + (a \times b \times c \times c)]$

$= 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c\ (a + b + c)$

అందుచే $30(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{2\times3\times5\times abc(a+b+c)}{2\times3\times abc}$$

$= 5(a + b + c)$

ప్రత్యామ్నాయంగా $30(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{30a^2bc}{6abc} + \frac{30ab^2c}{6abc} + \frac{30abc^2}{6abc}$$

$= 5a + 5b + 5c$

$= 5(a + b + c)$

12.10 ఒక సమాసమును మరో సమాసముచే భాగించుట

$(3a^2 + 21a) \div (a+7)$ను తీసుకొందాం.

ముందుగా $3a^2 + 21a$ ను కారణాంక విభజన చేద్దాం.

$$(3a^2 + 21a) \div (a+7) = \frac{3a^2 + 21a}{a+7}$$

$$= \frac{3a(a+7)}{a+7} = 3a$$

$= 3a$

ఉదాహరణ 14: $39y^3(50y^2 - 98)$ ను $26y^2(5y+7)$ చే భాగింపుము.

సాధన : $39y^3(50y^2 - 98) = 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [2\,(25y^2 - 49)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y)^2 - (7)^2]$ $\quad \boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y + 7)\ (5y - 7)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times (5y + 7)(5y - 7)$

అదేవిధంగా $26y^2(5y + 7) = 2 \times 13 \times y \times y \times ((5y + 7)$

$$\therefore \quad [\,39y^3(50y^2-98)\,] \div [\,26y^2(5y+7)\,]$$

$$= \frac{[2\times3\times13\times y\times y\times y(5y+7)(5y-7)]}{[2\times13\times y\times y\times(5y+7)]}$$

$$= 3y\,(5y-7)$$

ఉదాహరణ 15: $m^2-14m-32$ ను $m+2$ చే భాగింపుము

సాధన :

$$\begin{aligned} m^2-14m-32 &= m^2-16m+2m-32 \\ &= m(m-16)+2(m-16) \\ &= (m-16)(m+2) \\ (m^2-14m-32)\div(m+2) &= (m-16)(m+2)\div(m+2) \\ &= (m-16) \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 16: $42(a^4-13a^3+36a^2)$ ను $7a(a-4)$ చే భాగింపుము

సాధన :

$$\begin{aligned} 42(a^4-13a^3+36a^2) &= 2\times3\times7\times a\times a\times(a^2-13a+36) \\ &= 2\times3\times7\times a\times a\times(a^2-9a-4a+36) \\ &= 2\times3\times7\times a\times a\times[a(a-9)-4(a-9)] \\ &= 2\times3\times7\times a\times a\times[(a-9)(a-4)] \\ &= 2\times3\times7\times a\times a\times(a-9)(a-4) \\ 42(a^4-13a^3+36a^2)\div7a(a-4) &= 2\times3\times7\times a\times a\times(a-9)(a-4)\div7a(a-4) \\ &= 6a\,(a-9) \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 17: $x(3x^2-108)$ ను $3x(x-6)$ చే భాగింపుము.

సాధన :

$$\begin{aligned} x(3x^2-108) &= x\times[\,3(x^2-36)] \\ &= x\times[\,3(x^2-6^2)] \\ &= x\times[3(x+6)(x-6)] \\ &= 3\times x\times[\,(x+6)(x-6)] \\ x(3x^2-108)\div3x(x-6) &= 3\times x\times[\,(x+6)(x-6)]\div3x(x-6) \\ &= (x+6) \end{aligned}$$

అభ్యాసము - 12.3

1. ఈ క్రింది భాగహారములను చేయండి.

(i) $48a^3$ ను $6a$ తో (ii) $14x^3$ ను $42x^2$ తో (iii) $72a^3b^4c^5$ ను $8ab^2c^3$ తో
(iv) $11xy^2z^3$ ను $55xyz$ తో (v) $-54l^4m^3n^2$ ను $9l^2m^2n^2$ తో

2. ఈ క్రింది బహుపదులను ఇచ్చిన ఏకపదిచే భాగింపుము.

(i) $(3x^2 - 2x) \div x$ (ii) $(5a^3b - 7ab^3) \div ab$
(iii) $(25x^5 - 15x^4) \div 5x^3$ (iv) $(4l^5 - 6l^4 + 8l^3) \div 2l^2$
(v) $15(a^3b^2c^2 - a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3) \div 3abc$ (vi) $(3p^3 - 9p^2q - 6pq^2) \div (-3p)$
(vii) $(\frac{2}{3}a^2b^2c^2 + \frac{4}{3}ab^2c^2) \div \frac{1}{2}abc$

3. ఈ క్రింది భాగాహారములను చేయండి.

(i) $(49x - 63) \div 7$ (ii) $12x(8x - 20) \div 4(2x - 5)$
(iii) $11a^3b^3(7c - 35) \div 3a^2b^2(c - 5)$
(iv) $54lmn(l + m)(m + n)(n + l) \div 8lmn(l + m)(n + l)$
(v) $36(x + 4)(x^2 + 7x + 10) \div 9(x + 4)$ (vi) $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) \div a(a + 3)$

4. సూచించిన విధముగా భాగహారమును చేయండి.

(i) $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 3)$ (ii) $(x^2 - 8x + 12) \div (x - 6)$
(iii) $(p^2 + 5p + 4) \div (p + 1)$ (iv) $15ab(a^2 - 7a + 10) \div 3b(a - 2)$
(v) $15lm(2p^2 - 2q^2) \div 3l(p + q)$ (vi) $26z^3(32z^2 - 18) \div 13z^2(4z - 3)$

ఆలోచించు మరియు చర్చించు

బీజీయసమాసములలో విభిన్న ప్రక్రియలతో కల కొన్ని సమస్యలను కొందరు విద్యార్థులు క్రింది విధంగా చేసిరి. వారు చేసిన తప్పులను గమనించి, సరియగు సమాసములు వ్రాయండి.

1. శ్రీలేఖ ఒక సమీకరణమును ఈ క్రింది విధముగా చేసింది.

$3x + 4x + x + 2x = 90$

$9x = 90 \quad \therefore \quad x = 10$

ఈ సాధన ఇచ్చిన సమాధానము సరియైనదా?

శ్రీలేఖ ఎచ్చట తప్పుచేసింది గుర్తించగలరా?

2. అబ్రహామ్ ఈ క్రింది విధముగా చేశాడు.

$x = -4$, కావున $7x = 7 - 4 = -3$

3. జాన్ మరియు రేష్మా బీజసమాసాల గుణకారమును ఈ క్రింది విధంగా చేసారు.

జాన్	రేష్మా
(i) $3(x-4) = 3x - 4$	$3(x-4) = 3x - 12$
(ii) $(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(iii) $(2a-3)(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(iv) $(x+8)^2 = x^2 - 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$

4. హరమీత్ ఒక భాగహారమును ఈ క్రింది విధముగా చేసాడు. $(a+5) \div 5 = a+1$

శ్రీకర్ పై భాగహారమును ఈక్రింది విధముగా చేసాడు. $(a+5) \div 5 = a/5 + 1$

అతని స్నేహితురాలు రోజీ మరోవిధంగా చేసింది. $(a+5) \div 5 = a$

పై అందరిలో ఎవరు సరియైన సమాధానము ఇచ్చారో తెలుపగలరా?

అభ్యాసము - 12.4

ఈ క్రింది వాక్యాలను సరిచేయండి.

(i) $3(x-9) = 3x - 9$

(ii) $x(3x+2) = 3x^2 + 2$

(iii) $2x + 3x = 5x^2$

(iv) $2x + x + 3x = sx$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = 0$

(vi) $3x + 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 3x^2 + 4x + 7$

(viii) $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

(ix) $(2a+3)^2 = 2a^2 + 6a + 9$

(x) $x = -3$ ప్రతిక్షేపించుము.

(a) $x^2 + 7x + 12 = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 9 + 4 + 12 = 25$

(b) $x^2 - 5x + 6 = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(c) $x^2 + 5x = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = -9 - 15 = -24$

(xi) $(x-4)^2 = x^2 - 16$ (xii) $(x+7)^2 = x^2 + 49$

(xiii) $(3a + 4b)(a - b) = 3a^2 - 4a^2$ (xiv) $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 8$

(xv) $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 8$ (xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 0$

(xvii) $2x^3 + 1 \div 2x^3 = 1$ (xviii) $3x + 2 \div 3x = \dfrac{2}{3x}$

(xix) $3x + 5 \div 3 = 5$ (xx) $\dfrac{4x+3}{3} = x+1$

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఇచ్చిన సమాసమును దాని కారణాంకముల లబ్ధముగా వ్రాయటాన్ని కారణాంక విభజన అందురు.
2. సూక్ష్మీకరణ సాధ్యము కాని కారణాంకమును అవిభాజ్య కారణాంకము అందురు.
3. $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2$ మరియు $x^2 + (a + b)x + ab$ లు కారణాంక విభజన ద్వారా సర్వసమానత్వములు.
4. $x^2 + (a + b)\ x + ab$ రూపములో యున్న సమాసమును $(x + a)(x + b)$ రూపములో రాయవచ్చు.
5. భాగహారము, గుణకారము యొక్క వ్యుత్క్రమక్రియ ఈ విధానమును బీజీయ సమాసాలకు కూడా ఉపయోగించవచ్చు.

గోల్డ్‌బాక్ ఊహ :-

గోల్డ్‌బాక్ తన పరిశీలనల నుండి, "ప్రతి బేసి సంఖ్య, ప్రధానసంఖ్య గానో లేదా కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యల మొత్తంగా లేదా ప్రధాన సంఖ్య మరియు వర్గ సంఖ్యకు రెట్టింపుల మొత్తంగా ఉంటుంది" అని కనుగొన్నాడు.

ఉదాహరణకు ఒక బేసి సంఖ్య 21 తీసుకుంటే

$21 = 19 + 2$ లేదా $13 + 2(4)$ లేదా $3 + 2(9)$ గా చూపవచ్చు.

అతడు పై విధముగా 9000 సంఖ్య వరకు పరిశీలించాడు. వాటిలో కేవలం రెండు సంఖ్యలు

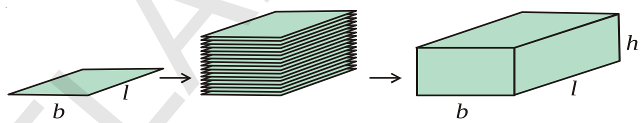
$5777 = 53 \times 109$ మరియు $5993 = 13 \times 641$ లకు మాత్రమే మినహాయింపు కలదు. ఎందుకనగా అవి ప్రధాన సంఖ్యలు కావు మరియు ప్రధాన సంఖ్యల మొత్తం కాదు మరియు ప్రధానసంఖ్య మరియు వర్గ సంఖ్యకు రెట్టింపుల మొత్తము కాదు.

అధ్యాయం **13**

త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట

13.0 పరిచయం

మనము త్రిమితీయ ఆకారము కలిగిన వస్తువులున్న ప్రపంచంలో నివసిస్తున్నాము. మన చుట్టూ అనేక వస్తువుల ఆకారములు ద్విమితీయ కొలతలు కలిగి ఉంటాయి. మనము వీటిని ద్విమితీయ, త్రిమితీయ వస్తువులుగా వర్గీకరించగలము. ఒక గోడకు అతికించిన పోస్టర్‌ని గమనించినట్లయితే, అది దీర్ఘ చతురస్రాకారములో ఉన్నట్లు చెప్పగలము. దానికి ఎన్ని కొలతలు కలవు ? దానికి పొడవు, వెడల్పు రెండు కొలతలు కలవు. ఒక పుస్తకమును గమనించండి. అది ఏ ఆకారములో ఉంటుంది? అది ఒక దీర్ఘఘనాకారముగా ఉంటుంది. దానికి పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు అను మూడు కొలతలు కలవు. ఒక త్రిభుజము, చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రము మొ॥నవి ఒక తలముపై గీయబడిన పటములు. ఘనము, దీర్ఘ ఘనము మొదలగు ఘనాకారపు వస్తువులు త్రిమితీయ కొలతలు కలిగిన వస్తువులు. సర్వసమాన ద్విమితీయ ఆకారము కలిగిన పటములను వరుసగా ఒకదానిపై ఒకటి పేర్చుట వలన అది కొంత అంతరాళమును ఆక్రమించును. అది త్రిమితీయ కొలతలు కల వస్తువుగా ప్రక్క పటములో చూపినట్లుగా మారును.

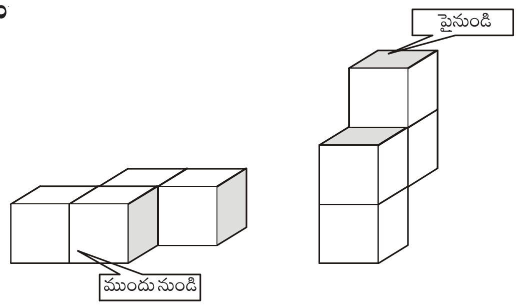


ఇవి చేయండి :

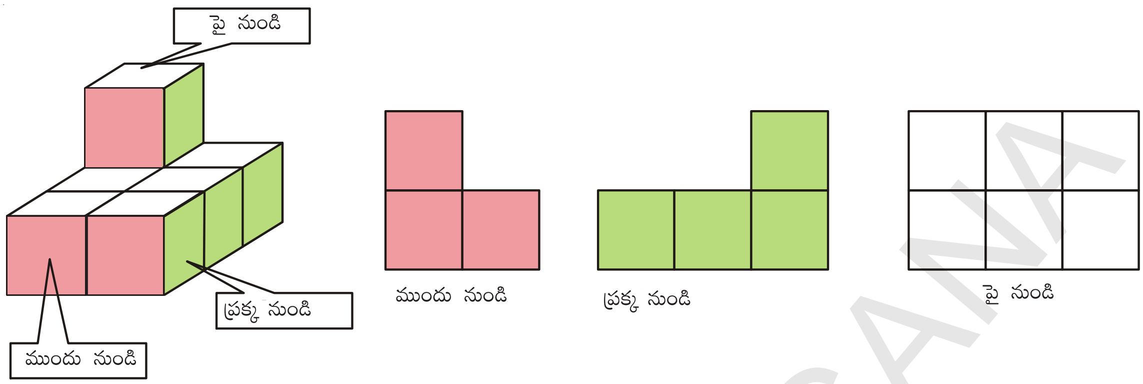
1. త్రిమితీయాలు కల కొన్ని వస్తువుల పేర్లు వ్రాయండి.
2. ద్విమితీయ ఆకారాలు కల కొన్ని పటముల పేర్లు వ్రాయండి.
3. గాలి పటము (kite) చిత్రము గీయండి. అది ద్విమితీయ పటమా లేక త్రిమితీయ వస్తువా గుర్తించండి.
4. ఘనము, దీర్ఘఘనాకారము కల కొన్ని వస్తువులను గుర్తించండి.
5. వృత్తము, గోళము మధ్య తేడా ఏమిటి?

13.1 ఘనములతో రూపొందింపబడిన త్రిమితీయ వస్తువులు

ప్రక్క ఘనాకారపు వస్తువుల పటం పరిశీలించండి. ఈ రెండు వస్తువులు 1 యూనిట్ కొలత కల 4 ఘనములతో రూపొందించ బడినవి. వాటిని పరిశీలిస్తే, రెండు వస్తువులు ఒకే విధముగా ఉన్నవి. కాని చూచుటకు వేర్వేరు వస్తువులుగా కనిపించును. దీనికి కారణము మనము వాటిని వివిధ స్థానముల నుండి చూస్తున్నాము.



ఇదేవిధముగా ఒక వస్తువును వివిధ స్థానాల నుండి వివిధ ఆకారాలలో కన్పిస్తుంది. ఉదాహరణకు

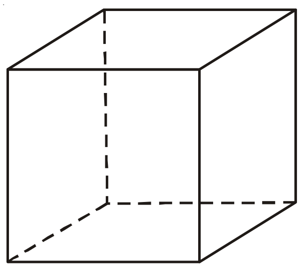


ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

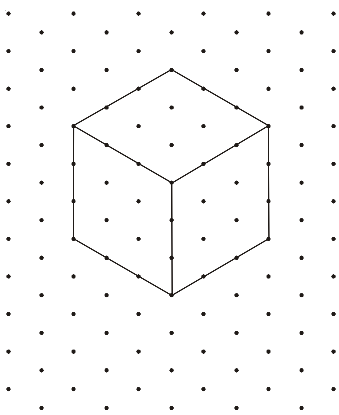
పై పటమును పై నుండి చూసినపుడు, క్రింది నుండి చూసినపుడు కనిపించు ఆకారము యొక్క చుట్టుకొలత, వైశాల్యము కనుక్కోండి.

13.2 త్రిమితీయ పటములను ద్విమితీయంగా చూపుట

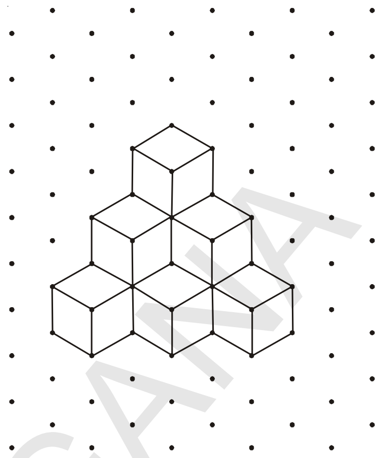
మనం సాధారణంగా త్రిమితీయ వస్తువుల ఆకారములను కాగితంపై గీస్తాము. కాని అవి గీయునపుడు కేవలం రెండు కొలతలను మాత్రమే చూపగలము. మూడవ కొలత మన యొక్క ఊహాత్మకముగా ఉంటుంది. మనము ఒక ఘనమును ప్రక్క పటములో చూపినట్లుగా గీస్తాము. ఈ పటములో పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుగా గీచిన మూడు కొలతలు సమానముగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తాయి. కాని కొలచిన అవి సమానముగా ఉండకపోవచ్చు.



ఈ రకమైన ఇబ్బంది అధిగమించుటకు మనము సమాన మాపనం (isometric) కల చుక్కల పటమును ఉపయోగిస్తాము. ఈ పటం ద్వారా పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను సరియగు కొలతల ద్వారా మనము గీయగలము.



ఉదాహరణ 1 : ప్రక్క పటములో కల ఘనముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

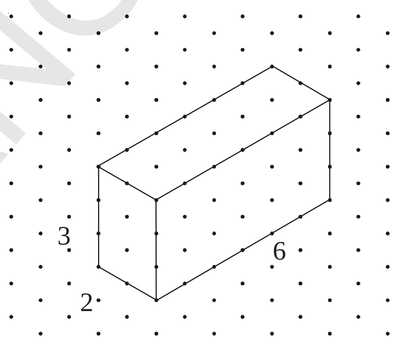


సాధన : ఈ పటములో మూడు వరుసలలో ఘనములు కలవు.

పై వరుస నందు ఒక ఘనము కలదు. రెండవ వరుస నందు 3 ఘనములు కలవు. మూడవ వరుస నందు 6 ఘనములు కలవు.

మొత్తం ఘనముల సంఖ్య $= 1 + 3 + 6 = 10$.

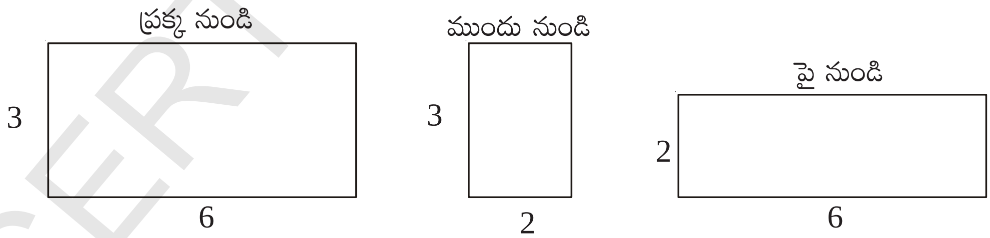
ఉదాహరణ 2 : ప్రక్క పటములో కల దీర్ఘఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులను కనుగొనండి. (ఏ రెండు వరుస ప్రక్కప్రక్కన కల బిందువుల మధ్య దూరం 1 యూనిట్). మరియు పై నుండి, ప్రక్క నుండి, ఎదుటి నుండి చూచునపుడు వచ్చు ఆకారముల పటములను సరియగు కొలతల ఆధారంగా గీయండి.



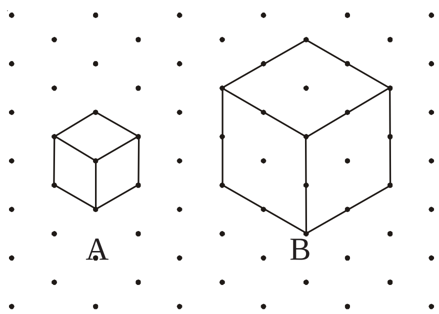
సాధన : దీర్ఘఘనము పొడవు $l = 6$ యూనిట్లు

వెడల్పు $b = 2$ యూనిట్లు

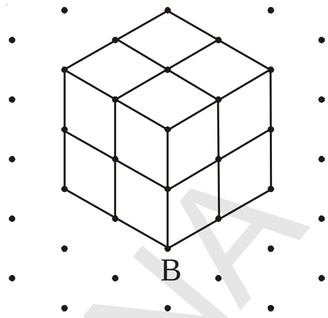
ఎత్తు $h = 3$ యూనిట్లు



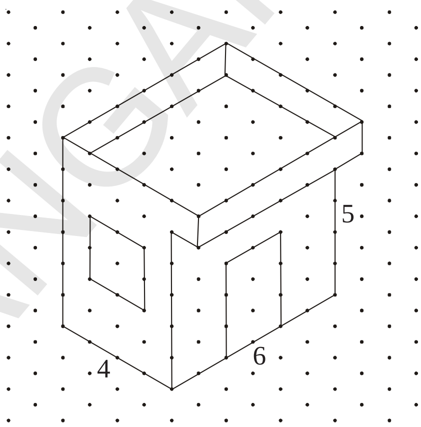
ఉదాహరణ 3 : ప్రక్క పటములో రెండు సమ ఘనములు A మరియు B ఇవ్వబడినవి. వాటియందు కల 1యూనిట్ కొలత కల సమఘనములు ఎన్ని ఉన్నాయో? తెలుపుతూ వాటి నిష్పత్తిని వ్రాయండి.



సాధన : పటములో గల ఘనము A నందు ఒకే ఒక యూనిట్ ఘనము కలదు. ఘనము B యొక్క భుజములకు సమాంతరముగా రేఖలు గీచిన అవి ఆ ఘనమును 1 యూనిట్ భుజముకల సమఘనములుగా విభజిస్తుంది. పై వరుస నందు 4, క్రింది వరుస నందు 4 మొత్తం '8' సమఘనములుకలవు. వాటి నిష్పత్తి 1 : 8.



ఉదాహరణ 4 : సమాన మాపము కల చుక్కల పటము నందు ఒక ఇంటి యొక్క ప్లాన్ గీయబడినది. దాని యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులను కనుక్కోండి. ముందుకు పొడిగించ బడిన స్లాబ్ యొక్క వైశాల్యము కనుక్కోండి.



సాధన : ఇంటి యొక్క పొడవు = 6 యూనిట్లు

ఇంటి యొక్క వెడల్పు = 4 యూనిట్లు

ఇంటి యొక్క ఎత్తు = 5 యూనిట్లు

ముందు పొడిగించబడిన స్లాబ్ కొలత 1 యూనిట్

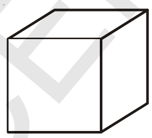
స్లాబ్ యొక్క కొలతలు $= 5 \times 6$ యూనిట్లు

స్లాబ్ యొక్క వైశాల్యము $= 5 \times 6 = 30$ చ.యూనిట్లు

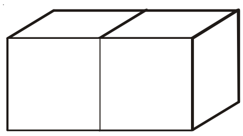
అభ్యాసము - 13.1

1. క్రింది చిత్రాలను సమాన మాపము కల చుక్కల పటము (isometric dot sheet) పై గీయండి.

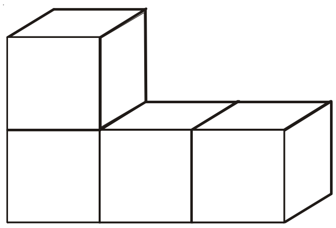
(i)



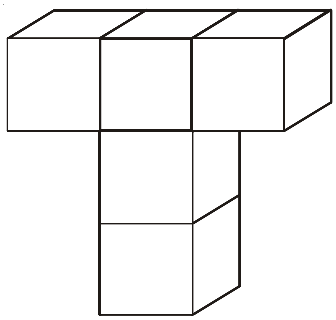
(ii)



(iii)

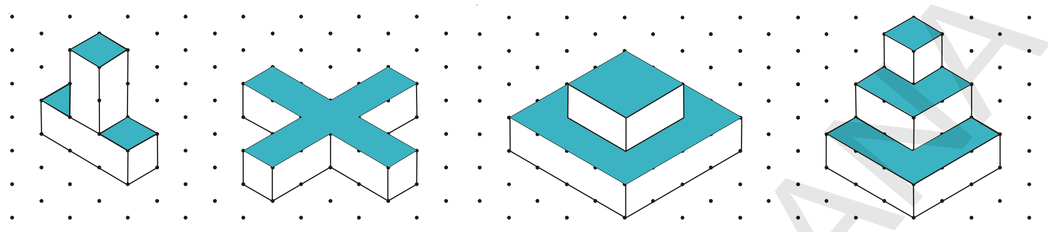


(iv)



2. 5 యూనిట్లు × 3 యూనిట్లు × 2 యూనిట్లు కొలతలు కల దీర్ఘ ఘనమును సమాన మాపము గల చుక్కల పటము పై గీయండి.

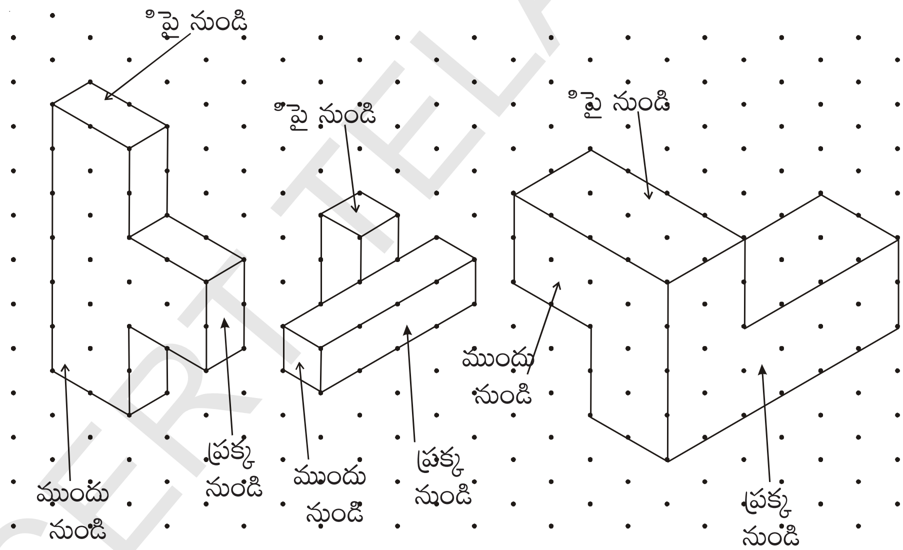
3. క్రింద ఇవ్వబడిన చిత్రముల యందు కల 1 యూనిట్ కొలతల గల సమఘనముల సంఖ్యను తెల్పండి.



(i) (ii) (iii) (iv)

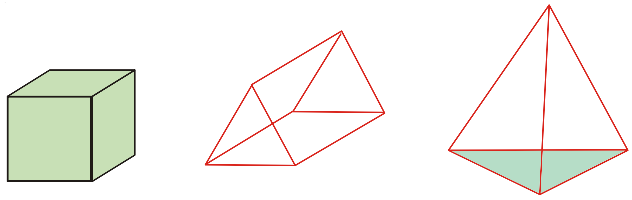
4. 3 వ ప్రశ్న యందు ఇవ్వబడిన పటములలో షేడ్ (shade) చేయబడిన ప్రదేశాల వైశాల్యములు కనుక్కోండి.

5. క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో, వాటి యొక్క పై నుండి, ప్రక్క నుండి, ముందు నుండి చూచినపుడు కనబడు ఆకారముల పటములు గీయండి. (సమాన మాపము కల చుక్కల పటము నందు ఏ రెండు వరుస చుక్కల మధ్య దూరము 1 సెం.మీ).

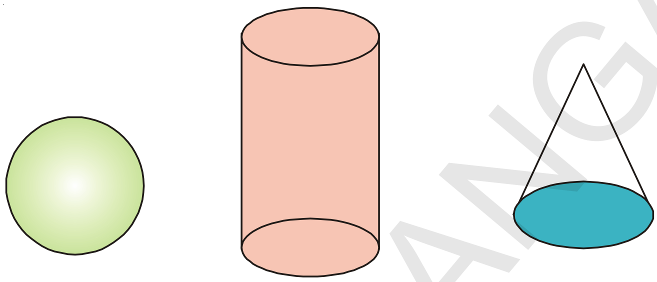


13.3 వివిధ రకాల జ్యామితీయ ఘనములు

మనము, మనచుట్టుప్రక్కల అనేక ఘనాకారము కల వస్తువులను గమనిస్తుంటాము. అందు కొన్ని వక్రతలము కలవి, మరికొన్ని సమతలము కలవి. కొన్ని వస్తువుల తలములు (ఉదా:- బాక్స్, పుస్తకము, పాచికలు మొ॥వి) సమతలము కలిగి ఉంటాయి. మరి కొన్ని (ఉదా: బాల్, పైపులు మొ॥వి) వక్రతలము కలిగి ఉంటాయి. ఈ ధర్మము ఆధారముగా చేసుకొని వాటిని బహుముఖి ఫలకములుగా, బహుముఖి ఫలకములు కాని వస్తువులుగా విభజిస్తాము. ఈ క్రింది వాటిని గమనించండి.



పై పటములో కల వస్తువుల యందు వక్ర తలములు కలిగినవి కలవా? లేదు.
అందుకల వస్తువులన్నియు సమతలము కలిగి ఉన్నవి. సమతలములు కలిగి యున్న వస్తువులను 'బహుముఖి ఫలకము' అంటారు.
ఇప్పుడు క్రింది పటములో కల వస్తువులను పరిశీలించండి.



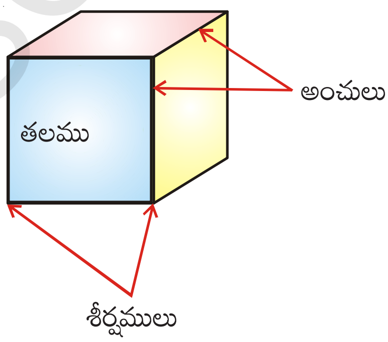
పై పటము నందలి వస్తువులు వక్రతలములు కలిగి ఉన్నవి. ఈ రకమైన వస్తువులను 'బహుముఖేతర ఫలకము' అంటారు.

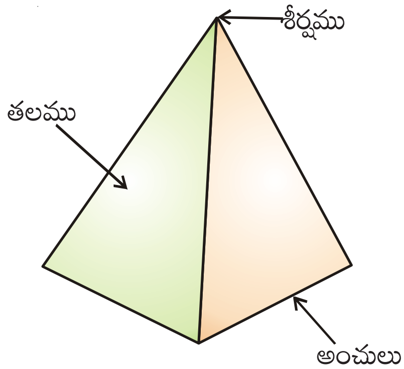
ప్రయత్నించండి.

1. బహుముఖి ఫలకముగా కల వస్తువులకు 3 ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
2. బహుముఖేతర ఫలకముగా కల వస్తువులకు 3 ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

13.4 త్రిపరిమాణ వస్తువుల యొక్క తలములు, అంచులు, శీర్షములు

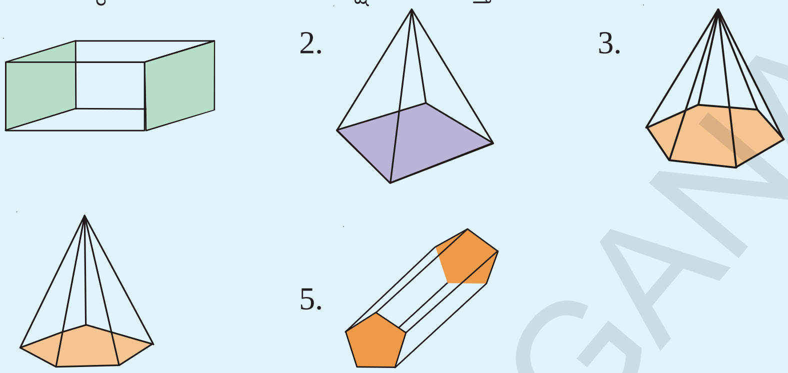
మనం నివసించే గది యొక్క గోడలు, కిటికీలు, తలుపులు, గది యొక్క పై భాగము, అడుగు తలము, మూలలు మొదలైనవి మరియు మనచుట్టూ కల వస్తువులు టేబుల్స్, బాక్స్‌లు మొ॥నవి గమనించండి. వాటి యొక్క తలములు సమతలములు. వాటి తలములు అంచుల వద్ద కలియుచున్నవి. రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ అంచులు మూలాల వద్ద కలియుచున్నవి. ఈ మూలను శీర్షము అంటారు. ఒక సమఘనము లేదా పిరమిడ్‌ను గమనించండి.





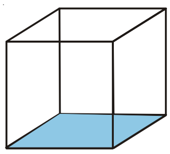
ఇవి చేయండి :

క్రింది పటముల యొక్క తలములు, అంచులు, శీర్షములను గుర్తించండి.

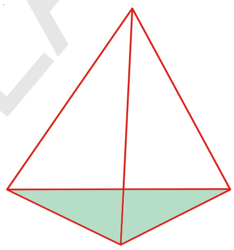


13.5 క్రమ బహుముఖి ఫలకములు

క్రింది పటముల యొక్క తలాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలను పరిశీలించండి.

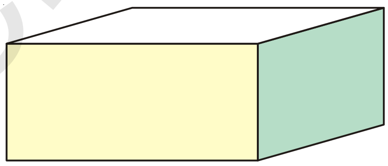


సమఘనము

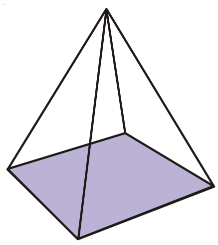


త్రిభుజాకార పిరమిడ్ (చతుర్ముఖీయ పిరమిడ్)

పై వస్తువులను గమనించినట్లయితే, వాటి యొక్క తలములు సర్వ సమానములు. వాటి అంచులు అన్నియు సమానమైన పొడవు కలిగి ఉన్నవి. వాటి శీర్షములు అన్నియు సమాన సంఖ్యలో గల తలములచే ఏర్పడుచున్నవి. ఈ విధమైన ధర్మము కల వస్తువులను “సమబహుముఖి ఫలకము” అంటారు. ఇప్పుడు క్రింది పటాలను పరిశీలించండి.



దీర్ఘఘనము

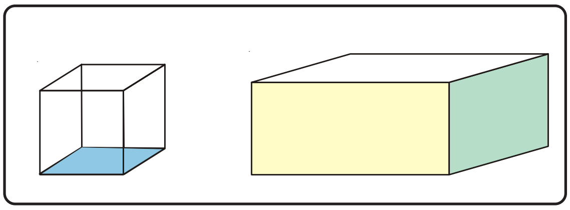


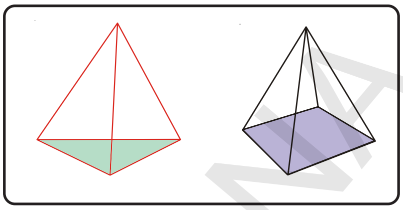
చతురస్రాకార పిరమిడ్

దీర్ఘఘనము ఒక అసమ బహుముఖి. ఇందలి తలములు అన్నియు సర్వ సమానములు కావు. పిరమిడ్ నందు పైశీర్షము 4 తలముల చేత, మిగిలిన శీర్షములు 3-తలములచే ఏర్పడినవి. ఇటువంటి వస్తువులను అసమ బహుముఖిగా పేర్కొంటారు. కావున బహుముఖి ఫలకములను సమబహుముఖి ఫలకములుగాను, అసమ బహుముఖి ఫలకములుగాను విభజించవచ్చు.

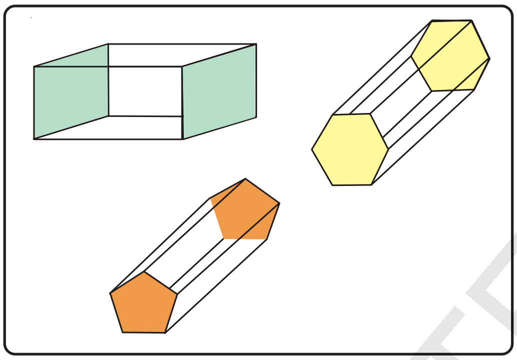
13.4.1 పట్టకము మరియు పిరమిడ్

ఈ క్రింది పటములు పరిశీలించండి.

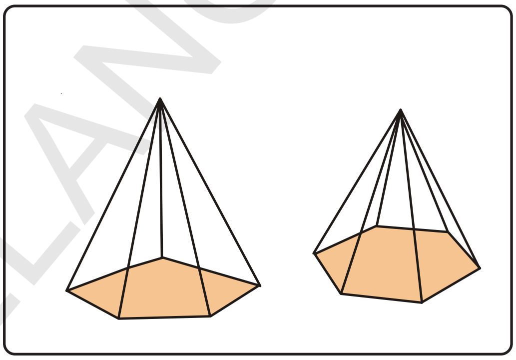




మొదటి బాక్స్ నందలి వస్తువులపై తలము, క్రింది తలము ఒకే విధముగా కలవు. రెండవ బాక్స్ నందలి వస్తువులలో పై తలమునకు బదులుగా అన్ని తలములు ఒక బిందువు వద్ద కలుపబడిన శీర్షము కలదు. ఇటువంటి మరికొన్ని వస్తువులను పరిశీలిద్దాము.



(a)



(b)

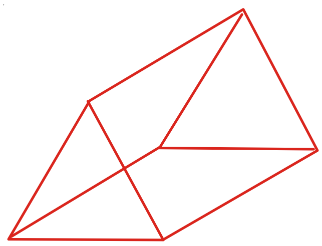
పటము (a) నందు కల వస్తువులలో ఎదురెదురుగా సమాంతరముగా కల రెండు తలములు సర్వసమానముగా కలవు. ప్రక్క తలములు దీర్ఘచతురస్రములు (సమాంతర చతుర్భుజములు). పటము (b) నందు కల వస్తువుల యందు భూమి బహు భుజి, ప్రక్క తలములు త్రిభుజములు. అవి ఒక ఉమ్మడి బిందువు వద్ద కలియుచున్నవి. ఒక బహుముఖితో ఎదురెదురుగా సమాంతరముగా కల రెండు తలములు సర్వసమానములై, మిగిలిన తలములు సమాంతరచతుర్భుజము (దీర్ఘచతురస్రము) లైన ఆ వస్తువును **పట్టకము** అంటారు.

ఒక బహుముఖి యొక్క అడుగు భాగము బహుభుజిగాను మిగిలిన ప్రక్క తలములు త్రిభుజములుగా ఉంటే ఆ బహుముఖిని **పిరమిడ్** అంటారు.

పట్టకము లేక పిరమిడ్ యొక్క పేరు వాటి యొక్క అడుగు తలము లేక సమాంతరముగా ఎదురెదురుగా గల తలముల ఆధారంగా పేర్కొంటారు.

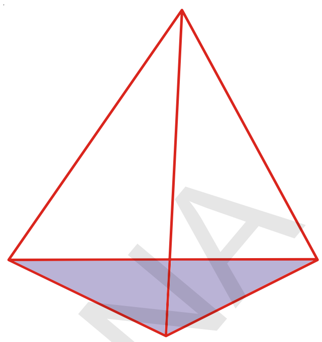
A. త్రిభుజాకార పట్టకము

ప్రక్క పటమును పరిశీలించండి. దాని యొక్క ఎదురెదురుగా గల సమాంతర తలములు ఏ ఆకారములో కలవు? వాటి ప్రక్క తలములు (మిగిలిన తలములు) ఏ ఆకారముతో కలవు?



వాటి యొక్క ఎదురెదురుగా కల సమాంతర తలములు త్రిభుజాకారముగా కలవు. వాటి యొక్క ప్రక్క తలములు సమాంతర చతుర్భుజములు. ఇటువంటి పట్టకమును త్రిభుజాకార పట్టకము అంటారు.

ఒక పట్టకము యొక్క అడుగు భాగము చతురస్రము అయిన అది చతురస్రాకార పట్టకము (సమఘనము) అంటారు. ఒక పట్టకము యొక్క అడుగు భాగము పంచభుజి అయిన అది పంచభుజాకార పట్టకము.



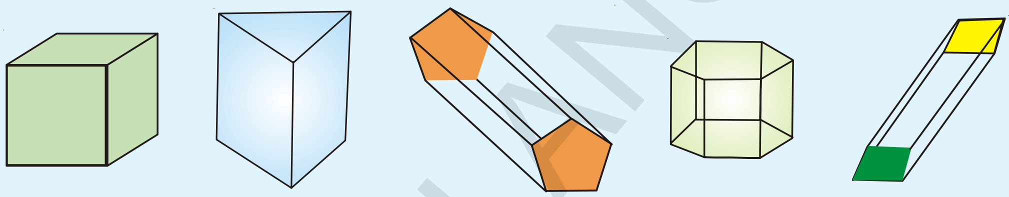
B. త్రిభుజాకార పిరమిడ్

ఒక పిరమిడ్ నందు దాని అడుగు భాగమున గల తలము త్రిభుజము అయిన అది త్రిభుజాకార పిరమిడ్ (చతుర్ముఖీయ పిరమిడ్) అంటారు. ఒక పిరమిడ్ యొక్క అడుగుభాగము చతురస్రము అయిన దానిని చతురస్రాకార పిరమిడ్ అంటారు.

ఒక పిరమిడ్ యొక్క అడుగుభాగము పంచభుజి అయిన దానిని పంచభుజాకార పిరమిడ్ అంటారు.

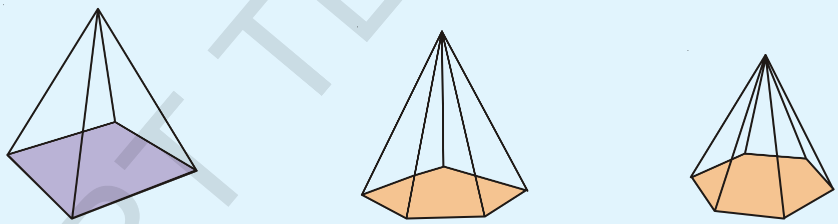
ఇవి చేయండి :

1. క్రింద ఇచ్చిన పట్టకముల పేర్లు రాయండి.



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. క్రింద ఇచ్చిన పిరమిడ్‌ల పేర్లను రాయండి.



(i) (ii) (iii)

3. క్రింద పట్టిక నందు వాటి భుజముల ఆధారంగా పిరమిడ్/పట్టకము యొక్క పేర్లను వ్రాయండి.

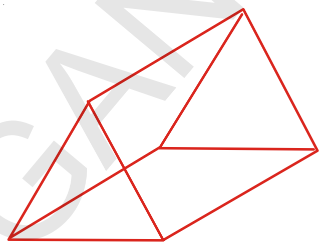
పట్టకము / పిరమిడ్ యొక్క భుజాల సంఖ్య	పట్టకము పేరు	పిరమిడ్ పేరు
3 భుజములు		
4 భుజములు		
5 భుజములు		
6 భుజములు		
8 భుజములు		

4. పట్టకము, పిరమిడ్‌ల మధ్య తేడాలను వివరించండి.

ఆలోచించి, చర్చించి - వ్రాయండి

ఒక క్రమ పిరమిడ్ నందు అడుగు తలము యొక్క భుజముల సంఖ్య అనంతముగా పెంచినచో, ఆ పిరమిడ్ మార్పు చెందు ఆకారమును, గమనించండి.

13.6 బహుముఖి యొక్క అంచులు, తలములు, శీర్షముల సంఖ్య



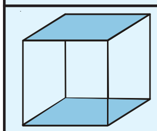
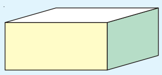
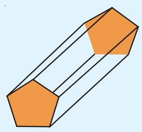
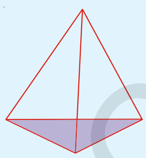
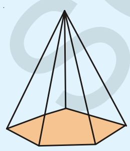
ప్రక్క పటంలో బహుముఖి యొక్క అంచులు, తలములు, శీర్షములను లెక్కించెదము.

తలముల సంఖ్య = (5) తలములు

అంచుల సంఖ్య = (9) అంచులు

శీర్షముల సంఖ్య = (6) శీర్షములు

క్రింది పట్టికను గమనించి, పూరించండి.

వస్తువు	వస్తువు యొక్క పేరు	తలముల సంఖ్య (F)	శీర్షముల సంఖ్య (V)	అంచుల సంఖ్య(E)	F+V	E+2
	సమఘనము	6	8	12	6 + 8 = 14	12 + 2 = 14
	దీర్ఘఘనము					
	పంచభుజాకార పట్టకము					
	చతుర్ముఖి					
	పంచభుజాకార పిరమిడ్					

పై పట్టిక యొక్క చివరి రెండు నిలువు వరుసల పరిశీలిస్తే అన్ని బహుముఖిలకు మనము F + V = E + 2 అని గమనించగలము.

లియోనార్డ్ ఆయిలర్ అను గణిత శాస్త్రవేత్త మొదటిసారిగా వీటి మధ్యగల సంబంధమును కనుగొనెను. అందుకే

$F + V = E + 2$. ను బహుముఖిలో ఆయిలర్ సంబంధముగా పేర్కొంటారు.

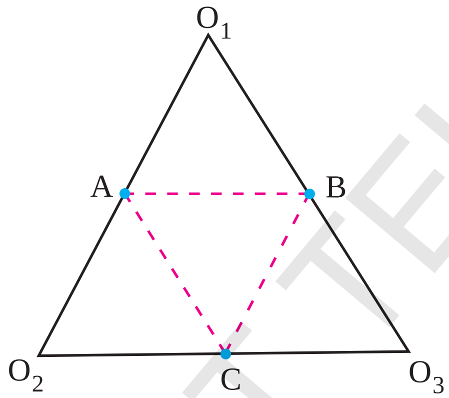
లియోనార్డ్ ఆయిలర్
(1707-1783)

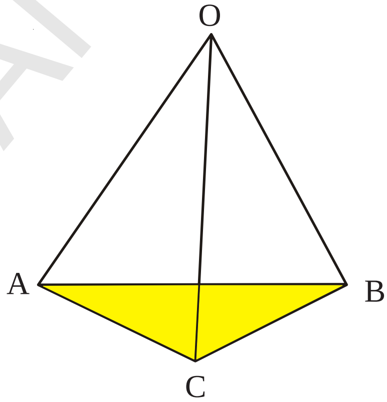
13.7 త్రిమితీయ ఆకారాల వల రూపాలు (Net Diagrams)

ఒక వల అనేది ఎముకల గూడును పోలియుండే ఒక ద్విమితీయ ఆకారము. ఈ వల అంచుల వెంబడి మడిస్తే అది త్రిమితీయ ఆకారముగా మారుతుంది. త్రిమితీయాలు గల వస్తువును తయారు చేయుటకు కాగితం లేక అట్టను ఉపయోగిస్తాం.

వల రూపములు ఉపయోగించి మనము పట్టకములు, పిరమిడ్‌లను తయారుచేయగలము. చతుర్ముఖి యొక్క వలరూపము (Net diagrams) గీయు విధము పరిశీలిద్దాము.

ఒక కాగితాన్ని తీసుకొని దాన్ని త్రిభుజాకారములో కత్తిరించుము. దాని శీర్షాలను O_1, O_2, O_3 గా గుర్తించండి మరియు వాటి భుజముల మధ్య బిందువులు A, B, C లుగా గుర్తించండి.

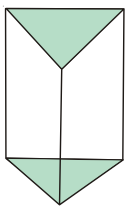
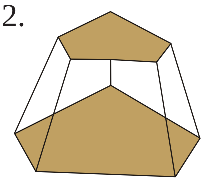
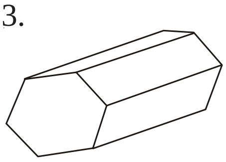
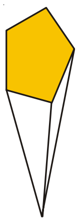


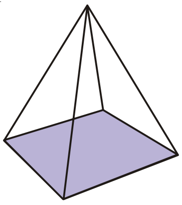
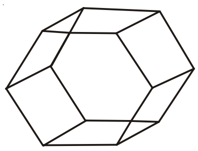
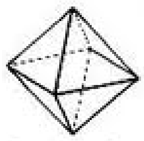
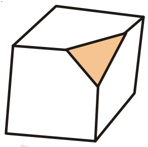


కాగితమును AB, BC, CA ల వద్ద గీయబడిన చుక్కల రేఖకు వెంబడి మడిచి పెట్టండి. ఆ మడిచిన భాగాలను O_1, O_2, O_3 లు ఒకే బిందువు 'O' వద్ద కలియునట్లుగా పైకి మడిచి పెట్టండి. AO_1 ను AO_2 తోను, BO_1 ను BO_3 తోను, CO_2 ను CO_3 తో కలియునట్లుగా మడిచి పెట్టండి. ఇపుడు మనకు ఏర్పడిన ఆకారము చతుర్ముఖి (త్రిభుజాకార పిరమిడ్). O_1, O_2, O_3 తో కల పటము చతుర్ముఖి యొక్క వల రూపము (Net diagrams).

అభ్యాసము - 13.2

1. క్రింది పటములలో కల బహుముఖి యొక్క తలములు, శీర్షములు, అంచుల యొక్క సంఖ్యను లెక్కించండి. వాటికి ఆయిలర్ సూత్రము సరిచూడండి.

1. 
2. 
3. 
4. 

5.  6.  7.  8. 

2. చతురస్రాకార పట్టకము, సమఘనము ఒకటేనా? వివరించండి.

3. ఏదైనా బహుముఖి 3 త్రిభుజ తలములు కలిగి ఉంటుందా? వివరించండి.

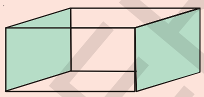
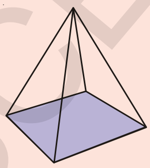
4. ఏదైనా బహుముఖి 4 త్రిభుజ తలములు కలిగి ఉంటుందా? వివరించండి.

5. క్రింది టేబుల్ నందలి ఖాళీలను ఆయిలర్ సూత్రము ఆధారముగా పూరించండి.

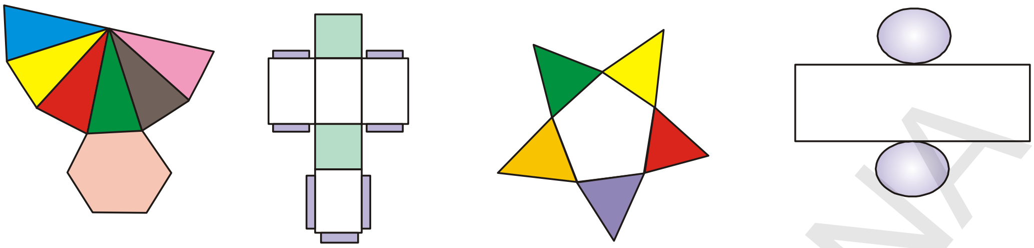
F	8	5	?
V	6	?	12
E	?	9	30

6. ఏదైనా ఒక బహుముఖి 10 తలములు, 20 అంచులు, 15 శీర్షములు కలిగి ఉంటుందా? వివరించండి.

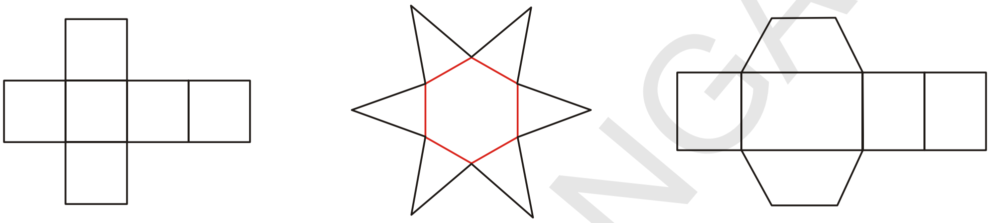
7. క్రింది పట్టికను పూరించండి.

వస్తువు	శీర్షముల సంఖ్య	అంచుల సంఖ్య
		
		
		

8. క్రింద నీయబడిన వలరూపాలు ద్వారా ఏర్పడు 3-D వస్తువులు లేక ఆకారాలను గుర్తించి వ్రాయండి.



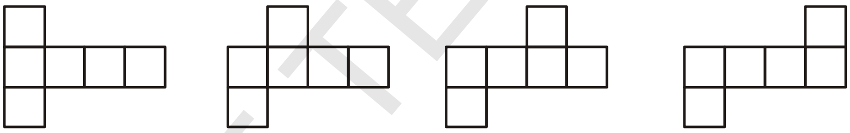
(i) (ii) (iii) (iv)



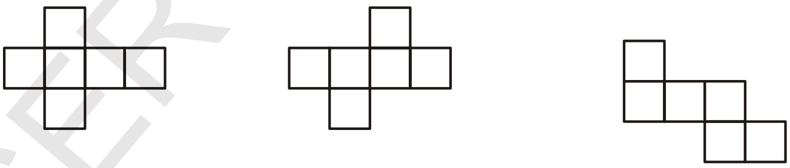
(v) (vi) (vii)

9. క్రింది వల రూపములను చెక్‌రూల్ బుక్ నందు గీయండి. మరియు క్రింద నీయబడిన వలరూపములతో సమఘనము తయారు చేయగల వలరూపములను కనుగొనండి.

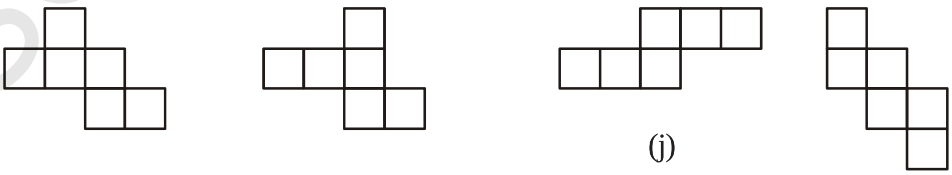
(i)



(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g)



(h) (i) (j) (k)

(ii) క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వండి.

(a) నాలుగు శీర్షములు, 4 తలములు కల బహుముఖిని పేర్కొనండి.

(b) ఒక శీర్షము కూడా లేని ఘనాకారపు వస్తువును పేర్కొనండి.

(c) 12 అంచులు గల బహుముఖిని పేర్కొనండి.

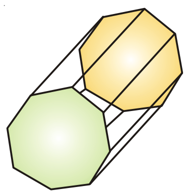
(d) ఒకే ఒక తలము గల ఘనాకారపు వస్తువును పేర్కొనండి.

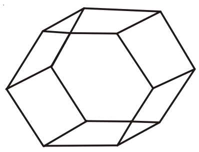
(e) సమఘనము, దీర్ఘఘనమునకు గల బేధములు వివరించండి.

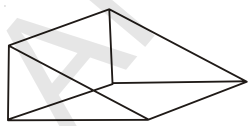
(f) అంచుల సంఖ్య, శీర్షముల సంఖ్య, తలముల సంఖ్య సమానముగా గల రెండు బహుముఖిలను పేర్కొనండి.

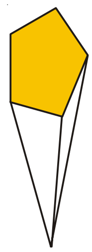
(g) 5 శీర్షములు, 5 తలములు గల బహుముఖిని పేర్కొనండి.

(iii). క్రింది పటముల యొక్క పేర్లను పేర్కొనండి.


(a)


(b)


(c)

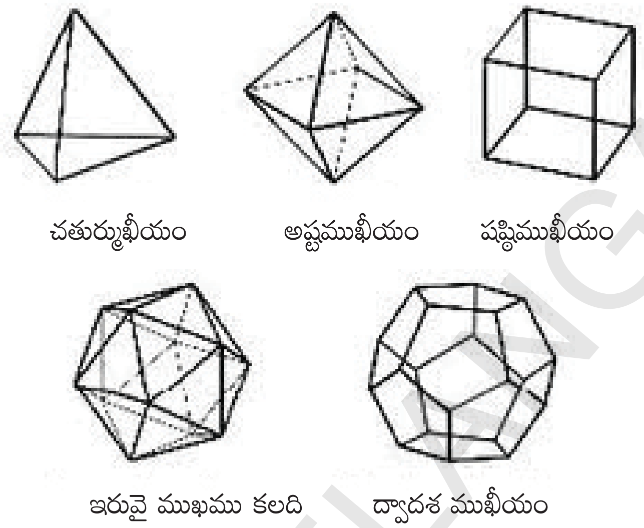

(d)

మనం ఏమి చర్చించాం

1. త్రిపరిమాణ వస్తువుల ఆకారములు సమాన మాపము గల చుక్కల కాగితముపై గీయువిధానము.
2. త్రిపరిమాణ వస్తువులను పై నుండి, ప్రక్క నుండి, ఎదుటి నుండి చూసినపుడు కనబడు వివిధ ఆకారములు
3. **బహుముఖి :** సమతలములు కలిగిన వస్తువులు.
4. **పట్టకము :**బహుముఖి నందు సమాంతరముగా ఎదురెదురుగా కల రెండు తలము సర్వసమానముగాను, మిగిలిన తలములు దీర్ఘచతురస్రములు (సమాంతర చతుర్భుజము) గా కలిగిన వస్తువులను పట్టకము అంటారు.
5. పిరమిడ్ :- బహుముఖి నందు అడుగు భాగము యొక్క తలము బహుభుజిగాను, మిగిలిన ప్రక్క తలములు త్రిభుజములుగా కలిగిన వస్తువులను పిరమిడ్ అంటారు.
6. త్రిపరిమాణ వస్తువులు తయారుచేయుటకు ద్విమితీయ వల రూపములు ఉపయోగించుట.
7. బహుముఖిల కోసం ఆయిలర్ సూత్రము $E + 2 = F + V$.

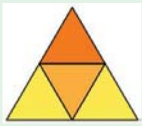
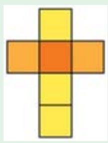
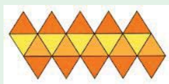
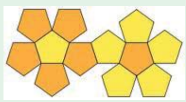
మీకు తెలుసా?

కేవలం ఐదు క్రమ బహుముఖీయులు ఉన్నాయి. ఇవి సంక్లిష్టమైనవి. ప్లేటోకి నివాళిగా వీటిని ప్లేటోఘనాలు అంటారు.



సమఘనము కేవలం బహుముఖి. ఇది పూర్తిగా అంతరాళంతో నిండి ఉంటుంది.

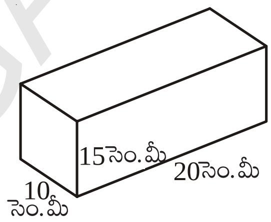
ప్లేటోనిక్ వస్తువుల వలరూపాలు

బహుముఖి పేరు	బహుభుజి తలాలు	వలరూపము
చతుర్ముఖీయం	4 త్రిభుజాలు	
అష్టముఖీయం	8 త్రిభుజాలు	
షష్ఠిముఖీయం	6 చతురస్రాలు	
ఇరవై ముఖాలు కలది	20 త్రిభుజాలు	
ద్వాదశముఖీయం	12 పంచభుజిలు	

అధ్యాయము 14

ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము (ఘనం మరియు దీర్ఘఘనము)

14.0 పరిచయం



సురేష్ తన బహుమతి పెట్టెను రంగు కాగితముతో అలంకరించాలని అనుకొన్నాడు. స్నేహితులలో ఒకరు 100 చదరపు సెంటీమీటర్లు కాగితమును మరొక స్నేహితుడు 200 చదరపు సెంటీమీటర్లు కాగితమును కొనాలని సూచించారు. ఎవరి సూచన సరైనది? అయితే పెట్టెను చుట్టుట కొరకు సురేష్ ఎంత పరిమాణము కల్గిన రంగు కాగితమును కొనవలెనో? ఏ విధముగా గుర్తిసాడు?

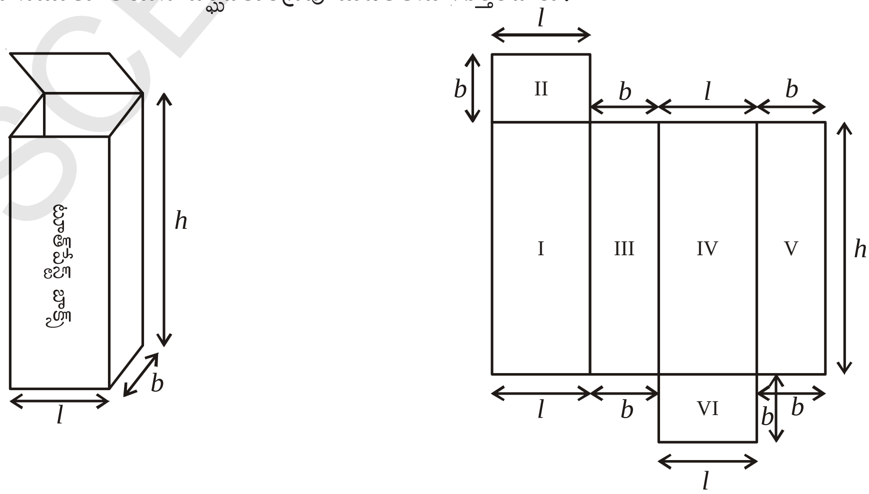
కావలసిన కాగితపు పరిమాణము, బహుమతి పెట్ట యొక్క ఉపరితల వైశాల్యముపై ఆధారపడి యుంటుందని మనము గుర్తించవచ్చు.

ఇటువంటి సందర్భములలో వివిధ ఘనాకార వస్తువుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములను కనుగొను పద్ధతులు నేర్చుకొనుట, అవసరము.

14.1 దీర్ఘ ఘనము

దళసరి కాగితము లేదా కార్డ్‌బోర్డుతో తయారు చేయబడిన దీర్ఘఘనాకృతిలో యున్న ఒక పెట్టెను. (ఉదాహరణకు టూత్ పేస్ట్‌డబ్బా) తీసుకొందాము.

దానిని పటములో చూపిన విధముగా కత్తిరించి తిరిగి తెరచిన వచ్చు ఆకారమును పరిశీలిద్దాం. ఎన్ని జతల సర్వసమానములు అయిన దీర్ఘచతురస్రపు మడతలను గుర్తించారు?



పటాన్ని పరిశీలిస్తే ఇచ్చుట 'l', 'b' మరియు 'h' లు వరుసగా పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను సూచిస్తున్నాయి. ఇక్కడ మనము మూడు జతల సర్వసమానము అయిన దీర్ఘచతురస్రాకారములను గుర్తించవచ్చు.

కావున దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము

I వైశాల్యము + II వైశాల్యము+ III వైశాల్యము + IV వైశాల్యము + V వైశాల్యము + VI వైశాల్యము

$$= h \times l + l \times b + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$$

అందుచే దీర్ఘఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l)$

$$= 2\,(lb + bh + hl)$$

సురేష్‌కొన్న బహుమతి పెట్ట కొలతలు 20 సెం.మీ. పొడవు, 10 సెం.మీ. వెడల్పు మరియు 15 సెం.మీ. ఎత్తు కొలతలు కావున దాని

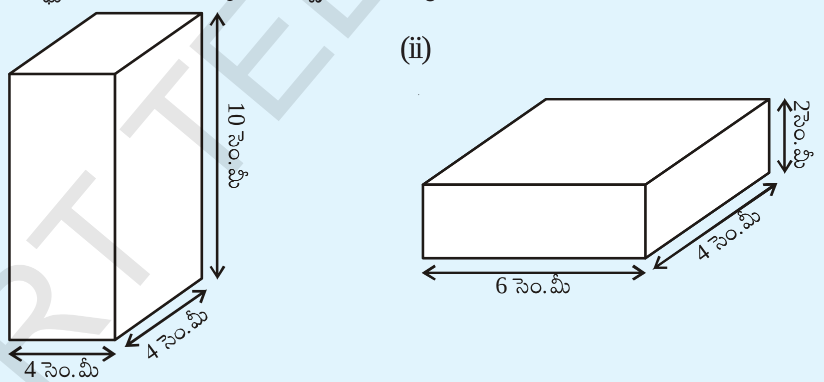
సంపూర్ణ తల వైశాల్యము $= 2(20 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20)$

$= 2\,(200 + 150 + 300)$

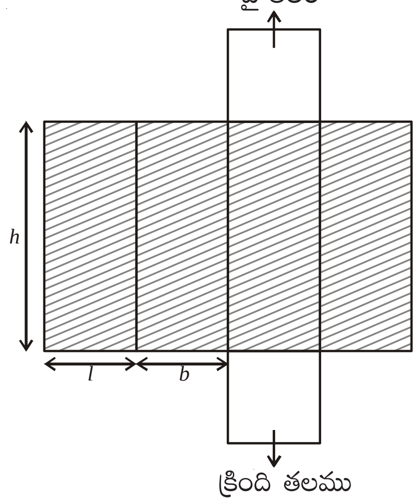
$= 2\,(650) = 1300$ చ.సెం.మీ.

ఇవి చేయండి.

1. ఈ క్రింది దీర్ఘ ఘనముల యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము?



14.1.2 ప్రక్కతల వైశాల్యము



- ప్రక్కతలములు (పైతలము, క్రింద తలములను మినహాయించి) దీర్ఘఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యమును ఇస్తాయి. ఉదాహరణకు మనము కూర్చునే దీర్ఘఘనాకృతి గది యొక్క నాలుగు గోడల వైశాల్యము, ఆ గది యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము నిస్తుంది. కావున దీర్ఘ ఘన ప్రక్కతల వైశాల్యము (L.S.A.)

$= (l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h)$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$

వీటిని ప్రయత్నించండి:

(i) మీరు, మీతరగతిలో ఉపాధ్యాయుడు ఉపయోగించే దీర్ఘఘనాకృతి డస్టర్ యొక్క అంచుల కొలతలను స్కేలుతో కొలచి దానియొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(ii) డస్టర్‌ను గ్రాఫు కాగితములో అంచులన్నీ పూర్తిగా కప్పియుండేటట్లు చేసి, యూనిట్ చతురస్రములను లెక్కించి సంపూర్ణతల వైశాల్యమును గణించండి.

(ii) మీ తరగతి గది యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను కొలిచి

(a) గది యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుక్కోండి. (తలుపులు, కిటికీల యొక్క వైశాల్యములను పరిగణించవద్దు)

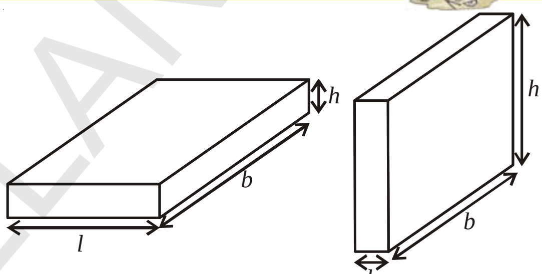
(b) గది యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము కనుక్కోండి.

(c) గదిలో సున్నము వేయబడిన ప్రాంతపు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

ఆలోచించు, చర్చించి, రాయండి.

1. దీర్ఘ ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యము
= ప్రక్కతల వైశాల్యము + 2 × భూవైశాల్యము
అని మీరు చెప్పగలరా?

2. పటము (i) లో చూపిన దీర్ఘఘనము భంగిమను పటము (ii) లో లాగ మార్చిన వాటి ప్రక్కతల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయా?

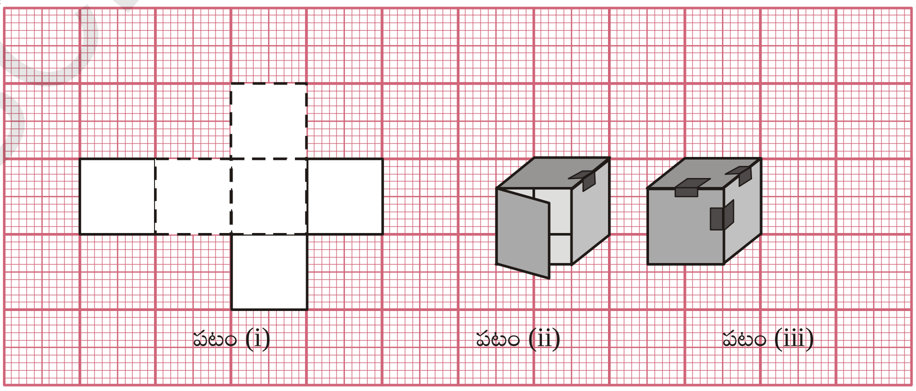


పటం (I) పటం (ii)

3. పొడవు (l), వెడల్పు (b) ఎత్తు (h) కొలతలు సమానముగా గల దీర్ఘఘనపు పటమును గీచి దాని ప్ర.త.వై మరియు సం.త.వై. లకు సూత్రము రాబట్టుము.

14.2 సమ ఘనము

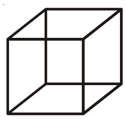
పటము(i) లో చూపిన విధముగా వల(జాలము) ను గళ్ళ కాగితముపై గీచి కత్తిరింపుము. పటము (ii) మరియు (iii) లో సూచించిన విధముగా మడిచి అంచులు కలిపేటట్లు చేస్తే ఏర్పడే పట ఆకృతి ఏమిటి? దాని తలములను మరియు అంచులను పరిశీలింపుము.



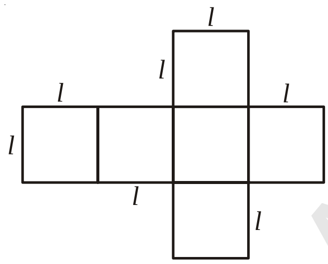
పటం (i) పటం (ii) పటం (iii)

దీర్ఘఘనము మరియు దాని వల చిత్రము గమనించండి.

పటము (i) మరియు (ii)లోని ఘనము యొక్క అన్ని ముఖాలు చతురస్ర ఆకారాలా? ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు సమానమా?



(i)



(ii)

(a) సమ ఘనముకుండే ముఖాలెన్ని ? అన్ని ముఖాలు సర్వ సమానమేనా?

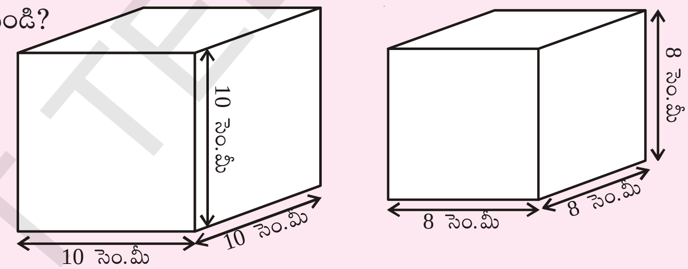
(b) సమ ఘనము యొక్క ప్రతి భుజము పొడవు l, అయితే ప్రతి ముఖము యొక్క వైశాల్యము ఎంత?

(c) సమ ఘనము యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యము ఎంత?

(d) సమ ఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము ఎంత?

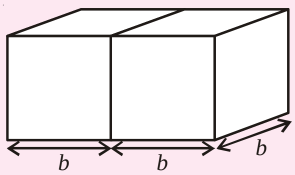
వీటిని ప్రయత్నించండి:

(i) సమ ఘనము 'A' యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యం మరియు 'B' యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము కనుగొనండి?

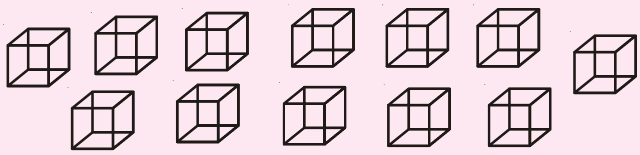


A B

(ii) 'b' భుజముగా గల రెండు సమఘనములు పటములో చూపిన విధముగా జతచేయబడి దీర్ఘఘనమును ఏర్పరిస్తే, ఆ దీర్ఘఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఎంత?



(iii) సమాన భుజము పొడవు గల 12 సమఘనములు ఏ విధముగా జత చేయడము వలన అత్యల్ప సంపూర్ణ తల వైశాల్యము కలిగిన దీర్ఘ ఘనము ఏర్పడుతుందో వివరింపుము?



(iv) $4\times4\times 4$ కొలతలు గల ఒక సమఘనము రంగు వేయబడినది. అ ఘనము 64 సమ ఘనములుగా విభజింపబడినది. అయితే

(a) ఒక ముఖము మాత్రమే రంగువేయబడినది. ఘనములు ఎన్ని?

(b) రెండు ముఖముల రంగు వేయబడిన ఘనములు ఎన్ని?

(c) మూడు ముఖములు రంగు వేయబడిన ఘనములు ఎన్ని?

(d) ఏ ముఖము కూడ రంగు వేయబడని ఘనములెన్ని?

ఉదాహరణ 1: పొడవు 15 సెం.మీ, వెడల్పు 12 సెం.మీ, మరియు ఎత్తు 10 సెం.మీ. కొలతలుగాగల దీర్ఘఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఎంత?

సాధన : దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు (l) = 15 సెం.మీ.

వెడల్పు (b) = 12 సెం.మీ.

ఎత్తు (h) = 10 సెం.మీ.

దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము = $2(lb + bh + hl)$

$= 2(15\times 12 + 12 \times 10 + 10 \times 15)$ చ.సెం.మీ

$= 2(180 + 120 + 150)$ చ.సెం.మీ

$= 2(450)$ చ.సెం.మీ

$= 900$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 2 : సమ ఘనము యొక్క ప్రతి భుజము రెట్టింపు చేయబడింది. అయితే దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఎన్ని రెట్లు పెరుగుతుంది?

సాధన : సమ ఘనము యొక్క భుజము = 'x' అనుకొందాం.

క్రొత్తగా ఏర్పడిన సమ ఘనము యొక్క భుజము $= 2x$

ఇచ్చిన సమ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 6x^2$

కొత్తగా ఏర్పడిన సమఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము

$= 6(2x)^2$

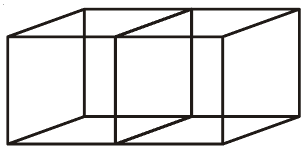
$= 6(4x^2) = 4(6x^2)$

$= 4\times$ ఇచ్చిన ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము

కొత్తగా ఏర్పడిన సమ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ఇచ్చిన ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమునకు 4 రెట్లు ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 3: ప్రతి భుజము 6 సెం.మీ. గా గల రెండు ఘనములు పటములోచూపిన విధంగా జతచేయబడినవి. కొత్తగా ఏర్పడిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఎంత?

సాధన : సమ ఘనము 6 ముఖాలను కలిగి ఉంటుంది. రెండు సమ ఘనములను కలిపి దీర్ఘ ఘనమును ఏర్పరిస్తే రెండు ముఖాలను మనము చూడలేము అనగా కొత్తగా ఏర్పడిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క సం.త.వై ముఖాలు $12 - 2 = 10$ చదరపు ముఖాలు



అందుచే దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 10 \times l^2$ చ.సెం.మీ

$= 10 \times (6)^2$ చ.సెం.మీ

$= 10\times 36$ చ.సెం.మీ $= 360$ చ.సెం.మీ

ప్రత్యమ్నాయ పద్ధతి :

6 సెం.మీ. భుజముగాగల రెండు సమఘనములు ఒకదాని ముఖము మరోదానితో ఏకీభవించేట్లు జతచేయగా ఏర్పడిన దీర్ఘనము యొక్క పొడవు (6 + 6) సెం.మీ., వెడల్పు 6 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 6 సెం.మీ గా మారుతుంది. అనగా దాని కొలతలు 12 సెంమీ, 6 సెం.మీ మరియు 6 సెంమీ.

∴ దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము

$= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(12 \times 6 + 6 \times 6 + 12 \times 6)$ చ.సెం.మీ

$= 2(72 + 36 + 72)$ చ.సెం.మీ

$= 2 \times 180$ చ.సెం.మీ

$= 360$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 4: 60 సెం.మీ. పొడవు, 40 సెం.మీ. వెడల్పు మరియు 30 సెం.మీ. ఎత్తు కగిలిన పూర్తిగా మూత కలిగిన పెట్టె యొక్క బాహ్య తలము రంగు వేయుటకు 20 చ.సెం.మీ. అయ్యే ఖర్చు 50 పైసలు అయిన మొత్తము ఖర్చు ఎంత?

సాధన : పెట్టె యొక్క పొడవు (l) = 60 సెం.మీ

పెట్టె యొక్క వెడల్పు (b) = 40 సెం.మీ

పెట్టె యొక్క ఎత్తు (h) = 30 సెం.మీ

పెట్టె యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2(60 \times 40 + 40 \times 30 + 60 \times 30)$ చ.సెం.మీ

$= 2(2400 + 1200 + 1800)$ చ.సెం.మీ

$= 2 \times 5400$ చ.సెం.మీ

$= 10800$ చ.సెం.మీ

20 చ.సెం.మీ ప్రాంతమునకు రంగు వేయుటకు ఖర్చు = 50 పైసలు = ₹ $\frac{50}{100}$

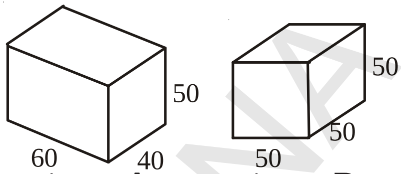
∴ 1 చ.సెం.మీ ప్రాంతమునకు రంగు వేయుటకు ఖర్చు = ₹ $\frac{50}{100} \times \frac{1}{20}$

∴ 10800 చ.సెం.మీ ప్రాంతము రంగు వేయుటకయ్యే ఖర్చు = ₹ $\frac{50}{100} \times \frac{1}{20} \times 10,800$

= ₹ 270

అభ్యాసము -14.1

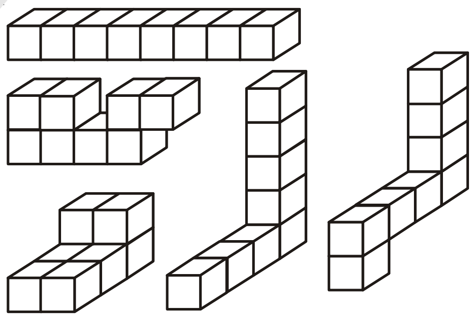
1. పటములో చూపిన విధముగా రెండు దీర్ఘ ఘనాకృతి పెట్టెలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఏ పెట్టెను తయారు చేయడానికి తక్కువ పరిమాణపు సామాగ్రి అవసరమవుతుంది?



2. 600 చ.సెం.మీ. సంపూర్ణతల వైశాల్యము గల సమఘనము యొక్క భుజము పొడవును కనుక్కోండి.
3. ప్రమీల 1 మీ × 2 మీ × 1.5 మీ కొలతలు గల ఒక పెట్టెకు రంగు వేసింది. పెట్టె యొక్క పై ముఖము అడుగు ముఖమును మినహాయించి మిగిలిన ముఖముల వైశాల్యముల మొత్తము ఎంత?
4. 20 సెం.మీ × 15 సెం.మీ. × 12 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనమునకు రంగు వేయుటకు చదరపు సెంటీమీటరునకు 5 పైసలు చొప్పున ఎంతఖర్చువతుంది?

14.3 దీర్ఘ ఘనము మరియు సమ ఘనము ఘనపరిమాణం

అంతరాళములో త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువు ఆక్రమించు పరిమాణమును 'ఘన పరిమాణము' అందురు. మీ చుట్టూ యున్న వస్తువుల యొక్క ఘన పరిమాణములను అంచనా వేయండి. ఉదాహరణకు మీ గది యొక్క ఘనపరిమాణము, గదిలో యున్న బీరువా ఘనపరిమాణము కంటే ఎక్కువ యుంటుంది. అదే విధముగా పెన్సిల్ డబ్బా యొక్క ఘనపరిమాణము దానిలో గల పెన్సిల్ మరియు తుడిచే రబ్బరు కంటే ఎక్కువ యుంటుంది. ఈ వస్తువుల యొక్క ఘనపరిమాణములను కనుగొనగలరా?



మనకు ఒక ప్రాంతపు వైశాల్యమును కనుగొనుటకు చదరపు యూనిట్లను ఉపయోగిస్తామని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అయితే ఘనపరిమాణ ఎలా కనుగొంటాము? ఇక్కడ మనము ఘనపు యూనిట్లలో ఘనపరిమాణాన్ని కొలుస్తాము. దాని ప్రమాణమునకు సమఘనమే తగినది. (వైశాల్యానికి చతురస్ర ప్రమాణములాగా)

వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు వైశాల్యాన్ని యూనిట్లుగా విభజిస్తాము అదే విధముగా ఘనపరిమాణమును కనుగొనేందుకు అంతరాళాన్ని ఘనపు యూనిట్లుగా విభజించాలి. 1 యూనిట్ భుజముగా గల సమఘనమును ఒక ప్రమాణ ఘనముగా పరిగణిస్తారు. ప్రక్క పటములో ప్రతి వస్తువు 8 ఘనపు యూనిట్లు ఘనపరిమాణమును కలిగియుంటుంది. ఘనకార వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును ప్రమాణ ఘనములను లెక్కించి గణిస్తారు.

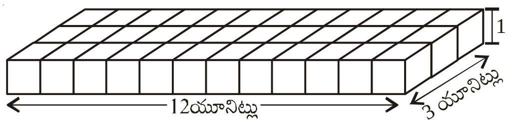
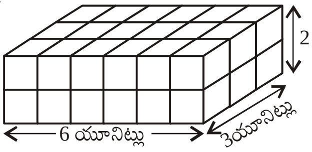
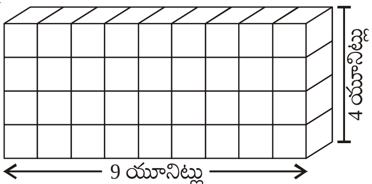
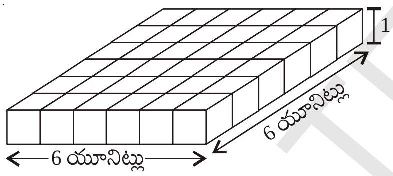
1 ఘనపు సెం.మీ = 1 సెం.మీ × 1 సెం.మీ × 1 సెం.మీ = 1 ఘ.సెం.మీ
= 10 మి.మీ × 10 మి.మీ× 10 మి.మీ = ____________ ఘ.మి.మీ

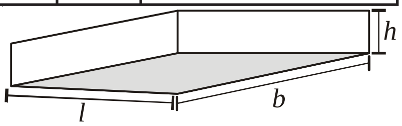
1 ఘనపు మీటరు = 1 మీ × 1 మీ × 1 మీ = 1 ఘ.మీ
= 100 సెం.మీ × 100 సెం.మీ × 100 సెం.మీ = ____________ ఘ.సెం.మీ

1 ఘనపు మి.మీ. = 1 మి.మీ × 1 మి.మీ × 1 మి.మీ = 1 ఘ.మి.మీ
= 0.1 సెం.మీ × 0.1 సెం.మీ × 0.1 సెం.మీ = ____________ ఘ.సెం.మీ

14.3.1 దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము

36 ప్రమాణ ఘనములను తీసుకొని దీర్ఘ ఘనమును తయారు చేయండి. మీరు అనేక విధములుగా అమర్చండి. క్రింది పట్టికను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరింపుము.

	దీర్ఘ ఘనము	పొడవు (l)	వెడల్పు (b)	ఎత్తు (h)	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...



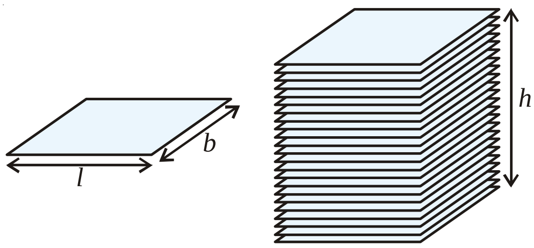
మీరు ఏమి గమనించారు?

ఘనము యొక్క కొలతలకు, ఘనపరిమాణంనకు మధ్య గల సంబంధమును కనుగొంటారా? మనము 36 ప్రమాణ ఘనముల నుపయోగించుట వలన దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘన పరిమాణము 36 ఘనపు యూనిట్లు. ఈ విలువ దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును తెలుపుతుంది. దీని విలువ దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల లబ్ధమునకు సమానముగా గమనించవచ్చు. అందుచే దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘన పరిమాణము. ఈ క్రింది విధముగా సూత్రీకరించవచ్చు. $= l \times b \times h$.

భూమి వైశాల్యాము $l \times b$ కావున దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం = భూవైశాల్యము × ఎత్తు

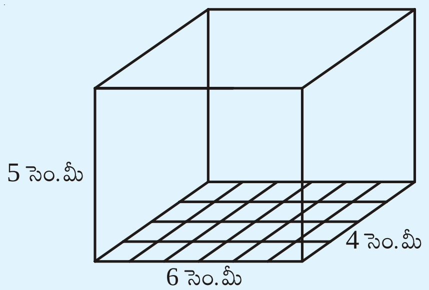
కృత్యము

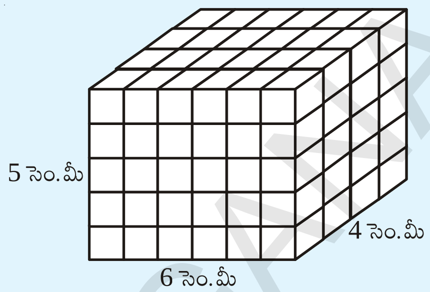
ఒక దళసరి కాగితమును తీసుకోండి. అదే సైజుకల కొన్ని దళసరి కాగితములు పటములో చూపిన విధముగా ఒకదానిపై ఒకటి పేర్చి చూస్తే దీర్ఘ ఘనము ఏర్పడుతుంది. దళసరి కాగితము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొని ఆ విలువను కాగితపు పేర్పు యొక్క ఎత్తుతో గుణించి ఆ పేర్పు ఘనపరిమాణము కనుగొనండి. ఇలా ఒక కాగితపు ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనగలవా?



ఇవి చేయండి.

6 సెం.మీ., 4 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘన పరిమాణమును కనుక్కోండి.





ఒక ఘనపు సెం.మీ. భుజముగాగల ప్రమాణ ఘనములను దీర్ఘ ఘనము పొడవు వెంబడి పేర్చుము. దీని కొరకు మనకు ఎన్ని ఘనములు అవసరము? 6 ప్రమాణ ఘనములు అవసరము.

వెడల్పు వెంబడి ఎన్ని ప్రమాణ ఘనములు పేర్చవచ్చు? 4 ప్రమాణ ఘనములు దీనికి గల కారణము దీర్ఘ ఘనము యొక్క వెడల్పు 4 సెం.మీ. అనగా ఒక పొరలో 6×4 ప్రమాణ ఘనములు ఉంటాయి.

దీర్ఘ ఘనములో ప్రమాణ ఘనములు అమర్చే పొరలు ఎన్ని? 5 పొరలు అనగా దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఎత్తు 5 సెం.మీ. ప్రతి పొర 6×4 ఘనములు కలవు. కావున 5 పొరలలో $6 \times 4 \times 5$ ప్రమాణ సమఘనాల దిమ్మలు ఉంటాయి. అనగా $l \times b \times \mathrm{h}$ కు సమానం.

పై చర్చ దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమునకు సూత్రము నిచ్చును.

దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణము = పొడవు $\times$ వెడల్పు $\times$ ఎత్తు

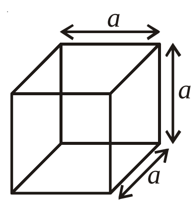
14.3.2 సమ ఘన ఘనపరిమాణము

పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు కొలతలు సమానముగా గల దీర్ఘ ఘనమును సమఘనము అందురు.

అందుచే సమ ఘనం ఘనపరిమాణము = భుజం $\times$ భుజం $\times$ భుజం

= (భుజం)^3 = a^3

సమ ఘనము యొక్క భుజం a అయిన ఘనపరిమాణం = a^3 అగును



సమఘనం పొడవు	సమఘనం ఘనపరిమాణం
10 మి.మీ = 1సెం.మీ	1000 మి.మీ^{3} = 1 సెం.మీ^{3}
10 సెం.మీ = 1డెకా మీ	1000 సెం.మీ^{3} = 1 డెకామీ^{3}
10 డెకా మీ = 1 మీ	1000 డెకా మీ^{3} = 1 మీ^{3}
100 సెం.మీ = 1 మీ	1000000 సెం.మీ^{3} = 1 మీ^{3}
1000 మీ = 1 కి.మీ	1000000000 మీ^{3} = 1 కి.మీ^{3}

సాధారణంగా, ద్రవ పదార్థముల యొక్క ఘన పరిమాణములను ఘనపు మిల్లీ మీటర్లు(మి.లీ) లేదా లీటర్లలో (లీ) కొలుస్తారు.

1 సెం.మీ^{3} = 1 మిల్లీ లీటరు

1000 సెం.మీ^{3} = 1 లీటరు

1 మీ^{3} = 1000000 సెం.మీ^{3} = 1000 లీటర్లు

= 1 కిలో లీటరు(కి.లీ).

ఉదాహరణ 5: 20 సెం.మీ. పొడవు, 10 సెం.మీ. వెడల్పు మరియు 8 సెం.మీ. ఎత్తు కొలతలు కలిగిన దీర్ఘ ఘనాకృతి కర్ర దుంగ యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనుము?

సాధన : దీర్ఘ ఘనాకృతి ఘనపరిమాణము = $l \times b \times h$

ఇక్కడ పొడవు (l) = 20 సెం.మీ వెడల్పు (b) = 10 సెం.మీ మరియు ఎత్తు (h) = 8 సెం.మీ కావున

కర్ర దుంగ యొక్క ఘనపరిమాణము = 20 సెం.మీ × 10 సెం.మీ × 8 సెం.మీ = 1600 ఘ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 6: ఒక నీళ్ళ ట్యాంకు 1.4 మీ పొడవు, 1 మీ వెడల్పు మరియు 0.7 మీ. లోతు కలిగి యున్నది. ట్యాంకు యొక్క ఘనపరిమాణమును లీటర్లులో కనుగొనుము?

సాధన : ట్యాంకు యొక్క పొడవు (l) = 1.4 మీ = 140 సెం.మీ.

ట్యాంకు యొక్క వెడల్పు (b) = 1 మీ = 100 సెం.మీ.

1 లీటరు = 1000 ఘ.సెం.మీ

ట్యాంకు యొక్క ఎత్తు (h) = 0.7 మీ = 70 సెం.మీ.

ట్యాంకు యొక్క ఘనపరిమాణము = $l \times b \times h$

= (140 × 100 × 70) ఘ.సెం.మీ

= $\dfrac{140 \times 100 \times 70}{1000}$ లీటర్లు

= 980 లీటర్లు.

ఇవి చేయండి.

64 ప్రమాణ ఘనముల నుపయోగించి మీరు ఏర్పరచ గల దీర్ఘ ఘనములు ఎన్ని? ప్రతీ అమరిక యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుక్కోండి. సమాన ఘన పరిమాణము కలిగిన ఘనముల యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యములు సమానమేనా?

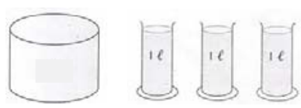
మీకు తెలుసా ?

సామర్థ్యము

ఘనపరిమాణము, సామర్థ్యముల మధ్య తేడా బహుస్వల్పం.

(a) ఒక వస్తువు ఆక్రమించే అంతరాళపు పరిమాణమును ఘనపరిమాణము అందురు.

(b) డబ్బా యొక్క సామర్థ్యము అది నిల్వ ఉంచుకోగల పదార్థ ఘనపరిమాణము. ఒక నీళ్ళ ట్యాంకులో నింపగల నీటి పరిమాణము 100 సెం.మీ^{3} అయితే ఆ ట్యాంకు సామర్థ్యము 100 సెం.మీ^{3}. సామర్థ్యమును లీటర్లలో కూడా కొలుస్తారు.



ఘనపరిమాణము సామర్థ్యము

ఉదాహరణ 7: దీర్ఘ ఘనము యొక్క వెడల్పు, పొడవులో సగం, ఎత్తు దాని పొడవునకు రెట్టింపు అయితే దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణము కనుక్కోండి.

సాధన : దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు $= x$ యూనిట్లు

దీర్ఘ ఘనము యొక్క వెడల్పు $= \frac{x}{2}$ యూనిట్లు

దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఎత్తు $= 2x$ యూనిట్లు

దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము = పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు

$= (x \times \frac{x}{2} \times 2x)$ ఘనపు యూనిట్లు

$= x^3$ ఘనపు యూనిట్లు

ఉదాహరణ 8: ఒక పెట్టె యొక్క పొడవు 1.8 మీ., వెడల్పు 90 సెం.మీ., ఎత్తు 60 సెం.మీ. పెట్టెలో అమర్చే సబ్బు యొక్క కొలతలు 6 సెం.మీ × 4.5 సెం.మీ × 40 మి.మీ. సబ్బులు అమర్చిన తరువాత పెట్టెలో ఏ విధమైన ఖాళీ స్థలం మిగలలేదు. ఒక పెట్టెలో అమర్చగలిగే సబ్బులు ఎన్ని?

సాధన : పెట్టె యొక్క పొడవు (l) = 1.8 మీ = 180 సెం.మీ.

వెడల్పు (b) = 90 సెం.మీ.

ఎత్తు (h) = 60 సెం.మీ.

పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము $= l \times b \times h$

$= 180 \times 90 \times 60$ ఘ.సెం.మీ

$= 972000$ సెం.మీ^{3}

సబ్బు యొక్క పొడవు = 6 సెం.మీ.

వెడల్పు = 4.5 సెం.మీ.

ఎత్తు = 40 మి.మీ = 4 సెం.మీ.

సబ్బు యొక్క ఘనపరిమాణము $= 6 \times 4.5 \times 4$ ఘ.సెం.మీ

$= 108.0$ ఘ.సెం.మీ

∴ కావలసిన సబ్బుల సంఖ్య $= \dfrac{\text{పెట్టె ఘనపరిమాణం}}{\text{ప్రతి సబ్బు యొక్క ఘనపరిమాణం}}$

$= \dfrac{972000}{108}$

$= 9000$

అంటే పెట్టెలో నింప గలిగే సబ్బుల సంఖ్య = 9000.

ఉదాహరణ 9: 21 సెం.మీ., 9 సెం.మీ. మరియు 8 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనాకార కర్ర దుంగను 3 సెం.మీ భుజముగాగల సమ ఘనముగా కత్తిరిస్తే ఎన్ని సమ ఘనములు వస్తాయి? ఎంత ఘనపరిమాణము గల కర్ర దుంగ వృధా అవుతుంది?

సాధన : కర్ర దుంగ పొడవు (l) = 21 సెం.మీ.

వెడల్పు (b) = 9 సెం.మీ.

ఎత్తు (h) = 8 సెం.మీ.

కర్ర దుంగ ఘనపరిమాణము = $21 \times 9 \times 8 = 1512$ ఘ.సెం.మీ

పొడవు వెంబడి కత్తిరించగల సమ ఘనముల సంఖ్య $= \frac{21}{3} = 7$

వెడల్పు వెంబడి కత్తిరించగల సమ ఘనముల సంఖ్య $= \frac{9}{3} = 3$

ఎత్తు వెంబడి కత్తిరించగల సమ ఘనముల సంఖ్య $= \frac{8}{3} = 2.6 = 2$

ఎత్తు వెంబడి మనము కత్తిరించగల సమ ఘనముల సంఖ్య 2 మాత్రమే మిగిలిన భాగము వృధా అవుతుంది.

$\therefore$ మొత్తము సమ ఘనముల సంఖ్య $= 7 \times 3 \times 2$

$= 42$

ప్రతి సమ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము $= 3 \times 3 \times 3 = 27$ ఘ.సెం.మీ

అన్ని ఘనముల ఘనపరిమాణము $= 27 \times 42$

$= 1134$ ఘ.సెం.మీ

$\therefore$ వృధా అయిన కర్ర దుంగ ఘనపరిమాణము $= 1512 - 1134 = 378$ ఘ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 10: ఒక రిజర్వాయరులోనికి నిమిషమునకు 60 లీటర్లు నీరు పంపు చేయబడుచున్నది. ఆ రిజర్వాయరు ఘనపరిమాణము 108 ఘ.మీ.లు అయిన ఆ రిజర్వాయరును నింపుటకు ఎన్నిగంటల సంమయం పడుతుంది ?

సాధన : రిజర్వాయరు యొక్క ఘనపరిమాణం = 108 ఘ.మీ = 108×1000 లీటర్లు

($\because$ 1 ఘ.మీ = 1000 లీటర్లు)

రిజర్వాయరును నిమిషానికి 60 లీటర్లు చొప్పున నింపుతూ ఉంటే

రిజర్వాయరును నింపడానికి పట్టే కాలం $= \frac{108 \times 1000}{60}$ నిమిషాలు.

$= \frac{108 \times 1000}{60 \times 60}$ గంటలు = 30 గంటలు.

ఉదాహరణ 11 : ఒక గ్రామము యొక్క జనాభా 4000, ప్రతి రోజు ఆ గ్రామములోని ప్రతీ ఒక వ్యక్తికి రోజుకి 150 లీటర్ల నీరు అవసరము. నీటి ట్యాంకు యొక్క కొలతలు 20 మీ, 15 మీ , 6 మీ. ఒక ట్యాంకు నీళ్ళు ఎన్ని రోజులుకు సరిపడుతుందో లెక్కకట్టుము?

సాధన : ట్యాంకు యొక్క ఘనపరిమాణము $= 20$ మీ $\times 15$ మీ $\times 6$ మీ

$= 1800$ ఘ.మీ $= 1800000$ లీ

ఒక వ్యక్తికి ఒకరోజుకు అవసరమయ్యే నీటి పరిమాణము = 150 లీటర్లు.

గ్రామము మొత్తం జనాభాకి ఒక రోజులో అవసరమయ్యే నీటి పరిమాణం $= 150 \times 4000$ లీ

$$\text{నీరు సరిపోవు రోజుల సంఖ్య} = \frac{\text{ట్యాంకు ఘనపరిమాణం}}{\text{ఒకరోజులో అవసరమయ్యే నీటి ఘనపరిమాణం}}$$

$$= \frac{1800000}{150 \times 4000} = 3 \text{ రోజులు}$$

అభ్యాసము - 14.2

1. ఈ క్రింది కొలతలు కలిగిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు
(i)	8.2 మీ	5.3 మీ	2.6 మీ
(ii)	5.0 మీ	4.0 మీ	3.5 మీ
(iii)	4.5 మీ	2.0 మీ	2.5 మీ

2. ఈ క్రింది కొలతలు కలిగిన ట్యాంకు యొక్క సామర్థ్యమును ఘనపు మీటర్లు మరియు లీటర్లలో కనుగొనుము.

	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు
(i)	3 మీ 20 సెం.మీ	2 మీ 90 సెం.మీ	1 మీ 50 సెం.మీ
(ii)	2 మీ 50 సెం.మీ	1 మీ 60 సెం.మీ	1 మీ 30 సెం.మీ
(iii)	7 మీ 30 సెం.మీ	3 మీ 60 సెం.మీ	1 మీ 40 సెం.మీ

3. ఒక సమ ఘనము యొక్క భుజమును సగము చేస్తే దాని ఘన పరిమాణము తగ్గుతుందా? మారినచో ఎంత తగ్గును?

4. ఈ కింది కొలతలు భుజంగా కలిగిన సమ ఘనముల యొక్క ఘనపరిమాణము కనుక్కోండి.

   (i) 6.4 సెం.మీ (ii) 1.3 మీ (iii) 1.6 మీ

5. 8 మీ × 22.5 సెం.మీ × 6 మీ కొలతలు గాగల ఒక గోడను నిర్మించుటకు 25 సెం.మీ × 11.25 సెం.మీ × 6 సెం.మీ కొలతలుగాగల ఇటుకలెన్ని అవసరము?

6. 25 సెం.మీ. పొడవు, 15 సెం.మీ వెడల్పు మరియు 8 సెం.మీ ఎత్తు కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణము, ప్రతీ భుజము 16 సెం.మీ గాగల సమ ఘనము ఘన పరిమాణముతో ఎంత తేడా కలదు?

7. 1 సెం.మీ. మందము కలిగిన చెక్కతో 5 సెం.మీ. × 4 సెం.మీ × 7 సెం.మీ. వెలుపలి కొలతలు కలిగిన మూతగల పెట్టెను తయారు చేయడానికి ఎంత ఘనపరిమాణము గల చెక్క అవసరము?

8. 20 సెం.మీ × 18 సెం.మీ × 16 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనము నుండి 4 సెం.మీ. భుజముగాగల ఎన్ని సమ ఘనములను ఏర్పరచవచ్చు?

9. 12 సెం.మీ. × 9 సెం.మీ. × 6 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనము నుండి 4 సెం.మీ. × 3 సెం.మీ. × 2 సెం.మీ. కొలతలుగాగల దీర్ఘ ఘనములను ఎన్నింటిని తయారు చేయవచ్చు?

10. దీర్ఘ ఘనాకృతిలో యున్న ఒక పాత్ర 30 సెం.మీ. పొడవు, 25 సెం.మీ. వెడల్పు కలిగి యున్నది. దానిలో 4.5 లీటర్ల నీటిని నింపుటకు ఎంత ఎత్తును కలిగి యుండాలి?

మనం ఏమి చర్చించాం

1. పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు l, b మరియు h లు అయితే దీర్ఘ ఘనము యొక్క కొలతలు

   (i) దీర్ఘ ఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం $2h(l + b)$

   (ii) దీర్ఘ ఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యం $2(lb + bh + hl)$

2. a భుజముగాగల సమఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం $4a^2$

3. సమఘనము సంపూర్ణతల వైశాల్యము $6a^2$

4. దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం $l \times b \times h$

5. సమఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం = భుజం × భుజం × భుజం = a^3

6. 1 సెం.మీ^{3} = 1 మిల్లి లీటరు

   1 లీటరు = 1000 ఘ.సెం.మీ

   1మీ^{3} = 1000000 ఘ.సెం.మీ = 1000 లీటర్లు

   = 1 కి.లీ (కిలో లీటరు).

అధ్యాయం 15

సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం

15.0 పరిచయం

సంఖ్యలు లేనటువంటి ప్రపంచాన్ని ఊహించండి.
సంఖ్యలు లేకుండా మనకు రోజు ఏవిధంగా గడుస్తుంది ?
మనకి కేలండర్ లేనిచో, ఆరోజు ఏనెల? ఎన్నవ రోజు? మొ॥వి మనకు తెలియదు. మీ స్నేహితులకు ఫోన్ చేసి వారితో మాట్లాడలేరు. ఇంటి నెంబరు లేనిచో అపరిచితులు వచ్చి మీ ఇంటి తలుపులు తడుతూ ఉంటారు. ఇవి కొన్ని ఉదాహరణలు మాత్రమే. ఇంకా ఏ విధంగా ఉంటుందో ఊహించండి. మీరు స్కూలుకు సకాలములో వెళ్లలేరు. మీకు ఇష్టమైన కార్టూన్ సీరియల్స్ సరియగు సమయానికి ప్రసారం కావు. ఆటలు ఆడుటకు సరియగు సమయము మీకు ఉండదు. అందుకే సంఖ్యలు లేని ప్రపంచం మనం ఊహించలేము. వస్తువులు కొనాలన్నా, అమ్మాలన్నా, కావలసిన రీతిలో పంచుటకు సంఖ్యలు కావలెను. అంతేకాక, ఈ సంఖ్యలతో పాటు వాటిని ఉపయోగించు నాలుగు ప్రధాన పరిక్రియలు కావలెను. పరిక్రియలతో ముడిపడి ఉన్న భాజనీయతా సూత్రములు వాటి వెనుక దాగియున్న (హేతుబద్ధమైన కారణములు) లాజిక్ తెలుసుకొందాము.

15.1 భాజనీయతా సూత్రములు

కొన్ని సంఖ్యలు తీసుకుని వాటిని 2, 3, 4, 5, 6, 7 లచే భాగించబడతాయో పరీక్షించుము.

ఒక సంఖ్య 'a' మరొక సంఖ్య 'b' ను భాగించడము అంటే నిశ్శేషముగా భాగించుట అని అర్థం. దీనినే b, a చే భాగించబడును అంటాం.

ఈ అధ్యాయములో మనము సంఖ్యల భాజనీయత మరియు దాని వెనుక గల కారణములను నేర్చుకొంటాము.

15.1.1 అంకెల స్థాన విలువ :

645 అనే సంఖ్యను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయగా

$645 = 600 + 40 + 5 = 6 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

ఈ సంఖ్యలో 6 యొక్క స్థాన విలువ 600, 4 యొక్క స్థాన విలువ 40, 5 యొక్క స్థాన విలువ 5. ఇందు 6 వందలు, 4 పదులు, 5 ఒకట్లు కలవు.

ఇవి చేయండి:

ఈ క్రింది సంఖ్యలలో దిగువ గీత గీయబడిన అంకెల యొక్క స్థాన విలువలు రాయండి.

(i) 29879 (ii) 10344 (iii) 98725

15.1.2 సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయుట :

ఒక సంఖ్యను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయుట మనకు తెలియును. అంతే కాకుండా వాటి స్థానవిలువలను ఘాతాంక రూపంలో వ్రాయుట కూడా మనకు తెలుసు.

ఉదాహరణకు

సాధారణ రూపం		విస్తరణ రూపం		
68 =60+8	=	$(10 \times 6) + 8$	=	$(10^1 \times 6) + (10^0 \times 8)$
72=70+2	=	$(10 \times 7) + 2$	=	$(10^1 \times 7) + (10^0 \times 2)$

$10^0 = 1$అని మనకు తెలియును.

పదుల స్థానములో 'a', ఒకట్ల స్థానములో 'b' కల ఒక రెండంకెల సంఖ్య $(10a + b)$ తీసుకొనుము.

దీనిని $(10\times a) + b = (10^1\times a) + (1\times b)$ $(a \neq 0)$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇదేవిధముగా ఒక మూడంకెల సంఖ్యను 658 తీసుకొనుము. దీనిని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

సాధారణ రూపం విస్తరణ రూపం

$$658 = 600 + 50 + 8 = 100 \times 6 + 10 \times 5 + 1 \times 8 = 10^2 \times 6 + 10^1 \times 5 + 1 \times 8$$

$$759 = 700 + 50 + 9 = 100\times7 + 10\times5 + 1\times9 = 10^2 \times7 + 10^1\times5 + 1\times9$$

a, b, c అంకెలుగా కల మూడు అంకెల సంఖ్యను సాధారణంగా $10^2a + 10^1b + c$

$= 100\times a + 10\times b + c = 100a + 10b + c, (a \neq 0)$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇదే విధంగా 4 అంకెల సంఖ్యను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$3456 = 3000 + 400 + 50 + 6 = 1000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 6$$
$$= 10^3 \times 3 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 5 + 6$$

a, b, c, d లు అంకెలుగా కల నాలుగు అంకెల సంఖ్యను సాధారణంగా

$$1000a + 100b + 10c + d = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d \ (a \neq 0)$$
$$= 10^3a + 10^2b + 10^1 c + d$$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇవి చేయండి :

1. క్రింది సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయండి.

   (i) 65 (ii) 74 (iii) 153 (iv) 612

2. క్రింది సంఖ్యల విస్తరణ రూపాల్ని, సాధారణ రూపంలోకి మార్చండి.

   (i) $10 \times 9 + 4$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 4 + 3$

3. క్రింది ఖాళీలు పూరించండి.

   (i) $100 \times 3 + 10 \times$ _____ $+ 7 = 357$

   (ii) $100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 =$ _________

   (iii) $100 \times$ _____ $+ 10 \times 3 + 7 = 737$

   (iv) $100 \times$ ____ $+ 10 \times q + r = \overline{pqr}$

   (v) $100 \times x + 10 \times y + z =$ ____________

15.1.3 సంఖ్యల కారణాంకాలు, గుణిజములు:

$1 \times 36 = 36$	$4 \times 9 = 36$
$2 \times 18 = 36$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 12 = 36$	

36 యొక్క కారణాంకాలు తెల్పండి?

36 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

36 యొక్క గరిష్ఠ కారణాంకము ఏది ?

ప్రతి కారణాంకము ఇచ్చిన సంఖ్య కంటే తక్కువ లేక సమానంగా ఉంటుంది. అంతేకాక ప్రతి సంఖ్యా దానికదే కారణాంకము అవుతుంది. '1'ప్రతి సంఖ్యకు కారణాంకము అవుతుంది.

$7 \times 1 = 7$, $9 \times 1 = 9$,

1 తప్ప మిగిలిన సహజసంఖ్యలలో 1 మరియు అదే సంఖ్య తప్ప వేరే ఇతర కారణాంకములు లేకుంటే, ఆసంఖ్యను ఏమంటారు? అటువంటి సంఖ్యలను **ప్రధాన సంఖ్యలు** అంటారు.

ఉదా : 2, 3, 5, 7, 11, 13,.... మొ॥వి ప్రధాన సంఖ్యలు.

వరుస అంకెలతో ఏర్పడిన సంఖ్యలను పరిశీలించండి. 23 , 4567 , 89 అవి ప్రధాన సంఖ్యలు

మీకు ఇది తెలుసా ?

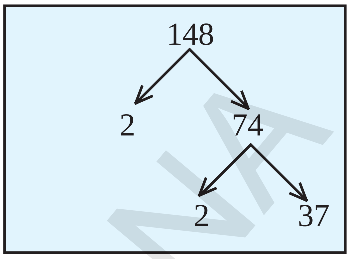
దిగువ 82తో ప్రారంభించి సహజసంఖ్యలను వెనుకకు 1 వరకు వ్రాయగా వచ్చు సంఖ్య ఇవ్వబడినది.

828180797877767574737271706968676665646362616059585756555453525150494847464544434241403938373635343332313029282726252423222120191817161514131211109876543 21

ఇందులో ఎన్ని అంకెలున్నాయి? ఇంత పెద్దదయిన ఇది ప్రధాన సంఖ్యయే.

అదేవిధంగా మరికొన్ని సంఖ్యలు 191, 911, 199, 919, 991 లు ప్రధాన సంఖ్యలు అవునో కాదో పరిశీలించండి.

148 ని, ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయండి.



$$148 = 2 \times 74 = 2 \times 2 \times 37 = 2^2 \times 37^1$$

కారణాంకాల సంఖ్య = ప్రతి ప్రధాన కారణాంకముల ఘాతాంకములకు 1 కలపగా వచ్చు సంఖ్యల లబ్ధం

కావున 148 కి కారణాల సంఖ్య = $(2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

148 కారణాంకములు 1, 2, 4, 37, 74, 148.

ఒక సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధముగా వ్రాయగా $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ...

N యొక్క కారణాంకముల సంఖ్య $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ ...

6 యొక్క మొదటి 5 గుణిజములు వ్రాయండి.

$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 18$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$

6, 12, 18, 24, 30, ... 6 యొక్క మొదటి 5 గుణిజములు.

ఒక సంఖ్యకు ఎన్ని గుణిజములు మనం వ్రాయవచ్చును? అనంతమైన గుణిజములు వ్రాయగలము. ఒక సంఖ్యకు అనంతమైన గుణిజములు ఉంటాయి.

ఇవి చేయండి :

1. క్రింది సంఖ్యల యొక్క కారణాంకములన్నింటిని వ్రాయండి.
   (a) 24 (b) 15 (c) 21 (d) 27
   (e) 12 (f) 20 (g) 18 (h) 23 (i) 36
2. క్రింది సంఖ్యల యొక్క మొదటి 5 గుణిజములు వ్రాయండి.
   (a) 5 (b) 8 (c) 9
3. క్రింది సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధంగా వ్రాయండి.
   (a) 72 (b) 158 (c) 243

15.1.4 10 యొక్క భాజనీయతా నియమము :

10 యొక్క గుణిజములను గమనించండి. 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...మొ॥నవి.

ఈ సంఖ్యల యొక్క ఒకట్ల స్థానములోని అంకె '0'.

10 యొక్క అన్ని గుణిజముల యందు ఒకట్ల స్థానములు '0'అయిన అది 10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును.

దీనికి గల కారణము మనము పరిశీలిద్దాము.

ఒకట్ల స్థానములో ‘c’, పదుల స్థానములో ‘b’, వందల స్థానములో ‘a’ కలిగిన ఒక మూడంకెల సంఖ్యను తీసుకుందాము. దానిని $100a + 10b + c = 10(10a + b) + c$ గా వ్రాయవచ్చును.

$10(10a + b)$, 10 చే భాగింపబడుతుంది. c, 10 యొక్క గుణిజము అయిన ఇచ్చిన సంఖ్య 10 చే భాగింపబడుతుంది. ఇది $c = 0$ అయినపుడు మాత్రమే సాధ్యము.

ఇవి చేయండి:

1. క్రింది సంఖ్యలు 10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
   (a) 3860 (b) 234 (c) 1200 (d) 10^3 (e) 10 + 280 + 20
2. క్రింది సంఖ్యలు 10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
   (a) 10^{10} (b) 2^{10} (c) $10^3 + 10^1$

ప్రయత్నించండి :

1. 56Z అను సంఖ్య 10 తో భాగించిన వచ్చు శేషము 6. అయితే Z యొక్క విలువ కనుక్కోండి.

15.1.5 5 యొక్క భాజనీయతా నియమము :

5 యొక్క గుణిజములను గమనించండి. అవి 5,10,15, 20,25,30,35 ,40,45,50,............మొ॥వి

ఈ సంఖ్యల యొక్క ఒకట్ల స్థానములోని అంకెలు ‘0’ లేదా ‘5’

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములోని అంకె ‘0’ లేదా ‘5’ అయిన ఆ సంఖ్య ‘5’తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును.

దీనికి గల కారణమును పరిశీలిద్దాము.

ఒకట్ల స్థానములో 'c', పదుల స్థానములో 'b', వందల స్థానములో 'a' కలిగిన ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను తీసుకొందాము. దానిని

$100a + 10b + c = 5(20a + 2b) + c$ గా వ్రాయవచ్చు.

$5(20a + 2b)$, 5 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య

5 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న ఒకట్ల స్థానములోని అంకె $c = 0$ లేదా 5 కావలెను.

ఇవి చేయండి :

1. క్రింది సంఖ్యలు 5 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి
   (a) 205 (b) 4560 (c) 402 (d) 105 (e) 235785

34A అను సంఖ్య 5తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన A కు ఏయే విలువలు ఉండవచ్చు?

ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో A కలదు. ఇచ్చిన సంఖ్య '5' తో భాగింపబడవలెనన్న ఒకట్ల స్థానములో '0' లేదా '5' ఉండవలెను. కావున A = 0 లేదా 5.

ప్రయత్నించండి :

1. 4B ను 5 తో భాగించిన '1' శేషము వచ్చును. అయిన B కు ఏయే విలువలు ఉండవచ్చును?
2. 76C ను 5 తో భాగించిన '2' శేషము వచ్చును. అయిన Cకు ఏయే విలువలు ఉండవచ్చును?
3. "ఒక సంఖ్య 10తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, 5తో కూడా నిశ్శేషముగా భాగింపబడుతుంది" ఈ వాక్యము సత్యమో / అసత్యమో తెల్పండి. దానికి తగు కారణము తెల్పండి.
4. "ఒక సంఖ్య 5తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, 10తో కూడా నిశ్శేషముగా భాగింపబడు తుంది". ఈ వాక్యము సత్యమో / అసత్యమో తెల్పండి. తగు కారణము తెల్పండి.

15.1.6 2 యొక్క భాజనీయతా నియమము:

2 యొక్క గుణిజములు పరిశీలించండి: అవి 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...మొ॥నవి.

ఈ సంఖ్యలలో ఒకట్ల స్థానము నందలి అంకెను గమనించండి. అవి 0,2,4,6, 8 (సరి సంఖ్యలు) అగుచున్నవి.

ఒక సంఖ్య 2 చే భాగింపబడవలెనన్న, ఆ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానము నందు (సరిసంఖ్య) 0 లేదా 2 లేదా 4 లేదా 8 ఉండవలెను. లేనిచో అది భాగించబడదు.

దీనికి గల కారణము పరిశీలిద్దాము.

వందల స్థానంలో a, పదుల స్థానంలో b మరియు ఒకట్ల స్థానంలో c గల మూడంకెల సంఖ్య 100a + 10b + c ను తీసుకొనుము. దీనినే 2(50a + 5b) + c గా వ్రాయవచ్చును.

2(50a + 5b), 2 యొక్క గుణిజము. ఇచ్చిన సంఖ్య 2 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్నా ఒకట్ల స్థానములో గల అంకె 'c' 0 లేక 2 లేక 4 లేక 6 లేక 8 (సరిసంఖ్య) కావలెను.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

1. ఒక సంఖ్య 5 మరియు 2 చే భాగింపబడునపుడు వచ్చు శేషములు వరుసగా 3 మరియు 1 అయిన ఆ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములోని అంకెను కనుగొనుము.

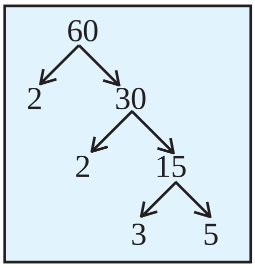
ఉదాహరణ 1: 60 కు కల కారణాంకముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన : 60 ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధముగా వ్రాసిన $2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$\therefore$ కారణాంకముల సంఖ్య $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$

$\therefore$ ఆ కారణాంకములు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60



అభ్యాసము - 15.1

1. భాజనీయతా సూత్రములుపయోగించి, క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన అంకెలు, 2,5,10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన అవును అని, భాగింపబడనిచో కాదు అని వ్రాయండి.

సంఖ్య	2తో భాగించబడును	5తో భాగించబడును	10తో భాగించబడును
524	అవును	కాదు	కాదు
1200			
535			
836			
780			
3005			
4820			
48630			

2. భాజనీయతా నియమము ద్వారా క్రింది సంఖ్యలలో ఏవి '2' తో భాగింపబడునో తెల్పండి.

   (a) 2144 (b) 1258 (c) 4336 (d) 633 (e) 1352

3. భాజనీయతా నియమము ద్వారా క్రింది సంఖ్యలలో ఏవి '5' తో భాగింపబడునో తెల్పండి.

   (a) 438750 (b) 179015 (c) 125 (d) 639210 (e) 17852

4. భాజనీయతా నియమము ద్వారా క్రింది సంఖ్యలలో ఏవి '10' తో భాగింపబడునో తెల్పండి.

   (a) 54450 (b) 10800 (c) 7138965 (d) 7016930 (e) 10101010

5. క్రింది సంఖ్యలకు కారణాంకాల సంఖ్యను కనుగొనండి.

   (a) 18 (b) 24 (c) 45 (d) 90 (e) 105

6. 2, 5 మరియు 10తో భాగింపబడే ఏవైనా 5 సంఖ్యలను తెల్పండి.

7. 34A అను సంఖ్య '2' తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. 5తో భాగింపబడిన శేషము '1' అయిన 'A' విలువ కనుగొనుము.

15.1.7 3 మరియు 9 యొక్క భాజనీయతా నియమము :

ఏదైనా ఒక సంఖ్య 378 తీసుకోండి. 378 ను క్రింది విధంగా వ్రాయవచును.

$$378 = 300 + 70 + 8$$
$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$

ఇక్కడ 3 ను కారణాంకముగా తీసుకొనలేము. $= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$

ఈ సంఖ్యలను తిరిగి అమర్చి వ్రాయగా

$$
\begin{aligned}
378 &= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8) \\
&= 99 \times 3 + 3 \times 3 \times 7 + (3 + 7 + 8) \\
&= 3\,(99 + 21) + (3 + 7 + 8)
\end{aligned}
$$

$3(99 + 21)$, 3 చే భాగింపబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 3చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న $(3 + 7 + 8)$, 3చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెను. అనగా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తం, 3 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడాలి.

9 యొక్క భాజనీయత :

378 ను క్రింది విధంగా వ్రాసిన

$$
\begin{aligned}
378 &= 300 + 70 + 8 \\
&= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8 \\
&= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8 \\
&= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8) \\
&= 9\,(11 \times 3 + 1 \times 7) + (3 + 7 + 8) \\
&= 9\,(33 + 7) + (3 + 7 + 8)
\end{aligned}
$$

$9(33 + 7)$, 9 చే భాగింపబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య '9' చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న $3 + 7 + 8$ (అనగా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తము) 9 చే భాగింపబడవలెను.

దీనికి గల కారణమును పరిశీలిద్దాం.

ఒకట్ల స్థానములో 'c', పదుల స్థానములో 'b', వందల స్థానములో 'a' కలిగిన 3-అంకెల సంఖ్యను 100a+10b+c తీసుకోండి. దానిని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$
\begin{aligned}
100a + 10b + c &= (99 + 1)a + (9 + 1) + c = 99a + 9b + (a + b + c) \\
&= 9(11a + b) + (a + b + c)
\end{aligned}
$$

a + b + c
దత్త సంఖ్యలో అంకెల మొత్తము

$9(11a + b)$, 3 మరియు 9తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య 3 లేక 9 తో భాగింపబడవలెనన్న $a + b + c$ (ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తము) 3 లేక 9 తో భాగింపబడవలెను.

ఈ నియమము 5 లేక 6 అంకెలు కల సంఖ్యలకు కూడా వర్తిస్తుందా? సరి చూడండి.

పై చర్చ నుండి 2,5 మరియు 10 యొక్క భాజనీయతా నియమములు కేవలం ఒకట్ల స్థానముతో కల అంకె ఆధారంగా నిర్ణయిస్తాము. కాని 3 మరియు 9 యొక్క భాజనీయతా నియమములు, అన్ని అంకెలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అని తెలియుచున్నది.

ఇది చేయండి:

1. క్రింది సంఖ్యలు 3 లేక 9 లేక రెండింటితోను నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో భాజనీయతా నియమములు ఆధారంగా తెల్పండి.

(a) 3663 (b) 186 (c) 342 (d) 18871
(e) 120 (f) 3789 (g) 4542 (h) 5779782

ఉదాహరణ 2: 24 P అను సంఖ్యను 3తో భాగించిన శేషము 1 మరియు 5 తో భాగించిన శేషము 2. అయిన 'P' విలువ కనుగొనుము.

సాధన : 24 P ను 5 తో భాగించినపుడు శేషము 2 కావున P= 2 లేదా 7 కావలెను.

P = 2 అయినపుడు ఆ సంఖ్యను 3తో భాగించగా వచ్చు శేషము 2 అగును. కాని 3తో భాగించినపుడు వచ్చు శేషము 1 కావున P = 7 కావలెను.

అభ్యాసము -15.2

1. 345 A 7, 3 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన 'A' యొక్క విలువ కనుగొనుము.
2. 2791 A , 9తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన 'A' యొక్క విలువ కనుగొనుము.
3. 2,3,5,9 మరియు 10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడు కొన్ని సంఖ్యలు పేర్కొనండి.
4. 2A8 అనుసంఖ్య 2తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, Aకు ఎన్ని విలువలు ఉండవచ్చు? ఏమి గమనించితిరి?
5. 50B, 5తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, Bకు కల విలువలు కనుక్కోండి.
6. 2P అను సంఖ్య 2 తో 3తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, P విలువ కనుక్కోండి.
7. 54Z, 5తో భాగించిన 2 శేషము వచ్చును. మరియు 3తో భాగించినపుడు 1శేషము వచ్చును. అయిన Zవిలువ కనుక్కోండి ?
8. 27Q, 5 తో భాగించినపుడు 3 శేషము, 2తో భాగించినపుడు 1శేషము వచ్చును. అయిన 3 తో భాగించినపుడు వచ్చు శేషము కనుగొనుము.

15.1.8 6 యొక్క భాజనీయత :

6 యొక్క ఒక గుణిజము 24.

ఇది 6 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును.

24, 6 యొక్క కారణాంకములైన 2 మరియు 3 లచే భాగింపబడునా ?

24 యొక్క ఒకట్ల స్థానములో గల సంఖ్య 4(సరిసంఖ్య) కావున 2 చే భాగింపబడును..

24 యొక్క అంకెల మొత్తము 2 + 4 = 6 కావున 24 ను 3 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును.

ఇపుడు 6 యొక్క మరికొన్ని గుణిజాలు తీసుకుని పరిశీలించండి.

'6' తో భాగింపబడే సంఖ్యలు అన్ని, 6 యొక్క కారణాంకాలు అయిన 2 మరియు 3తో భాగింపబడతాయి.

అనగా 2 మరియు 3తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడే సంఖ్యలు అన్నీ '6' చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడతాయి.

ఒక సంఖ్య 2 మరియు 3లచే భాగించబడినచో, 2 మరియు 3లు ఆ సంఖ్యకు ప్రధానకారణాంకాలగును. కావున వాటి లబ్ధము $2 \times 3 = 6$ కావున 6 ఆ సంఖ్యకు కారణాంకమగును.

6 చే భాగించబడు సంఖ్య మరో మాటగా చెప్పాలంటె 2 మరియు 3 లచే తప్పక భాగింపబడాలి.

ఇవి చేయండి :

1. క్రింది సంఖ్యలు '6 ' తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
   (a) 1632 (b) 456 (c) 1008 (d) 789 (e) 369 (f) 258
2. క్రింది సంఖ్యలు '6 'చే నిశ్శేషమగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
   (a) $458 + 676$ (b) 6^3 (c) $6^2 + 6^3$ (d) $2^2 \times 3^2$

15.1.9 4 మరియు 8 యొక్క భాజనీయతా నియమము :

(a) ఒక నాలుగు అంకెల సంఖ్య $1000a + 100b + 10c + d$ తీసుకొనుము. $1000a + 100b + 10c + d = 4(250a + 25b) + (10c + d)$ గా వ్రాయవచ్చును. $4(250a + 25b)$, 4 చే నిశ్శేషముగా భాగించబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య 4చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న $(10c+d)$, 4 చే భాగింపబడవలెను. అనగా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క చివరి రెండు అంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్య 4 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెను.

ఒక సంఖ్య నాలుగుచే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న ఆ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానము, పదుల స్థానములలోని అంకెలతో ఏర్పడు చివరి రెండంకెల సంఖ్య 4 యొక్క గుణిజము లేక '0' లు కావలెను.

4 అంకెల కంటే ఎక్కువ అంకెలు కల సంఖ్యను తీసుకుని విస్తరణ రూపంలో వ్రాయండి. వాటి యొక్క చివరి రెండు అంకెలు తప్ప మిగిలిన అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 4 యొక్క గుణిజము అవునో కాదో, పరిశీలించండి. వాటికి 4 యొక్క భాజనీయతా నియమము చివరి రెండంకెల సంఖ్యపై ఆధారపడి ఉందో లేదో గమనించండి.

(b) ఒక నాలుగు అంకెల సంఖ్య $1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$ తీసుకొనుము.

$= 1000a + 100b + 10c + d = 8(125a) + (100b + 10c + d)$

$8(125a)$, 8 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న $(100b+10c+d)$, 8 చే భాగింపబడవలెను. అనగా చివరి మూడు అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 8 తో భాగింపబడవలెను.

ఒక సంఖ్య 8తో భాగింపబడవలెనన్న, ఆ సంఖ్య చివరి మూడు అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 8 తో భాగింపబడవలెను. లేదా మూడు అంకెలు '0' కావలెను.

4 అంకెలు లేదా అంత కన్న ఎక్కువ అంకెలు గల సంఖ్యకు 8 యొక్క గుణిజముగా వ్రాయగలమా? పరిశీలించండి. వాటికి 8 యొక్క భాజనీయతా నియమము చివరి 3 అంకెలపై ఆధారపడి ఉందో లేదో గమనించండి.

పజిల్ : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అంకెలతో, మొదటి రెండంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 2చే, భాగించబడునట్లు, మొదటి మూడంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్య 3 చే భాగించబడునట్లు, మొదటి నాల్గంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్య 4 చే భాగించబడునట్లు మరియు ఇదే క్రమము 9 అంకెల వరకు కొనసాగించగలుగు సంఖ్యను తయారు చేయగలదా?

సాధన : 123654987 క్రమపు సంఖ్య సమస్యకు సాధనగా కనిపిస్తుంది. పరీక్షించి సరిచూడండి.

ఉదాహరణ 3: 6582, 4 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో, లేదో తెల్పండి.

సాధన: ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క చివరి రెండు అంకెల సంఖ్యలు 82. 82, 4 చే భాగింప బడదు. కావున 6582, 4చే భాగింపబడదు. కావున 6582, 4 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడదు.

ఉదాహరణ 4: 28765432, 8 చే భాగింపబడునో, లేదో తెల్పండి.

సాధన : ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క చివరి మూడు అంకెలు 4, 3, 2. ఈ అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 432, 8తో భాగింపబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8 తో భాగింపబడును.

8తో భాగింపబడు అన్ని సంఖ్యలు, 4తో భాగింపబడును. 4తో భాగింపబడు అన్ని సంఖ్యలు, 8తో భాగింపబడతాయా? పరిశీలించండి.

ఇవి చేయండి:

1. క్రింది సంఖ్యలు 4 లేక 8 లేక రెండింటితోను భాగింపబడునో లేదో భాజనీయతా నియమం ప్రకారం తెల్పండి.

(a) 464 (b) 782 (c) 3688 (d) 100

(e) 1000 (f) 387856 (g) 4^4 (h) 8^3

ప్రయత్నించండి :

1. క్రింది సంఖ్యలు 4 లేక 8 లేక రెండింటితోను భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

(a) $4^2 \times 8^2$ (b) 10^3 (c) $10^5 + 10^4 + 10^3$ (d) $4^3+4^2+4^1-2^2$

15.1.10 7 యొక్క భాజనీయతా నియమము:

ఒక మూడు అంకెల సంఖ్య $100 \times a + 10 \times b + c$ తీసుకొనుము.

$$100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$$

ఇందు మొదటి రెండు పదముల నుండి 7 ఉమ్మడి కారణాంకంగా వ్రాసి

$$= 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$$

7(14a + b), 7 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య 7 తో భాగింప బడవలెనన్న, (2a + 3b + c) 7తో భాగింపబడవలెను.

ఉదాహరణ 5: 364, 7 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

సాధన : ఇచ్చట a = 3, b = 6, c = 4, (2a + 3b + c) = 2 × 3 + 3 × 6 + 4

= 6 + 18 + 4 = 28 (7 తో భాగింపబడును.)

కావున 364, '7'తో భాగింపబడును.

ప్రయత్నించండి:

1. కింది సంఖ్యలు 7 చే భాగించబడుతాయా ? పరీక్షించండి.

(a) 322 (b) 588 (c) 952 (d) 553 (e) 448

ఇవి ప్రయత్నించండి :

1 నాలుగంకెల సంఖ్యను సాధారణ రూపంలో తీసుకొని '7' తో భాజనీయతా నియమాన్ని తయారుచేయండి.

2. 3192, 7 యొక్క గుణకము "నీ నియమముతో" సరిచూడండి .

15.1.11 11 యొక్క భాజనీయతా నియమము :

ఒక 5 అంకెల సంఖ్య 10000a + 1000b + 100c + 10d + e తీసుకొనుము.

దీనిని 11 యొక్క గుణిజముగా వ్రాయుటకు, పై సంఖ్యను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$= (9999 + 1)\, a + (1001 – 1)\, b + (99 + 1)\, c + (11 – 1)\, d + e$$

$$= 9999a + 1001\, b + 99c + 11d + a – b + c – d + e$$

$$= 11\,(909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) – (b + d)$$

11 (909a + 91b + 9c + d), 11చే భాగింపబడును.

కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 11 చే భాగింపబడవలెనన్న, (a + c + e) – (b + d), 11 చే భాగింపబడవలెను.

అనగా (a + c + e) – (b + d) , 11 యొక్క గుణిజము లేక '0' కావలెను.

ఒక సంఖ్యలోని సరిస్థానములలోని అంకెల మొత్తము మరియు బేసి స్థానముల లోని అంకెల మొత్తముల భేధము 11 యొక్క గుణిజము లేక '0' అయిన ఆ సంఖ్య 11 చే భాగించబడును.

కింది పట్టిక గమనించండి.

సంఖ్య	ఎడమ వైపు నుండి బేసి స్థానాల లోని అంకెల మొత్తం	ఎడమవైపు నుండి సరి స్థానాలలోని అంకెల మొత్తం	వాటి భేదము
308	3 + 8 = 11	0	11 – 0 = 11
1331	1 + 3 = 4	3 + 1 = 4	4 – 4 = 0
61809	6 + 8 + 9 = 23	1 + 0 = 1	23 – 1 = 22

పై పట్టికలో ప్రతి సందర్భమునందు బేధము 0 లేదా 11 యొక్క గుణిజము కావున పై సంఖ్యలు 11చే భాగింపబడును..

5081 అను సంఖ్యను తీసుకొనుము. ఇందులో బేసి స్థానాలలోని అంకెల మొత్తం, సరి స్థానాలలోని అంకెల మొత్తముల యొక్క భేధం $(5 + 8) - (0 + 1) = 12$, ఇది 11 చే భాగింపబడదు. కావున 5081 అనే సంఖ్య 11 చే భాగింపబడదు.

ఇది చేయండి:

1. క్రింది సంఖ్యలు, 11చే భాగింపబడునో లేదో భాజనీయతా నియమము ద్వారా కనుక్కోండి..

   (i) 4867216 (ii) 12221 (iii) 100001

ఏదైనా ఒక 3 అంకెల సంఖ్య 123 తీసుకొనుము.

123123 అగునట్లు, రెండు సార్లు వ్రాయండి.

బేసి స్థానములోని అంకెల మొత్తం ఎంత? $1 + 3 + 2 = 6$

సరి స్థానములోని అంకెల మొత్తం ఎంత? $2 + 1 + 3 = 6$

వీటి భేదము ఎంత? '0'

కావున 123123, 11 చే భాగింపబడును.

ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను రెండుసార్లు వ్రాయగా వచ్చు సంఖ్య, 11 చే భాగింపబడును.

ప్రయత్నించండి :

1. 789789, 11 చే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.
2. 348348348348, 11 చే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.
3. 135531 ఒక సరి పాలింద్రోమ్ సంఖ్య. ఈ సంఖ్య 11 చే భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
4. 1234321, 11 చే భాగింపబడుతుందో, లేదో తెల్పండి.

అభ్యాసము - 15.3

1. క్రింది సంఖ్యలు '6' తో భాగింపబడునో, లేదో భాజనీయతా నియమముల ఆధారంగా తెల్పండి.

   (a) 273432 (b) 100533 (c) 784076 (d) 24684

2. క్రింది సంఖ్యలు '4'తో భాగింపబడునో, లేదో భాజనీయతా నియమముల ఆధారంగా తెల్పండి?

   (a) 3024 (b) 1000 (c) 412 (d) 56240

3. భాజనీయతా నియమముల ఆధారంగా క్రింది సంఖ్యలు, '8' తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

   (a) 4808 (b) 1324 (c) 1000 (d) 76728

4. భాజనీయతా నియమముల ఆధారంగా క్రింది సంఖ్యలు, '7' తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
   (a) 427 (b) 3514 (c) 861 (d) 4676

5. క్రింది సంఖ్యలు '11' తో భాగింపబడునో, లేదో భాజనీయతా నియమాల ఆధారంగా చెప్పండి.
   (a) 786764 (b) 536393 (c) 110011 (d) 1210121
   (e) 758043 (f) 8338472 (g) 54678 (h) 13431
   (i) 423423 (j) 168861

6. ఒక సంఖ్య '8' తో భాగింపబడిన, '4' తో కూడా భాగింపబడును. వివరించండి.

7. ఒక మూడు అంకెల సంఖ్య 4A3, మరొక మూడు అంకెల సంఖ్య 984 కు కలుపగా ఏర్పడు సంఖ్య 13B7. ఈ సంఖ్య 11చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడుతుంది. అయిన (A + B) కనుక్కోండి.

15.2 మరికొన్ని భాజనీయతా నియమములు

మనము మరికొన్ని భాజనీయతా నియమములను గమనిద్దాము.

(a) 24 యొక్క కారణాంకము 12.

12 యొక్క కారణాంకములు 1,2,3,4,6,12

24, 2,3,4,6 లచే భాగింపబడును. కావున 24, 12 యొక్క అన్ని కారణాంకములచే భాగింపబడును.

'a' అను సంఖ్య 'b' చే భాగించబడిన అది 'b' యొక్క అన్ని కారణాంకలచే భాగించబడును.

(b) ఏదైనా ఒక సంఖ్య 80 తీసుకొనుము. ఇది 4 తోను 5తోను భాగింపబడును. ఈ సంఖ్య 4, 5ల యొక్క లబ్ధము $4 \times 5 = 20$ తోను భాగింపబడును. (4, 5లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు)

ఇదేవిధముగా 60, 3 మరియు 5 లచే భాగింపబడును. మరియు 60, 3, 5 ల లబ్ధము $(3 \times 5 = 15)$తో కూడా భాగింపబడును.

" 'a', 'b' లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలైనపుడు a మరియు b చే భాగించబడు సంఖ్య. $a \times b$ తో కూడా భాగింపబడును"

('a', 'b' లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు కానప్పుడు ఈ నియమము పరిశీలించండి).

(c) ఏవైనా రెండు సంఖ్యలు 16, 20 తీసుకొనుము. అవి 4 తో భాగింపబడును. వాటి మొత్తము $16 + 20 = 36$ కూడా 4తో భాగింపబడును.

16, 20ల యొక్క వేరొక ఉమ్మడి కారణాంకములకు సరిచూడండి.

వేరొక రెండు సంఖ్యలకు పై నియమము సరి చూడండి.

"రెండు సంఖ్యలు, వేరువేరుగా మూడవ సంఖ్యతో భాగింపబడుచున్నచో, వాటి మొత్తం కూడా మూడవ సంఖ్యతో భాగింపబడును.

(d) ఏవైనా రెండు సంఖ్యలు 35, 20తీసుకొనుము. అవి 5చే భాగింపబడుచున్నవి. వాటి భేదము $35 - 20 = 15$ కూడా 5చే భాగింపబడునా? వేరే రెండు సంఖ్యలను తీసుకుని, పై నియమమును సరిచూడండి.

"రెండు సంఖ్యలు, వేరువేరుగా మూడవ సంఖ్యతో భాగింపబడినట్లయితే, వాటి భేదం కూడా మూడవ సంఖ్యచే భాగింపబడును".

ఇవి చేయండి :

1. వివిధ సంఖ్యల జతలు తీసుకుని వాటికి పై నాలుగు నియమములు సరి చూడండి.
2. 144, 12చే భాగించబడును. 144, 12 యొక్క అన్ని కారణాంకములచే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.
3. $2^3 + 2^4 + 2^5$, 2 తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి. వివరించండి.
4. $3^3 - 3^2$, 3 తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి. వివరించండి.

మూడు వరుస సంఖ్యల లబ్దముగా కల ఒక సంఖ్యను తీసుకొనుము. ఉదా. $4 \times 5 \times 6 = 120$. ఈ సంఖ్య 3చే భాగింపబడును. ఎందువలననగా, మూడు వరుస సంఖ్యలలో, ఒక సంఖ్య 3యొక్క గుణిజము. కావున మూడు వరుస సంఖ్యల లబ్ధముతో ఏర్పడిన సంఖ్య, 3చే భాగింపబడును. ఏవైనా మూడు వరుస సంఖ్యల లబ్ధమును తీసుకొని, పరిశీలించండి.

ప్రయత్నించండి :

1. $1576 \times 1577 \times 1578$ తో ఏర్పడు సంఖ్య 3 తో భాగింపబడునో లేదో కారణముతో తెల్పండి.

పెద్ద సంఖ్యలకు 7 యొక్క భాజనీయతా నియమము

ఇప్పటి వరకు మనము 3- అంకెలు, 4-అంకెల సంఖ్యలకు 7యొక్క భాజనీయతా నియమము చర్చించాం. ఇపుడు అంతకంటే ఎక్కువ అంకెలు కల సంఖ్యలకు 7 యొక్క భాజనీయతా నియమము పరిశీలిద్దాం.

7538876849 అను సంఖ్య 7 తో భాగింపబడునో లేదో పరిశీలిద్దాం.

సోపానం 1 : ఇచ్చిన సంఖ్యను కుడివైపునుండి మూడేసి అంకెలు ఒక గ్రూపుగా విభజించండి. చివరి గ్రూపు నందు మూడు కంటే తక్కువ అంకెలున్న వాటినే ఒక గ్రూపుగా తీసుకోండి.

$$\begin{array}{c|c|c|c|} 7 & 538 & 876 & 849 \\ \text{D} & \text{C} & \text{B} & \text{A} \end{array}$$

సోపానం 2 : సరిస్థానములలో ఉన్న గ్రూపులచే ఏర్పడిన సంఖ్యల మొత్తం లను కనుగొనండి. బేసి స్థానములతో ఉన్న గ్రూపులచే ఏర్పడిన సంఖ్యల మొత్తములు. అనగా A + C, B + D.

$$\begin{array}{r} 849 \\ +\ 538 \\ \hline 1387 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 876 \\ +\ 7 \\ \hline 883 \\ \hline \end{array}$$

సోపానం 3 : 883, 1387 ల బేధము. ఆ సంఖ్య 7 చే భాగింపబడిన ఇచ్చిన సంఖ్య 7 తో భాగింపబడును.

$$\begin{array}{r} 1387 \\ -\ 883 \\ \hline 504 \\ \hline \end{array}$$

504, 7 చే భాగించబడును. కావున దత్త సంఖ్య 7 చే భాగించబడును.

ప్రయత్నించండి :

1. పై పద్ధతి ద్వారా, 10 అంకెలు కల పెద్ద సంఖ్యను వ్రాసి 11 యొక్క భాజనీయతా సూత్రము సరిచూడండి.

భాజనీయతా నియమముల ద్వారా, ఒక సంఖ్య నందు తెలియని అంకెలను మనం కనుగొనవచ్చును.

84763A9 అనే సంఖ్య, 3 చే భాగింపబడిన, A యొక్క విలువలు కనుగొనగలము.

3యొక్క విభాజనీయతా ప్రకారము, ఇచ్చిన సంఖ్య నందలి, అంకెల మొత్తము 8 + 4 + 7 + 6 + 3 + A + 9 = 37 + A. ఇది 3 చే భాగింపబడవలెనన్న, A = 2 లేదా 5 లేదా 8 కావలెను.

అభ్యాసము - 15.4

1. 25110, 45 చే భాగింపబడునో లేదో సరిచూడండి.
2. 61479, 81 చే భాగింపబడునో లేదో సరిచూడండి.
3. 864, 36 చే భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి. మరియు 36 యొక్క కారణాంకములన్నింటిచే 864 భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.
4. 756, 42 చే భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి. మరియు 42 యొక్క కారణాంకములన్నింటిచే 756 భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
5. 2156, 11 మరియు 7 లచే భాగింపబడునో లేదో చూడండి. మరియు 2156, 11 మరియు 7 ల యొక్క లబ్ధంతో భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి. ?
6. 1435, 5 మరియు 7 లచే భాగింపబడునో లేదో చూడండి. మరియు 1435, 5 మరియు 7 ల యొక్క లబ్ధంతో భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి. ?

7. 456, 618 సంఖ్యలు 6 చే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి. మరియు వాటి మొత్తము కూడా 6 చే భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి.

8. 876, 345 లు 3తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి. మరియు వాటి బేధము కూడా 3తో భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి.

9. $2^2+2^3+2^4$; 2 లేదా 4 లేదా రెండింటి తోను భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి.

10. 32^2, 4 లేదా 8 లేదా రెండింటితో భాగింపడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.

11. A679B, 72 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన A, B విలువలు కనుక్కోండి.

15.3 భాజనీయతా నియమాలపై ఆధారపడిన పజిల్స్ :

రాజు, సుధ సరదాగా అంకెలతో పజిల్స్ ఆడుచున్నారు. వారి సంభాషణ ఇలా కలదు.

సుధ : ఒక రెండు అంకెల సంఖ్య తలచుకో

రాజు : అలాగే, తలచుకున్నాను. (అతడు 75 తలచుకున్నాడు)

సుధ : వాటిలోని అంకెలు తారుమారు చేయి

రాజు : అలాగే, చేసాను.

సుధ : వచ్చిన సంఖ్యను, మొదటి సంఖ్యకు కలుపు.

రాజు : అలాగే చేసాను.

సుధ : వచ్చిన ఫలితాన్ని 11తో భాగిస్తే '0' శేషం వస్తుంది.

రాజు : నిజమే నీకు ఎలా తెలిసింది ?

సుధకు ఏవిధంగా తెలిసినది, పరిశీలిద్దాము.

రాజు తలచుకున్నా రెండంకెల సంఖ్య $10a + b$ ("a" పదుల స్థానముతోను, "b", ఒకట్ల స్థానములోను కలదు) $a \neq 0$ అనుకొనుము. దీనిని $10 \times a + b = 10a + b$ గా వ్రాయవచ్చును. వాటి యొక్క అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చు సంఖ్య $10b + a$. ఈ రెండు సంఖ్యలను కలుపగా $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$

వీటి యొక్క మొత్తము ఎల్లప్పుడూ 11 యొక్క గుణిజము అగును. మరియు భాగఫలము $(a + b)$ (ఇది a, b అంకెల మొత్తము)

వేరే ఇతర 2-అంకెల సంఖ్యకు పజిల్‌ను సరిచూడండి.

ఇవి చేయండి :

1. రాజు తలచుకున్న సంఖ్యకు బదులుగా క్రింది సంఖ్యలు తీసుకుని ఫలితమును సరి చూడండి.

   (i) 37 (ii) 60 (iii) 18 (iv) 89

2. ఒక క్రికెట్ టీమ్ నందు 11 మంది ఆటగాళ్లు కలరు. క్రికెట్ బోర్డ్ వారికి $10x + y$ టీ షర్ట్స్ కొనుగోలు చేసింది. తిరిగి బోర్డ్ $10y + x$ టీ షర్ట్స్ కొనుగోలు చేసింది. మొత్తం టీషర్ట్స్ అందరికి సమంగా పంచితే, ఎన్ని టీషర్ట్స్ మిగులుతాయి? ఒక్కొక్కరికి ఎన్ని టీషర్ట్స్ వస్తాయి?

ఆలోచించి, చర్చించి వ్రాయండి:

ఒక రెండంకెల సంఖ్యను తీసుకుని వాటి అంకెలను తారుమారు చేసి వ్రాయండి. వచ్చిన సంఖ్యలలో పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసి వేయండి. వచ్చిన ఫలితము ఎల్లప్పుడూ 9తో భాగింపబడునా?

ఇవి చేయండి :

1. ఒక బుట్టలో $10a + b$ ($a \neq 0$ మరియు $a > b$) పండ్లు కలవు. అందు $10b + a$ పండ్లు కుళ్లినవి. మిగిలిన పండ్లను 9 మందికి సమానంగా పంచగలమా? ఒక్కొక్కరికి ఎన్ని పండ్లు వస్తాయి?

15.4 3- అంకెల సంఖ్యతో ఆట:

సుధ : ఒక మూడు అంకెల సంఖ్య తలచుకో.

రాజు : అలాగే. (అతడు తలచిన సంఖ్య157)

సుధ : వాటిని అంకెలు తారుమారు చేసి పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్య తీసివేయండి.

రాజు : అలాగే

సుధ : ఈ సంఖ్యను 9 లేక 11తో భాగించినను శేషము '0' వచ్చును.

రాజు : నిజమే. నీకు ఎలా తెలుసు?

సుధకు ఏవిధంగా తెలిసిందో గమనిద్దాము.

రాజు తలచుకున్న 3-అంకెల సంఖ్య $100a + 10b + c$ అనుకఉందాం. వాటి అంకెలు తారుమారు చేయగా వచ్చు సంఖ్య $100c + 10b + a$.

($a > c$) అయితే వాటి భేధము $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

$$= 99a - 99c = 99(a - c)$$

$= 9 \times 11 \times (a - c)$

$(c > a)$ అయితే వాటి భేదము $(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c)$

$= 99c - 99a$

$= 99(c - a)$

$= 9 \times 11 \times (c - a)$

మరియు $a = c$ అయితే వాటి భేదము '0'

ఇవి 9 మరియు 11 యొక్క గుణిజములు మరియు భాగఫలము $(a - c)$, $(c - a)$.

ఇది చేయండి:

1. పై పజిల్ నందు క్రింది అంకెలు తీసుకుని పరిశీలించండి?

(i) 657 (ii) 473 (iii) 167 (iv) 135

ప్రయత్నించండి:

ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను తీసుకుని, వాటి యొక్క అంకెల అమరిక మార్చుతూ (ABC, BCA, CAB అగునట్లు). మూడు సంఖ్యలను తయారు చేయండి. ఆ మూడు సంఖ్యలను కలిపి, వచ్చు ఫలితము ఏయే సంఖ్యలతో భాగింపబడునో పరిశీలించండి.

15.5 లోపించిన అంకెలను కనుగొనుట

కొన్ని పజిల్స్ నందు అంకెలకు బదులుగా అక్షరములు ఇవ్వబడును. ప్రాథమిక పరిక్రియలు, భాజనీయతా నియమాలు, స్థాన విలువలు ఆధారంగా లోపించిన అంకెలను కనుగొనవలెను.

దీనికి మనకు 3 నియమములు కలవు.

1. ప్రతి అక్షరము కేవలం ఒకే ఒక అంకెను సూచిస్తుంది.
2. ఎక్కువ స్థాన విలువలో ఉన్న అంకె '0' కాదు.
3. పజిల్‌కు ఒకే సమాధానం ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 6: క్రింది సంకలనం నుండి A కనుక్కోండి.

$$\begin{array}{r} 17A \\ +\ 2A4 \\ \hline 407 \\ \hline \end{array}$$

సాధన : పరిశీలించగా $A + 4 = 7$. లేదా

కావున $A = 3$

$173 + 234 = 407$

$$\begin{array}{r} 100 + 70 + A \\ 200 + 10A + 4 \\ \hline 300 + 70 + 11A + 4 = 407 \\ 11A = 33 \\ A = 3 \end{array}$$

ఉదాహరణ 7 : సంకలనములో కల M మరియు Y కనుగొనుము. $Y + Y + Y = MY$

సాధన : $Y + Y + Y = MY$

$3Y = 10M + Y$

$2Y = 10M$

$M = \frac{Y}{5}$ (Y, 5 చే భాగింపబడును. కావున $Y = 0$ లేదా 5)

పై వాటి నుండి, $Y = 0$ అయితే $Y + Y + Y = 0 + 0 + 0 = 0$, $M = 0$

$Y = 5$ అయితే $Y + Y + Y = 5 + 5 + 5 = 15$, $MY = 15$ కావున $M = 1, Y = 5$

ఉదాహరణ 8: $A2 - 15 = 5A$ లో A2 మరియు 5A లు రెండంకెల సంఖ్యల అయిన A విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $2 - 5 = A$ ఎప్పుడు సాధ్యమగుటకు

$12 - 5 = 7$, కావలెను

కావున $A = 7$

$(10A + 2) - (10 + 5) = 50 + A$

$10A - 13 = 50 + A$

$9A = 63$

$A = 7$

ఉదాహరణ 9: $5A1 - 23A = 325$ లో 5A1 మరియు 23A లు మూడంకెల సంఖ్యలైన A విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $1 - A = 5$ అగుటకు

$11 - A = 5$,

కావున $A = 6$

(లేదా) $(500 + 10A + 1) - (200 + 30 + A) = 325$

$501 - 230 + 10A - A = 325$

$271 + 9A = 325$

$271 + 9A = 325$

$271 - 271 + 9A = 325 - 271$

$9A = 54$

$A = 6$

ఉదాహరణ 10: $1A \times A = 9A$ లో $1A$ మరియు $9A$ లు రెండంకెల సంఖ్యలైన A విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $A \times A = A$ (లేదా) $(10 + A)A = (90 + A)$

1, 5, 6 వర్గ పట్టికల నుండి

$1 \times 1 = 1,$

$5 \times 5 = 25,$

$6 \times 6 = 36,$

$A = 6$, అయిన

$16 \times 6 = 96$

$$10A + A^2 = 90 + A$$

$$A^2 + 9A - 90 = 0$$

$$A^2 + 2.A\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 90 = 0$$

$$\left(A + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - 90 = 0$$

$$\left(A + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}$$

$$A + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$$

$$A = \frac{12}{2} = 6$$

ఉదాహరణ 11 : $BA \times B3 = 57A$ లో BA, $B3$ లు రెండంకెల సంఖ్యలు మరియు $57A$ ఒక మూడంకెల సంఖ్య అయిన A, B ల విలువలను కనుగొనుము.

సాధన : ఇటువంటి సమస్యలయందు గుణన పట్టికల నుండి, యత్నదోష పద్ధతి ద్వారా సాధించవచ్చు.

$A \times 3 = A$ కావలనంటే $A = 0$ లేదా 5 కావలెను. $(0 \times 3 = 0,\ 5 \times 3 = 15)$

కావున $A = 0$ లేదా 5 కావలెను. ఇపుడు పదుల స్థానంలో 1 తీసుకున్న, రెండంకెల మిక్కిలి పెద్ద విలువ 19. వాటి లబ్ధము $19 \times 19 = 361$, $57A$ కన్నా తక్కువ.

పదుల స్థానములో 3 తీసుకున్న, రెండంకెల మిక్కిలి చిన్న విలువ 30.

వాటి లబ్ధము $30 \times 30 = 900$, $57A$ కన్నా ఎక్కువ. కావున పదుల స్థానములో '2' ఉంటుంది.

$20 \times 23 = 460$ మరియు $25 \times 23 = 575$.

$\therefore$ సరియగు సమాధానము $25 \times 23 = 575$.

ఇవి చేయండి :

1. 21358AB, 99 తో భాగించబడిన, A, B విలువలు కనుక్కోండి.
2. 4AB8, వరుసగా 2,3,4,6,8, 9 లచే భాగింపబడిన A , B విలువలు కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 12: క్రింది గుణకారములోని A, B, C విలువలు కనుక్కోండి.

$$\begin{array}{r} AB \\ \times 5 \\ \hline CAB \end{array}$$

సాధన : $B = 0$ లేదా 1 లేదా 5 తీసుకొన్నచో, $0 \times 5 = 0$, $1 \times 5 = 5$, $5 \times 5 = 25$

$B = 0$, అయిన $A0 \times 5 = CA0$

ఇప్పుడు A = 5 , then 50 × 5 = 250

∴ CAB = 250 .

ప్రయత్నించండి :

1. YE × ME = TTT అయిన Y +E + M + T ల మొత్తం కనుగొనుము.

   [సూచన : TTT = 100T + 10T + T = T(111) = T(37 × 3)]

2. 88 వస్తువుల ఖరీదు A733B అయిన A, B విలువలు కనుక్కోండి.

అభ్యాసము -15. 5

1. క్రింది సంకలనములతో కల లోపించిన అంకెలు అక్షరాలలో ఇవ్వబడినవి. వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ +\quad A \\ +\ 7\,7 \\ \hline 1\,9\,7 \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 2\,2\,2 \\ +\quad 8 \\ +\ B\,B \\ \hline 2\,8\,5 \\ \hline \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} A\ A\ A \\ +\quad 7 \\ +\ A\ A \\ \hline 3\ 7\ 3 \\ \hline \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 2\,2\,2\,2 \\ +\ 9\,9 \\ +\quad 9 \\ A\,A\,A \\ \hline 2\,9\,9\,A \\ \hline \end{array}$ (e) $\begin{array}{r} B\,B \\ +\quad 6 \\ A\,A\,A \\ \hline 4\ 6\ 1 \\ \hline \end{array}$

2. క్రింది వ్యవకలనములలో కల 'A' విలువ కనుక్కోండి.

(a) 7A – 16 = A9 (b) 107 – A9 = 1A (c) A36 – 1A4 = 742

3. క్రింది గుణకారములలోని అక్షరాల విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $\begin{array}{r} \boxed{D}\,\boxed{E} \\ \times\ 3 \\ \hline \boxed{F}\,\boxed{D}\,\boxed{E} \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} \boxed{G}\,\boxed{H} \\ \times\ 6 \\ \hline \boxed{C}\,\boxed{G}\,\boxed{H} \\ \hline \end{array}$

4. క్రింది భాగహారములో లోపించిన విలువలు కనుక్కోండి.

(a) 73K ÷ 8 = 9L (b) 1MN ÷ 3 = MN

5. ABB × 999 = ABC123 (A, B, C లు అంకెలు) అయిన A, B, C ల విలువలు కనుక్కోండి.

15.6 స్థాన విలువల శేషముల ఆధారంగా భాజనీయతా నియమములు

ఈ పద్ధతిలో స్థాన విలువలను, ఇచ్చిన అంకెతో భాగించుట ద్వారా వచ్చు శేషములను తీసుకొంటాము.

ఒక సంఖ్య యొక్క స్థాన విలువలను 7తో భాగించిన వచ్చు శేషములు

వేలస్థానము 1000 ÷ 7 (శేషము 6. దానిని 6 – 7 = –1గా తీసుకొనవచ్చు)

వందల స్థానము 100 ÷ 7 (శేషము 2)

పదుల స్థానము 10 ÷ 7 (శేషము 3)

ఒకట్ల స్థానము 1 ÷ 7 (శేషము 1)

స్థాన విలువ	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
7 తో భాగించిన వచ్చు శేషము	3	2	1	–2	–3	–1	2	3	1

562499 అను సంఖ్య 7 తో భాగింపబడునో లేదో తెలుసుకుందాం.

అంకెలు	5	6	2	4	9	9
స్థానవిలువుల	5×10^5	6×10^4	2×10^3	4×10^2	9×10^1	9×10^0
7 తో భాగించగా వచ్చు శేషములు	$5\times(-2)$	$6\times(-3)$	$2\times(-1)$	4×2	9×3	9×1

స్థాన విలువల శేషములను, అ సంఖ్య అంకెలతో గుణించగా వచ్చు లబ్ధముల మొత్తము

$$-10 - 18 - 2 + 8 + 27 + 9 = -30 + 44 = 14$$

14, 7 చే భాగింపబడును, కావున 562499 అను సంఖ్య 7చే భాగింపబడును.

ఇవి చేయండి :

1. పై పద్ధతి ఉపయోగించి, 7810364 సంఖ్య, 4 చే భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.
2. పై పద్ధతి ఉపయోగించి 963451, 6 తో భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.

15.7 భాజనీయతా సూత్రంపై మరికొన్ని సమస్యలు :

ఉదాహరణ 13: సరి పాలింద్రోమ్ సంఖ్యలు, 11 చే భాగింపబడునో లేదో సరిచూడండి.

సాధన: 12344321 వంటి సంఖ్యలను సరిపాలింద్రోమ్ సంఖ్యలు అంటారు. ఈ సంఖ్యలో కల బేసిస్థానాలలోని అంకెల మొత్తం = 1 + 3 + 4 + 2. సరిస్థానాలలోని అంకెల మొత్తం = 2 + 4 + 3 + 1. వీటి భేదం 0 కావున సరిపాలింద్రోమ్ సంఖ్యలు 11చే భాగింపబడును..

ఉదాహరణ14: 10^{1000}-1 అను సంఖ్య 9 మరియు 11చే భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి?

సాధన: 10^{1000}-1 ను 999 .... 999 (1000 సార్లు)గా వ్రాయవచ్చు. ఇందలి అంకెలు అన్నీ 9 కావున ఈ సంఖ్య '9'చే భాగింపబడును. మరియు ఇందు 1000 అంకెలు కలవు కావున, దీనిలోని సరిస్థానము లలోని అంకెల మొత్తం, బేసి స్థానములలోని అంకెల మొత్తం సమానం కావున ఈ సంఖ్య 11 తో కూడా భాగింపబడును.

ఆలోచించి, చర్చించి వ్రాయండి.

1. 10^{2n}-1, 9 మరియు 11 చే భాగింపబడునని చెప్పగలమా? వివరించండి.
2. 10^{2n+1}-1, 11 చే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 15: ఏదైనా ఒక రెండంకెల సంఖ్యను 3 సార్లు వ్రాయగా వచ్చు 6 అంకెలు ఆ సంఖ్య 3తో భాగింపబడునో లేదో చూడండి. ?

సాధన: ఒక రెండంకెల సంఖ్య 47 అనుకొనుము.

దానిని మూడు సార్లు వ్రాయగా వచ్చు సంఖ్య 474747.

474747 ను 47(10101)గా వ్రాయవచ్చు. 10101, 3 చే భాగింపబడును. ఇందు కల అంకెల మొత్తం $1 + 1 + 1 = 3$. కావున 474747 , 3చే భాగింపబడును.

ఉదాహరణ 16: ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను 2 సార్లు వరుసగా వ్రాసి 6 అంకెల సంఖ్యను ఏర్పరచండి. ఆ సంఖ్య 7 మరియు 11తో భాగింపబడుతుందో లేదో సరిచూడండి..

సాధన : ఏదైనా ఒక 3-అంకెల సంఖ్య 345 తీసుకొనుము. దానిని రెండు సార్లు వ్రాయగా వచ్చు సంఖ్య 345345.

$345345 = 345000 + 345 = 345\,(1000 + 1)$ గా వ్రాయవచ్చు.

$= 345\,(1001)$

$= 345\,(7 \times 11 \times 13)$

కావున 345345 అను సంఖ్య 7, 11 మరియు 13 తో భాగింపబడును.

ప్రయత్నించండి:

1. 456456456456 అను సంఖ్య 7, 11 మరియు 13తో కూడా భాగింపబడునో లేదో ప్రయత్నించి చూడండి. ?

ఉదాహరణ 17: ఒకే అంకె గల ఒక 3- అంకెల సంఖ్యను తీసుకొనుము. దానిని దాని యొక్క సంక్షిప్త సంఖ్య (reduced number) తో భాగించండి. ఏమి గమనించితిరి?

సాధన: ఒకే అంకె గల 3-అంకెల సంఖ్య 444. తీసుకొనుము.

దాని యొక్క సంక్షిప్త సంఖ్య $4 + 4 + 4 = 12$

$444 \div 12 = 37$. మరికొన్ని సంఖ్యలు 333 , 666 ప్రయత్నించండి.

అన్ని సంఖ్యల యొక్క భాగఫలము 37 వచ్చును.

ఉదాహరణ 18: $2^3 + 3^3$ అనే సంఖ్య $(2 + 3)$ చే భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.

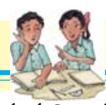
సాధన: $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$ అని మనకు తెలియును.

కావున $2^3 + 3^3 = (2 + 3)\,(2^2 - 2 \times 3 + 3^2)$ గా వ్రాయవచ్చు

ఇది $(2 + 3)$ యొక్క గుణిజము.

$2^3 + 3^3$, $(2 + 3)$ చే భాగింపబడును.

ఆలోచించి, చర్చించి వ్రాయండి.



1. $a^5 + b^5$, $(a + b)$ తో భాగింపబడుతుందో లేదో a, b విలువలు ఏవైనా సహజ సంఖ్యలుగా తీసుకుని ప్రయత్నించండి?

2. $(a^{2n+1} + b^{2n+1})$, $(a + b)$తో భాగింపబడునని చెప్పగలమా?

15.8 వరుస సంఖ్యల మొత్తము

మనము 1నుండి 100 వరకు గల వరుస సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కలుపకుండా, కనుగొనగలము.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 98 + 99 + 100$

$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) \ldots\ldots (50 + 51)$

$= 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots$ 50 గా వ్రాయవచ్చు $= 50 \times 101 = 5050$

$= \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050.$

100 సంఖ్యల మొత్తము కావలెనన్న

'n' సంఖ్యల మొత్తము కావలెనన్న $\dfrac{n(n+1)}{2}$ అగును.

ఉదాహరణ 19: 50 నుండి 85వరకు గల 5 చే భాగించబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుగొనుము.

సాధన: 50 నుండి 85 వరకు గల 5 చే భాగించబడు సంఖ్యల మొత్తము = (1 నుండి 85 వరకు కల 5చే భాగించబడు సంఖ్యల మొత్తము) – (1 నుండి 49 వరకు కల 5 చే భాగించబడు సంఖ్యల మొత్తము)

$= (5 + 10 + \ldots + 85) - (5 + 10 + \ldots + 45)$

$= 5(1 + 2 + \ldots + 17) - 5(1 + 2 + \ldots + 9)$

$= 5 \times \left(\dfrac{17 \times \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}}\right) - 5 \times \left(\dfrac{9 \times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}\right)$

$= 5 \times 9 \times 17 - 5 \times 9 \times 5$

$= 5 \times 9 \times (17 - 5)$

$= 5 \times 9 \times 12 = 540$

ఉదాహరణ 20: 1 నుండి 100 వరకు గల 2 లేక 3 చే భాగించబడే సంఖ్యల మొత్తం కనుగొనుము..

సాధన: 1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలతో 2 చే భాగించబడే సంఖ్యలు 2, 4, ... 98, 100.

1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలలో 3 చే భాగించబడే సంఖ్యలు 3, 6, ... 96, 99.

ఇందులో కల సంఖ్యలలో కొన్ని సంఖ్యలు రెండుసార్లు వచ్చినవి. అవి 2 మరియు 3 యొక్క క.సా.గు అయిన 6 యొక్క గుణిజాలు.

1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలలో 2 లేదా 3 చే భాగించబడు సంఖ్యలు = (1 నుండి 100 వరకు గల 2చే భాగించబడు సంఖ్యలు) + (1 నుండి 100 వరకు గల 3చే భాగించబడు సంఖ్యలు) – (1 నుండి 100 వరకు గల 6చే భాగించబడు సంఖ్యలు).

$= (2 + 4 + \ldots + 100) + (3 + 6 + \ldots + 99) - (6 + 12 + \ldots 96)$

$= 2(1 + 2 + \ldots + 50) + 3(1 + 2 + \ldots + 33) - 6(1 + 2 + \ldots + 16)$

$= 2 \times \left(\dfrac{50 \times (50+1)}{2}\right) + 3 \times \left(\dfrac{33 \times (33+1)}{2}\right) - 6 \times \left(\dfrac{16 \times (16+1)}{2}\right)$

$$= \cancel{2}\times\left(\frac{50\times 51}{\cancel{2}}\right)+3\times\left(\frac{33\times \cancel{34}^{17}}{\cancel{2}}\right)-6\times\left(\frac{^{8}\cancel{16}\times 17}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 2550 + 1683 - 816$$

$$= 4233 - 816 = 3417$$

అభ్యాసము – 15.6

1. 1 నుండి 100 వరకు కల సంఖ్యలలో 5చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.
2. 11 నుండి 50 వరకు కల సంఖ్యలలో 2 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.
3. 1 నుండి 50 వరకు కల సంఖ్యలలో 2 మరియు 3 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.
4. $(n^3 - n)$, 3 చే భాగింపబడును. వివరించండి.
5. 'n' వరుస సంఖ్యల మొత్తం (n బేసి సంఖ్య), n చే భాగింపబడును. కారణము వివరించండి.
6. $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11}$, 5 చే భాగింపబడుతుందా? వివరించండి.
7.

పై బొమ్మలో ఎన్ని దీర్ఘచతురస్రాలున్నాయి ?

8. రాహుల్ తండ్రి, రాహుల్ పుట్టినరోజునాడు ప్రతి సంవత్సరము కొంత సొమ్ము బ్యాంకులో జమ చేయుచున్నాడు. అతని మొదటి పుట్టిన రోజున రూ. 100, రెండవ పుట్టిన రోజున రూ. 300, మూడవ పుట్టిన రోజున రూ. 600, 4వ పుట్టిన రోజున రూ. 1000. అయితే అతడి 15వ పుట్టిన రోజున ఎంత జమ చేసి ఉంటాడు?
9. 1 నుండి 100 వరకు కల సంఖ్యలలో 2 లేక 5చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుగొనుము.
10. 11 నుండి 1000 వరకు కల సంఖ్యలలో 3 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. అంకెలను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయుట. ఒక 3- అంకెల సంఖ్య $100a + 10b + c$ లు అంకెలు $a \neq 0$ b, c లు 0 నుండి 9 వరకు కల అంకెలు.
2. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 యొక్క భాజనీయతా నియమములు,
3. 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10, 11 భాజనీయతా నియమములకు కారణములు.
4. అంకెల ప్రహేళికలు మరియు ఆటలు.

జవాబులు

1. అకరణీయ సంఖ్యలు

అభ్యాసము - 1.1

I.

(i) సంకలన తత్సమాంశము

(ii) విభాగన్యాయము
(iii) గుణకార తత్సమాంశము

(iv) గుణకార తత్సమాంశము
(v) సంకలన స్థిత్యంతర ధర్మం

(vi) గుణకార సంవృతధర్మం
(vii) సంకలన విలోమము

(viii) గుణకార విలోమము
(ix) విభాగన్యాయము

2. (i) $\frac{3}{5}, \frac{-5}{3}$ (ii) $-1, 1$ (iii) వ్యవస్థితం కాదు (iv) $\frac{-7}{9}, \frac{9}{7}$

(v) $1, -1$

3. (i) $\frac{-12}{5}$ (ii) 0 (iii) $\frac{9}{11}$ (vi) $\frac{6}{7}$

(v) $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ (vi) 0 4. $\frac{-28}{55}$

5. గుణకార సహచరధర్మం, గుణకార విలోమం, గుణకార తత్సమాంశం, సంకలన సంవృతము

7. $\frac{28}{15}$ 8. (i) $\frac{-5}{12}$ (ii) $\frac{58}{13}$ (iii) $\frac{45}{7}$

9. $\frac{-7}{8}$ 10. $\frac{53}{6}$

11. సహచరము కాదు. ఎందువలెననగా $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

13. (i) సహజసంఖ్యలు (ii) 0 (iii) ఋణాత్మకం

అభ్యాసము - 1.3

1. (i) $\frac{57}{100}$ (ii) $\frac{22}{125}$ (iii) $\frac{100001}{100000}$ (iv) $\frac{201}{8}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{19}{33}$ (iii) $\frac{361}{495}$ (vi) $\frac{553}{45}$

3. (i) $\frac{7}{13}$ (ii) $\frac{-7}{5}$

4. $\frac{-62}{65}$ 5. 140 6. $5\frac{1}{10}$ మీ 7. ₹. 1.66

8. $161\frac{1}{5}$ మీ^{2} 9. $\frac{3}{4}$ 10. $\frac{16}{9}$ మీ 11. 125

2. ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు

అభ్యాసము - 2.1

1.(i) 2 (ii) -3 (iii) -6 (iv) 6

(v) $\frac{-3}{2}$ (vi) -21 (vii) 27 (viii) 5

(ix) $\frac{7}{3}$ (x) 1 (xi) $\frac{1}{2}$ (xii) 0

(xiii) $\frac{25}{7}$ (xiv) $\frac{21}{16}$ (xv) $\frac{8}{3}$ (xvi) $\frac{13}{6}$

అభ్యాసము - 2.2

1.(i) 67^0 (ii) 17^0 (iii) 125^0 (iv) 19^0

(v) 20^0

2. 5, 13 3. 43, 15 4. 27, 29

5. 252, 259, 266 6. 20 కి.మీ 7. 99 గ్రా, 106 గ్రా, 95 గ్రా 8. 113 మీ, 87 మీ

9. 16 మీ, 12 మీ 10. 21 మీ, 21 మీ, 13 మీ

11. 51^0, 39^0 12. 20 సం॥లు, 28 సం॥లు 13. 126

14. 80, 10 15. 60, 48 16. 59అడుగులు, 29.5 అడుగులు

17. 186, 187.

అభ్యాసము - 2.3

1. 1   2. 2   3. $\frac{11}{4}$ 4. -1

5. $\frac{-9}{5}$ 6. 1   7. 7   8. $\frac{-4}{7}$

9. $\frac{9}{2}$ 10. $\frac{11}{3}$ 11. 1   12. -96

13. 3   14. 8

అభ్యాసము - 2.4

1. 25   2. 7   3. 63   4. 40, 25, 15

5. 12   6. 4, 2   7. 16   8. 10,000

అభ్యాసము - 2.5

1.(i) $\frac{145}{21}$ (ii) 168   (iii) 12   (iv) 25

(v) $\frac{127}{12}$ (vi) 1   (vii) $\frac{9}{2}$ (viii) $\frac{5}{12}$

(ix) $\frac{9}{23}$ (x) -1 (xi) $\frac{-1}{7}$ (xii) $\frac{3}{7}$

2. 30   3. 48, 12   4. $\frac{3}{7}$ 5. 50, 51, 52

6. 25   7. 5   8. ఒకరూపాయి : 14; 50 పైసల నాణెములు = 42

9. 30 రోజులు   10. 20 కి.మీ   11. 36

12. ₹860   13. 16

4. ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు

అభ్యాసము - 4.1

1.(i) $\frac{1}{64}$ (ii) -128 (iii) $\frac{64}{27}$ (iv) $\frac{1}{81}$

2.(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ (ii) $(-2)^{14}$ (iii) 5^4 (iv) 5^5 (v) $(-21)^4$

3.(i) $2^4 \times 3$ (ii) $\frac{1}{2}$

4.(i) 10 (ii) 40^3 (iii) $\frac{13}{16}$ (iv) $\frac{2}{81}$

(v) $\frac{17}{6}$ (vi) $\frac{16}{81}$ 5. (i) 625 (ii) 625

6.(i) 10 (ii) –10 (iii) 2 7. 3

8. $\frac{4^5}{3^4 \times 5}$ 9. (i) 1 (ii) 72 (iii) –24 (iv) 1

10. $\frac{16}{49}$

అభ్యాసము - 4.2

1.(i) 9.47×10^{-10} (ii) 5.43×10^{11} (iii) 4.83×10^{7} (iv) 9.298×10^{-5}

(v) 5.29×10^{-5}

2.(i) 4,37,000 (ii) 5,80,00,000 (iii) 0.00325 (iv) 37152900

(v) 0.03789 (vi) 0.02436

3.(i) 4×10^{-7} మీ (ii) 7×10^{-6} మి.మీ (iii) 3×10^{8} మీ/సెకను (iv) 3.84467×10^{8}

(v) 1.6×10^{-19} కూలూంబ్‌లు (vi) 1.6×10^{-3} సెం.మీ (vii) 5×10^{-6} సెం.మీ

4. 1.0008×10^2 మిమీ

5.(i) కాదు (ii) కాదు (iii) కాదు (iv) కాదు (v) కాదు

5. అనుపాతముతో రాశులను పోల్చుట

అభ్యాసము - 5.1

1.(i) 3:4 (ii) 32:3 (iii) 1:2 2. 168

3. 8 4. 48 5. 20 6. $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$

7. 3 : 5 8. 4 : 7 9. ₹ 8320

10. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, అవును 11. ₹ 28.5, ₹ 92, ₹ 257.6, ₹ 132, ₹ 88

12. (a) 83 (b) 1992 మంది 13. 2064 బస్తాలు 14. 70 సెం.మీ.

అభ్యాసము - 5.2

1. 81.9 కోట్లు 2. 2756.25 3. ₹ 7.674 4. 3 × 6సెం.మీ

5. ₹ 127.50 6. $6\frac{1}{4}\%$ 7. 17%

8. ₹ 880, 10%, ₹ 4,000, 20%, ₹ 10,000, 20%, లాభం, ₹ 392, ₹ 42, ₹ 315, ₹ 35.

9. ₹ 2244 10. 12501 11. 40,000; 12.5%

12. లాభం, ₹ 30,000, లాభ శాతం 17.64% 13. ₹ 1334

14. (i) ₹ 10,000 (ii) ₹ 3,000 (iii) ₹ 200

15. (i) ₹ 47.61; ₹ 33.33 16. 13

అభ్యాసము - 5.3

1. (a) 268.75 2. ₹ 19,950 3. A = ₹ 8820, వడ్డీ = ₹ 820

4. ₹ 734.50 5. ₹ 86,950; ₹ 1449.1 6. 81,82,199

7. ₹ 1080.56 8. (i) ₹ 210 (ii) ₹ 610 9. ₹ 43.20

10. 5,31,616 11. ₹ 36659.70 12. ₹ 362.50, భారతి

13. ₹ 9500 14. 1297920 15. ₹ 103.81

6. వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు

అభ్యాసము - 6.1

1.(i) 39 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 1

(ii) 297 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 9

(iii) 5125 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 5

(iv) 7286 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 6

(v) 8742 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 4

2. పరిపూర్ణ వర్గములు

(i) 121 (ii) 256

3.(i) 257 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 7 కావున పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యకాదు

(ii) 4592 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 2 కావున పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యకాదు

(iii) 2433 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 3 కావున పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యకాదు

(iv) 5050 నందు ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 0 మరియు సంఖ్య చివర ఒకే ఒక '0' కలదు. కావున అది పరిపూర్ణ వర్గము కాదు.

(v) 6098 నందలి ఒకట్ల స్థానములోని అంకె 8 కావున పరిపూర్ణ వర్గము కాదు.

4. (i) 431^2 - బేసిసంఖ్య (ii) 2826^2 - సరిసంఖ్య (iii) 8204^2 - సరిసంఖ్య

(iv) 17779^2-బేసిసంఖ్య (v) 99998^2 - సరిసంఖ్య

5. (i) 50 (ii) 112 (iii) 214

6. (i) 25 (ii) 81 (iii) 169

అభ్యాసము - 6.2

1. (i) 21 (ii) 28 (iii) 64 (iv) 84

2. 5 3. 6; 120 4. 6 5. 39

6. 51 7. 144; 9 8. 89 9. 4608 మీ^{2}

అభ్యాసము - 6.3

1. (i) 33 (ii) 48 (iii) 88 (iv) 78 (v) 95

2. (i) 1.6 (ii) 4.3 (iii) 8.3 (iv) 9.2

3. 31 4. 67 సెం.మీ 5. 91 6. 1024

7. 149 8. (i) 10 (ii) 16 (iii) 28

అభ్యాసము - 6.4

1. (i) 512 (ii) 4096 (iii) 9261 (iv) 27000

2. i) 243 - పరిపూర్ణ ఘనం కాదు ii) 516 - పరిపూర్ణ ఘనం కాదు
iii) 729 - పరిపూర్ణ ఘనం vi) 8000 - పరిపూర్ణ ఘనం
v) 2700 - పరిపూర్ణ ఘనం కాదు

3. 2 4. 17 5. 5 6. 288 7. 2

అభ్యాసము - 6.5

1. (i) 7 (ii) 9 (iii) 11 (iv) 14

2. (i) 8 (ii) 13 (iii) 15 (iv) 18

3. i) అసత్యం ii) అసత్యం iii) సత్యం iv) సత్యం
v) అసత్యం vi) అసత్యం vii) అసత్యం 4. 64

7. పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు, రేఖాచిత్రములు

అభ్యాసము 7.1

1. ₹ 11060.83 2. $\overline{x} = 7$ 3. $\overline{x} = 27$ 4. $\overline{x} = 43$

5. $\overline{x} = 30$ సం॥లు 6. 52 సం॥లు

7. $\overline{x} = 12$ విచలనాల మొత్తము నుండి $\overline{x} = 0$

8. 5

9. $\overline{x}$ = 13.67అన్ని సందర్భాలోను సమానం

10. 15.3

11. $\overline{x}$ = 30

12. మధ్యగతం = 3.4

13. x = 18

14. బాహుళకం = 10

15. బాహుళకం = $x - 3$

16. బాహుళకం వ్యవస్థితం కాదు

17. 12, 16, 16, 16

18. 42

19. 8

20. 20

అభ్యాసము - 7.2

1.

తరగతిఅంతరం	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64
పౌనఃపున్యం	9	9	9	6	7	5

2.

విద్యార్థుల సంఖ్య	15-19	19-23	23-27	27-31	31-35	35-39	39-43
పౌనఃపున్యం	5	7	6	5	5	1	1

3. తరగతిఅంతరం i) 44-51, 52-59

ii)	4-11	12-19	20-27	28-35	36-43	44-51	52-59
హద్దులు	3.5-11.5	11.5-19.5	19.5-27.5	27.5-35.5	35.5-43.5	43.5-51.5	51.5-59.5

4.

మధ్యవిలువ	సంచిత పౌనఃపున్యం	తరగతి అంతరం	ఆరోహణ	అవరోహణ
10	6	4-16	6	75
22	14	16-28	20	69
34	20	28-40	40	55
46	21	40-52	61	35
58	9	52-64	70	14
70	5	64-76	75	5

5.

త.అ (మార్కులు)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
పౌనఃపున్యం(విద్యార్థులు)	2	10	4	9	10

6.

తరగతి అంతరం (వయస్సు)	పౌనఃపున్యం (పిల్లలసంఖ్య)	తరగతి హద్దులు	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	అవరోహణ సంచితపౌనఃపున్యం
1 - 3	10	0.5 - 3.5	10	59
4 - 6	12	3.5 - 6.5	22	49
7 - 9	15	6.5 - 9.5	37	37
10 - 12	13	9.5 - 12.5	50	22
13 - 15	9	12.5 - 15.5	59	9

7.

తరగతి అంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	3	8	19	25	30
పౌనఃపున్యం	3	5	11	6	5

ఇచ్చినవి ఆరోహణ సంచితపౌనఃపున్యం

8.

తరగతి అంతరం	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
సం.అ.పౌనఃపున్యం	42	36	23	14	6
పౌనఃపున్యం	6	13	9	8	6

8. జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ

అభ్యాసము - 8.1

2. (a) అవును; రెండు సర్వసమాన పటములు ఎల్లప్పుడూ సరూపములు

   (b) అవును; సరూపకత స్థిరము.

3. AB = NM; $\angle A = \angle N$

   BC = MO; $\angle B = \angle M$

   CA = ON; $\angle C = \angle O$

4. (i) సత్యం (ii) అసత్యం (iii) సత్యం (iv) అసత్యం

   (v) అసత్యం

7. 1.5 మీ, 3మీ, 4.5మీ, 6మీ, 7.5మీ, 9మీ

8. 9మీ

9. సమతల పటముల వైశాల్యములు

అభ్యాసము 9.1

2. (i) 20 చ.సెం.మీ (ii) 424 చ.సెం.మీ (iii) 384 చ.సెం.మీ

3. 55 చ.సెం.మీ 4. 96 చ.సెం.మీ 5. (i) 10700 చ.మీ (ii) 10650 చ.మీ

6. (ii) x = 75 సెం.మీ, 45 సెం.మీ

7. ₹ 4050

8. 337.5 చ.సెం.మీ

అభ్యాసము - 9.2

1. 361 చ.సెం.మీ 2. 616 చ.సెం.మీ
3. (i) 693 చ.సెం.మీ (ii) 259.87 సెం.మీ^{2}
4. 1386 సెం.మీ^{2} 5. 308 సెం.మీ^{2} 6. 10.5 సెం.మీ^{2} 7. 7.8729 సెం.మీ^{2}
8. (i) $\frac{6}{7}a^2$ (ii) 123.42 సెం.మీ^{2} 9. 6.125 సెం.మీ^{2} 10. 346.5 మీ^{2}

10. అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములు

అభ్యాసము 10.1

1. ₹ 84, ₹ 168, ₹ 420, ₹ 546 2. 32, 56, 96, 160
3. ₹ 12,600/- 4. ₹ 2,100/- 5. 21 సెం.మీ. 6. 6మీ, 8.75 మీ
7. 168 కి.మీ 8. 5000 9. 25 కి.మీ, $\frac{10}{3}$ గం॥ 10. $\frac{9}{20}$ సెం.మీ. 11. 2 : 1

అభ్యాసము - 10.2

1. (ii) 2. 120, 60, 80, 80

అభ్యాసము - 10. 3

1. 4 కిలోలు 2. 50 రోజులు 3. 48 4. 4 5. 4
6. 15 7. 24 8. 60 ని॥ 9. 40% 10. $\frac{(x+1)^2}{x+2}$ రోజులలో

అభ్యాసము - 10. 4

1. ₹ 540 2. 2 రోజులు 3. 16 రోజులు 4. 325 5. 36 రోజులు

11. బీజీయ సమాసాలు

అభ్యాసము - 11.1

1. (i) 42K (ii) $6lm$ (iii) $15t^4$ (iv) 18mn
(v) $10p^3$

3. $60a^2c$
$24m^3n$
$36\ k^3l^3$
$24p^2q^2r^2$

4. i) x^5y^3 ii) a^6b^6 iii) $k^3l^3m^3$ iv) $p^2q^2r^2$
v) $72a^2bcd$ 5. $x^2y^2z^2$ 6. x^3y

అభ్యాసము - 11.2

1. (ii) $3k^2l + 3klm + 3kmn$ (iii) $a^2b^2 + ab^4 + ab^2c^3$
   (iv) $x^2yz - 2xy^2z + 3xyz^2$ (v) $a^4b^3c^3 + a^2b^4c^3d - a^3b^3c^2d^2$
2. $12y^2 + 16y$
3. i) -2 ii) 0
4. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
5. $x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - yz + zx - xr + yr$
6. $-7x^2 + 8xy$
7. $-3k^2 + 21kl - 21km$
8. $a^3 + b^3 + c^3 - a^2b + b^2a - b^2c + c^2b + a^2c - c^2a$

అభ్యాసము - 11.3

1. (i) $6a^2 - 19a - 36$ (ii) $2x^2 - 5xy + 2y^2$ (iii) $k^2l - kl^2 - l^2m + klm$
   (iv) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$
2. (i) $2x^2 - 3xy + 3x^2y + 3xy^2 - 5y^2$
   (ii) $3a^2b^2 - a^3b - 2ab^3 - 3a^2bc + 3ab^2c$
   (iii) $klmn - lm^2n - k^2l^2 + kl^2m + k^2lm - klm^2$
   (iv) $p^4 - 5p^3q + 6p^3r + pq^3 + 6q^3r - 5q^4$
3. i) $10x^2 - 14xy$ ii) $m^3 + n^3$ iii) $19a^2 - 34ab + 16ac - 3b^2 + 3c^2$
   iv) $p^2q^2 - q^2r^2 + p^2qr + pqr^2 - p^2q - pq^2 - p^2r + pr^2$
4. 8

అభ్యాసము - 11.4

1. i) $9k^2 + 24kl + 16l^2$ ii) $a^2x^4 + 2abx^2y^2 + b^2y^4$
   iii) $49d^2 - 126de + 81e^2$ iv) $m^4 - n^4$
   v) $9t^2 - 81s^2$ vi) $k^2l^2 - m^2n^2$
   vii) $36x^2 + 66x + 30$ viii) $4b^2 - 2ab + 2bc - ca$
2. i) 92416 ii) 259081 iii) 9,84,064 iv) 6,38,401
   v) 89,984 vi) 6391 vii) 11,772 viii) 42,024

12. కారణాంకవిభజన

అభ్యాసము - 12.1

1. (i) 1, 2, 4, 8 (ii) 1, 3, a, 3a (iii) 1, 7, x, y, 7x, 7y, xy, 7xy
   (iv) 1, 2, m, m^2, 2m, $2m^2$ (v) 1, 5 (vi) 1, 2, x, 2x
   (vii) 1, 2, 3, 6, x, y, 2x, 3x, 2y, 3y, 6x, 6y, xy, 2xy, 3xy, 6xy

2. i) $5x(x-5y)$ (ii) $3a(3a-2x)$ (iii) $7p(p+7q)$

iv) $12a^2b(3-5c)$ (v) $3abc(a+2b+3c)$

vi) $p(4p+5q-6q^2)$ (vii) $t(u+at)$

3. (i) $(3x-4b)(a-2y)$

(ii) $(x^2+5)(x+2)$ (iii) $(m+4)(m-n)$

(iv) $(a^2-b)(a-b^2)$ (v) $(p-1)(pq-r^2)$

అభ్యాసము - 12.2

1. (i) $(a+5)^2$ (ii) $(l-8)^2$ (iii) $(6x+8y)^2$ (iv) $(5x-3y)^2$

(v) $(5m-4n)^2$ (vi) $(9x-11y)^2$ (vii) $(x-y)^2$ (viii) $(l^2+2m^2)^2$

2. (i) $(x+6)(x-6)$ (ii) $(7x+5y)(7x-5y)$ (iii) $(m+11)(m-11)$

(iv) $(9+8x)(9-8x)$ (v) $(xy+8)(xy-8)$ (vi) $6(x+3)(x-3)$

(vii) $(x+9)(x-9)$ (viii) $2x(1+4x^2)(1+2x)(1-2x)$

(ix) $x^2(9x+11)(9x-11)$ (x) $(p-q+r)(p-q-r)$

(xi) $4xy$

3. (i) $x(lx+m)$ (ii) $7(y^2+5z^2)$ (iii) $3x^2(x^2+2xy+3z)$

(vi) $(x-a)(x-b)$ (v) $(3a+4b)(x-2y)$ (vi) $(m+1)(n+1)$

(vii) $(b+2c)(6a-b)$ (viii) $(pq-r^2)(p-1)$ (ix) $(y+z)(x-5)$

4. (i) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ (ii) $(a^2+b^2+c^2+2bc)(a+b+c)(a-b-c)$

(iii) $(l+m-n)(l-m+n)$ (iv) $\left(7x+\frac{4}{5}\right)\left(7x-\frac{4}{5}\right)$

(v) $(x^2-y^2)^2$ (vi) $(5a-b)(5b-a)$

5. (i) $(a+6)(a+4)$ (ii) $(x+6)(x+3)$ (iii) $(p-7)(p-3)$

(iv) $(x-8)(x+4)$ 6. 0, 12

అభ్యాసము - 12.3

1. (i) $8a^2$ (ii) $\frac{1}{3}x$ (iii) $9a^2b^2c^2$ (iv) $\frac{1}{5}yz^2$

(v) $-6l^2m$

2. (i) $3x-2$ (ii) $5a^2-7b^2$ (iii) $x(5x-3)$ (iv) $l(2l^2-3l+4)$

(v) $5abc(a - b + c)$ (vi) $(2q^2 + 3pq - p^2)$ (vii) $\frac{4}{3}(abc + 2bc)$

3. (i) $7x - 9$ (ii) $12x$ (iii) $\frac{77}{3}ab$ (iv) $\frac{27}{4}(m+n)$

(v) $4(x^2 + 7x + 10)$ (vi) $(a + 1)(a + 2)$

4. (i) $x + 4$ (ii) $x - 2$ (iii) $p + 4$ (iv) $5a(a - 5)$

(v) $10m(p - q)$ (vi) $4z(4z + 3)$

అభ్యాసము - 12.4

(i) $3(x - 9) = 3x - 27$ (ii) $x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$

(iii) $2x + 3x = 5x$ (iv) $2x + x + 3x = 6x$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = p$ (vi) $3x \times 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 9x^2 + 4x + 7$ (viii) $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

(ix) $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$

(x) (a) 0 (b) 30 (c) -6

(xi) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ (xii) $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

(xiii) $(3a + 4b)(a - b) = 3a^2 + ab - 4b^2$ (xiv) $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$

(xv) $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$ (xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 1$

(xvii) $(2x^3 + 1) \div 2x^3 = 1 + \frac{1}{2x^3}$ (xviii) $(3x + 2) \div 3x = 1 + \frac{2}{3x}$

(xix) $(3x + 5) \div 3 = x + \frac{5}{3}$

(xx) $\frac{4x+3}{3} = \frac{4}{3}x + 1$

13. త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట

అభ్యాసము - 13.1

3. (i) 5 (ii) 9 (iii) 20 (iv) 14

4. (i) 3 చ.యూనిట్లు (ii) 9 చ.యూనిట్లు (iii) 16 చ.యూనిట్లు (iv) 14 చ.యూనిట్లు

అభ్యాసము -13.2

1.

F	V	E	V + F = E + 2
5	6	9	సరియైనది
7	10	15	సరియైనది
8	12	18	,,
6	6	10	,,
5	5	8	,,
8	12	18	,,
8	6	12	,,
6	8	12	,,

2. అన్ని సమఘనాలు చతురస్రాకార పట్టకాలే, కానీ విపర్యయం సత్యం కాదు 3. ఉండదు 4. అవును

5. $F = 20$, $V = 6$, $E = 12$, $V + F - E = 2$ 6. కాదు

7.

V	E
8	12
5	8
6	9

8. (i) షడ్భుజి పిరమిడ్ (ii) దీర్ఘఘనము (iii) పంచభుజి పిరమిడ్

(iv) స్థూపం (v) సమఘనం (vi) షడ్భుభుజి పిరమిడ్

(vii) ట్రెపిజాయిడ్

9. (i) a, b, c, d, e (ii) (a) చతుర్ముఖి (b) గోళము

(c) ఘనము/దీర్ఘఘనము (d) గోళము

(e) ఘనము ఒక క్రమతల ఫలకము, కాని దీర్ఘఘనము క్రమ సమతల ఫలకము కాదు.

(f) ఘనము, దీర్ఘఘనము (g) చతుర్భుజి పట్టకము

(iii)(a) అష్టభుజి పట్టకము (b) షడ్భుజాకార పట్టకము

(c) త్రిభుజాకార పట్టకము (d) పంచభుజాకార పట్టకము

14. ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణము

అభ్యాసము - 14.1

1. A 2. 10 సెం.మీ 3. 9 చ.మీ

4. ₹.72

అభ్యాసము - 14.2

1. (i) 112.996 ఘ.మీ (ii) 70 ఘ.మీ (iii) 22.5 ఘ.మీ
2. (i) 13.92 ఘ.మీ, 13920 లీటర్లు. (ii) 5.2 ఘ.మీ, 5200 లీటర్లు
   (iii) 36.792 ఘ.మీ, 36792 లీటర్లు
3. దానిఘన పరిమాణం $\frac{7}{8}$ వ వంతు తగ్గును.
4. (i) 262.144 ఘ.సెం.మీ (ii) 2.197 ఘ.మీ (iii) 4.096 ఘ.మీ
5. 6400 6. 1096 ఘ.సెం.మీ 7. 110 ఘ.సెం.మీ
8. 90 9. 27 10. 6 సెం.మీ.

15. సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం

అభ్యాసము - 15.1

1. '2' చే భాగింపబడునవి 1200, 836, 780, 4820, 48630
   '5' చే భాగింపబడునవి 1200, 535, 780, 3005, 4820, 48630
   '10' చే భాగింపబడునవి 1200, 780, 4820, 48630
   ఒక సంఖ్య '10' తో భాగింపబడిన అది '2' తోను మరియు '5' తోను కూడా భాగింపబడునని గ్రహించితిమి.
2. (a), (b), (c), (e) లు 2 చే భాగించబడుతాయి.
3. (a), (b), (c) (d) లు 5 చే భాగించబడుతాయి.
4. (a), (b), (d), (e) లు 10 చే భాగించబడుతాయి.
5. (a) 6 (b) 8
   (c) 6 (d) 12 (e) 8
6. 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... 7. 6

అభ్యాసము - 15.2

1. A = 2 లేదా 5 లేదా 8 2. A = 8
3. 90, 180, 270, 360, 450 మొదలైనవి.
4. 0 నుండి 9. 2 యొక్క భాజనియతా నియమము ఒకట్ల స్థానముపై తప్ప మిగిలిన స్థానములపై ఆధారపడదు అని గ్రహించితిమి.
5. 0 లేక 5 6. 4 7. 7 8. '0'

అభ్యాసము - 15.3

1. (a), (d)లు 6 చే భాగింపబడును
2. (a), (b), (c), (d)లు 4 చే భాగింపబడును
3. (a), (c), (d)లు 8 చే భాగింపబడును
4. (a), (b), (c), (d)లు 7 చే భాగింపబడును
5. (a), (b), (c), (d), (e), (h), (i), (j) లు 11 చే భాగింపబడును
6. 8 యొక్క గుణిజములన్ని 4 యొక్క గుణిజములు
7. A = 1, B = 9, A + B = 10

అభ్యాసము - 15.4

1. 45 చే భాగింపబడును.
2. 81 చే భాగింపబడును.
3. 36 మరియు దాని కారణాంకముచే భాగింపబడును.
4. 42 మరియు దాని కారణాంకముచే భాగింపబడును.
5. 11, 7 లచే మరియు వాటి లబ్ధముచే భాగింపబడును.
6. 5, 7 లచే మరియు వాటి లబ్ధముచే భాగింపబడును.
7. రెండు సంఖ్యలు మరియు వాటి మొత్తం 6 చే భాగింపబడును.
8. రెండు సంఖ్యలు మరియు వాటి భేదం 3 చే భాగింపబడును.
9. 2, 4 రెండింటిచే భాగింపబడును.
10. 4, 8 రెండింటిచే భాగింపబడును.
11. A = 3, B = 2

అభ్యాసము - 15.5

1. (a) A = 9 (b) B = 5 (c) A = 3 (d) A = 6, మొత్తం = 2996
   (e) A = 4, B = 1
2. (a) A = 5 (b) A = 8 (c) A = 9
3. (a) D = 5, E = 0, F = 1
4. (a) K = 6, L = 2 (b) M = 5, N = 0
5. A = 8, B = 7, C = 6

అభ్యాసము - 15.6

1. 1050
2. 620
3. 216
4. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ మూడు వరుస సంఖ్యల లబ్ధం.
5. 'n' వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తం $\frac{(2n-1)(2n)}{2} = n(2n-1)$ 'n' యొక్క గుణిజము.
6. $(1^{11} + 4^{11}) + (2^{11} - 3^{11})$ 5 చే భాగించబడును.
7. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
8. ₹ 12,000
9. 3050
10. 166833-18 = 166815.

పాఠ్యప్రణాళిక (సిలబస్)

సంఖ్యావ్యవస్థ (50 గంటలు) (i) అకరణీయ సంఖ్యలు (ii) వర్గ సంఖ్యలు, ఘనసంఖ్యలు మరియు వర్గమూలములు, ఘనమూలములు. (iii) సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	**(i) అకరణీయ సంఖ్యలు** • అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలు (సర్వసమీకరణములు). • ధర్మాలను వర్ణించడానికి వీలుగా సాధారణ రూపము. ధర్మాలను ప్రశంసించటం • సంఖ్యా రేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించంటం. • పూర్ణాంకాలలో మాదిరిగా కాకుండా అకరణీయ సంఖ్యలలో ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మరిచిన అకరణీయ సంఖ్య వుంటుందని ఇంకా ఇవే రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య చాలా చాలా అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని గుర్తింప చేయటం. • అకరణీయ సంఖ్యలను, దశాంశ సంఖ్యలుగా సూచించటం, అదేవిధంగా దశాంశ సంఖ్యలకు అకరణీయ సంఖ్యలుగా సూచించండం (హారాలు 10, 100, ...కాకుండా) • అకరణీయ సంఖ్యలను వివిధ పరిక్రియల దృష్ట్యా ధర్మాలు. • అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ పరిక్రియలలో పద సమస్యలు. **(ii) వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు** • వర్గసంఖ్యలు, వర్గమూలాలు • కారణాంక పద్ధతిన, భాగాహార పద్ధతిన వర్గమూలాలను కనుగొనుట. • పైథగోరియక్ త్రికాలు, పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును సరిచూచుట. • ఘనసంఖ్యలు, ఘనమూలాలు (3 అంకెలుగల సంఖ్యలకు కారణాంక పద్ధతి మాత్రమే) • వర్గమూలాలను, ఘనమూలాలను అంచనా వేయటం. కావలసిన సంఖ్యకు అతి సమీపంగా అంచనావేసే విధానాన్ని నేర్పించడం • బ్రాకెట్ల వినియోగం • BODMAS నియమం అనుసరించి సంఖ్యాసమాసాలను సూక్ష్మీకరించుట **(iii) సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం!** • రెండంకెలు, మూడు అంకెలు గల సంఖ్యలను వికృత రూపంలో అనగా (100a + 10b + c) (a, b, c లు ఏవైనా అంకెలు) రూపంలో రాయటం, అర్థం చేసుకోవటం, వీనికి సంబంధించిన ప్రహేళికలు. (చతుర్వ్రద

	ప్రక్రియలలో, సంఖ్యలలో ఒకటి లేదా రెండంకెల బదులు అక్షరాలు ఇచ్చి వాని విలువను కనుగొనమని అడగటం) మొదలైనవి. • సంఖ్యలలో ప్రహేళికలు మరియు ఆటలు – ప్రహేళికలను సాధించడం, వానిని తయారు చేయడం. • రెండు లేదా మూడు అంకెల సంఖ్యలకు సంబంధించి 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 మరియు 11 ల భాజనీయతా సూత్రాలు, వీనిలోని తర్కము మరియు శాస్త్రీయతను అర్థం చేసుకోవటము.
బీజగణితం (20 గంటలు) (i) ఏకచరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు (ii) ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు (iii) బీజీయ సమాసాలు (iv) కారణాంక విభజన	**(iv) ఏకచరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు** (సామాన్య సమీకరణాలు) • గుణకార, భాగాహార పరిక్రియలో కూడిన సామాన్య సమీకరణాల సాధన • వివిధ సందర్భాలలో సామాన్య సమీకరణాల వినియోగము. • పద సమస్యలు **(ii) ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు** • ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు • ఘాతాంకాలుగా పూర్ణ సంఖ్యలు • ఘాతాంకాల ధర్మాలు **(iii) బీజీయ సమాసాలు** • పూర్ణ సంఖ్యలు గుణకాలుగా గల బీజీయ సమాసాల గుణకారము • సాధారణంగా చేసే అప్పులు (ఉదా॥ $2 + x \neq 2x$, $7x + y \neq 7xy$) • $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ సర్వ సమీకరణాలు. • సర్వసమీకరణాలకు జ్యామితీయ నిరూపణ **(iv) కారణాంక విభజన** • సామన్య సమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన • పదాలను సమూహాలుగా చేయుట ద్వారా కారణాంక విభజన • సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించుట ద్వారా కారణాంక విభజన • $(x + a)(x + a)$ రూపములోని సమాసాల కారణాంక విభజన • బీజీయ సమాసాల భాగాహారము

అంకగణితము (20 గంటలు) (i) అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట (ii) అనులోమ, విలోమ నిష్పత్తులు	**(i) అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట** • బహుళ నిష్పత్తి – పదసమస్యలు • శాతాలు, లాభ-నష్టాలు, ఇతర ఖర్చులు, డిస్కౌంట్, పన్నులు మొదలైన వానికి సంబంధించిన సమస్యలు • వడ్డీ, చక్రవడ్డీల మధ్యగల బేధాలు (చక్రవడ్డీ సమస్యలు 3 సోపానాలకు పరిమితము, అర్థ సం॥నికి తిరగ గట్టే లెక్కలలో 3 సోపానాలకు మాత్రమే పరిమితి). అమరికల ద్వారా చక్రవడ్డీకి సూత్రమును రాబట్టుట. **(ii) అనులోమ, విలోమ నిష్పత్తులు** • సులభమైన పదసమస్యలు, విలోమానుపాతము – సులభమైన పద సమస్యలు, మిశ్రమానుపాతము – సులభ పద సమస్యలు • పని-కాలమునకు సంబంధించిన సులభ పద సమస్యలు • దూరము-కాలమునకు సంబంధించిన సులభ పద సమస్యలు
రేఖాగణితము (40 గంటలు) (i) చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు (ii) జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ (iii) త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట	**(i) చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు** • చతుర్భుజాల ధర్మాల పునరావలోకనము • చతుర్భుజములు నిర్మించుటలో (i) ఒక కోణము నాలుగు భుజాలు ఇచ్చినపుడు (ii) ఒక కర్ణము నాలుగు భుజాలు ఇచ్చినపుడు (iii) మూడు కోణాలు, రెండు ఆసన్న భుజాలు ఇచ్చినపుడు (iv) మూడు భుజాలు, రెండు కర్ణాలు ఇచ్చినపుడు (v) మూడు భుజాలు, వాని మధ్యలోని రెండు కోణాలు ఇచ్చినపుడు • ప్రత్యేక చతుర్భుజాల నిర్మాణము **(iii) జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ** • సర్వసమాన పటాలు • సరూప పటాలు • త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాల పరంగా జ్యామితీయ పటాలలో సౌష్ఠవము. **(ii) త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట** • పటాలను గుర్తించటం, పోల్చటం (2D మరియు 3D కలసివున్న పటాలు, వలలు) • త్రిమితీయ వస్తువుల ఆకారాలను తుల్యబిందు రేఖాపటాలుగా ద్విమితీయంలో సూచించుట.

	• ఘనము, దీర్ఘఘనము, చతుర్ముఖి, పట్టకాలు, పిరమిడ్లు మొదలైన వానియొక్క శీర్షాలు, అంచులు, ముఖాలను లెక్కించుట, యూలర్ ఫార్ములను సరిచూచుట.
క్షేత్రమితి (15 గంటలు) **(i) సమతల పటాల వైశాల్యములు** **(ii) సమతల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములు** **(ఘనము-దీర్ఘఘనము)**	**(i) సమతల పటాల వైశాల్యములు** • త్రిభుజ వైశాల్యానికి హెరాన్ సూత్రము మరియు చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనుట దీని అన్వయము. • ట్రెపీజియం వైశాల్యము • చతుర్భుజం మరియ దీర్ఘఘనాల ఉపరితల వైశాల్యాలు. • వృత్త వైశాల్యము, వృత్తాకార బాటల వైశాల్యము **(ii) సమతల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములు** • సమఘనము మరియు దీర్ఘఘనముల ఉపరితల వైశాల్యములు • ఘనపరిమాణము - భావన, ప్రాథమిక పరిమాణములో ఘనపరిమాణాలను కొలుచుట • ఘనపరిమాణము మరియు సామర్థ్యము
దత్తాంశ నిర్వహణ (15 గంటలు) **పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు మరియు గ్రాఫులు**	**పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు మరియు గ్రాఫులు** • ముడి దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకముల పునర్విమర్శ • ఆవర్గీకృత దత్తాంశమునకు విచలన పద్ధతిలో అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనుట • వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క పరిధి, ఆవశ్యకతలను చర్చించుట. • పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలను తయారుచేయుట. • పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలకు సంచిత పౌనఃపున్యాలను తయారు చేయుట • పౌనఃపున్య వక్రాలు (సోపాన చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజి, వక్రము, ఓజివ్ వక్రములు) గీయుట

విద్యాప్రమాణాలు

విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగలగాలి, ఏం తెలిసి యుండాలో స్పష్టంగా వివరించే ప్రవచనాలను ఆ తరగతి యొక్క 'విద్యాప్రమాణాలు' అంటాము. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను కింది విభాగాలుగా వర్గీకరించడమైనది.

గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాలు (Content) ద్వారా కింద సూచించిన విద్యాప్రమాణాలు సాధించాలి.

1. సమస్యా సాధన

గణిత భావనలు, పద్ధతులను ఉపయోగించడం ద్వారా గణిత సమస్యలను సాధించడం.

(అ) సమస్యలలో రకాలు

పజిల్స్, పదసమస్యలు, పటసమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన – విశ్లేషణ – పట్టికలు– గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు మొదలగు రకరకాలుగా గణిత సమస్యలుంటాయి.

సమస్యా సాధన – సోపానాలు

- సమస్యలను చదవడం.
- దత్తాంశంలోని సమాచారం మొత్తాన్ని విడిభాగాలుగా గుర్తించడం.
- అనుబంధ విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్య విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్యలో ఇమిడియున్న గణిత భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం.
- లెక్కచేయు పద్ధతి విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.
- ఎంపిక చేసిన పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం

(ఆ) సంక్లిష్టత

సమస్య యొక్క సంక్లిష్టత అనునది కింది అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

- అనుసంధానం చేయడం (ఇది అనుసంధానం విభాగంలో నిర్వచించనైనది)
- సమస్యలో ఉన్న సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలోఉన్న ప్రక్రియల సంఖ్య.
- సమస్యా సాధనకు ఇవ్వబడిన సందర్భ సమాచారం ఏ మేరకు ఉన్నది ?
- సమస్య సాధించే పద్ధతి యొక్క సహజత్వం

2. కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణ చేయడం

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం.
- గణిత సాధారణీకరణలను మరియు ప్రకల్పనలను అర్థం చేసుకోవడం మరియు చేయగలగడం.

- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు సరిచూడడం.
- తార్కిక చర్చలను పరీక్షించడం.
- సమస్యా నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడం

3. వ్యక్తపరచడం

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం - రాయగలగడం.

  ఉదా: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, త్రిభుజములోని మూడుకోణముల మొత్తం $= 180^0$
- గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణితపరమైన ఆలోచనలను తన స్వంత మాటల్లో వివరించడం. ఉదా: చతురస్రం అనునది నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు నాలుగు సమాన కోణాలు గల సంవృత పటం.
- పద్ధతిని వివరించడం. ఉదా: రెండంకెల సంఖ్యలను కూడడంలో మొదటి ఒకట్లస్థానం అంకెలను కూడి తరువాత పదుల స్థానంలోని అంకెలను కూడడం / స్థానమార్పిడిని గుర్తుకు తెచ్చుకుంటూ
- గణిత తార్కికతను వివరించడం.

4. అనుసంధానం

- అనుబంధ గణిత పాఠ్యవిభాగాలను - భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా: గుణకారానికి, కూడికకు; మొత్తంలో భాగానికి - నిష్పత్తికి - భాగహారానికి; అమరికలకు - సౌష్ఠవమునకు; కొలతలు మరియు తలము/అంతరాళం
- దైనందిన జీవితానికి గణితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.
- గణితంలోనే వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావనలను అనుసంధానం చేయడం, ఉదా: దత్తాంశ సేకరణ మరియు అంకగణితం; అంకగణితం మరియు ప్రదేశం.
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం.

5. దృశ్యీకరణ మరియు ప్రాతినిధ్య పరచడం

- పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మ చిత్రం, 2D-పటాలు, 3D-పటాలు మరియు పటాలను చదవడం.
- పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మ చిత్రములు, పటాలను గీయడం.