ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ

ಗಣಿತ

8

ಎಂಟನೇ ತರಗತಿ

ಭಾಗ – ೧

ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ.)
100 ಅಡಿ ವರ್ತುಲ ರಸ್ತೆ, ಬನಶಂಕರಿ 3ನೇ ಹಂತ,
ಬೆಂಗಳೂರು – 85

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘವು 2010 ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಒಂದನೇ ತರಗತಿಯಿಂದ ಹತ್ತನೇ ತರಗತಿವರೆಗಿನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ರಚನಾ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು ಹನ್ನೊಂದು ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಷಾ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಕೋರ್ ವಿಷಯಗಳನ್ನು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ರಚನೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ. 1 ರಿಂದ 4 ನೇ ತರಗತಿಯವರೆಗೆ ಪರಿಸರ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು 5 ರಿಂದ 10 ನೇ ತರಗತಿಯವರೆಗೆ ಐಚ್ಛಿಕ ವಿಷಯಗಳಾದ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಸಮಾಜ ವಿಜ್ಞಾನ ಗಳಿರುತ್ತವೆ.

2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮುರಿದು ಅವುಗಳ ಸಮಗ್ರದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸುವುದು.

ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಭೂತ ವಿಧಾನಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

- ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach),
- ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach)
- ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach).

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಭಾರತೀಯ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾಪೂರಕ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರೀ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಬಹುತೇಕ ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ–ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಗಣಿತವೆಂದರೆ ಭಯ. ಈ ಭಯವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ವಿನೋದಗಣಿತ, ಕಥೆಗಳು, ಒಗಟುಗಳು, ಗೂಢಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಮುಂತಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ಅಥವಾ ಕುತೂಹಲ ಕೆರಳಿಸುವ ಕಥೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘವು ಈ ಪುಸ್ತಕದ ತಯಾರಿಯಲ್ಲಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಿಗೆ, ಸದಸ್ಯರಿಗೆ, ಕಲಾಕಾರರಿಗೆ, ಪರಿಶೀಲಕರಿಗೆ, ಸಂಯೋಜಕ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಶಿಕ್ಷಣ ಮಹಾವಿದ್ಯಾಲಯಗಳ ಸಿಬ್ಬಂದಿವರ್ಗದವರಿಗೆ, ಜಿಲ್ಲಾ ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು, ರಾಜ್ಯ ಮಟ್ಟದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಯ ಸದಸ್ಯರಿಗೆ ಮತ್ತು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಸುಂದರವಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿದ ಮುದ್ರಕರಿಗೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರೊ. ಜಿ. ಎಸ್ ಮುಡಂಬಡಿತ್ತಾಯ
ಮುಖ್ಯ ಸಂಯೋಜಕರು
ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಪರಿಷ್ಕರಣೆ ಹಾಗೂ
ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನೆ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ,
ಬೆಂಗಳೂರು.

ನಾಗೇಂದ್ರ ಕುಮಾರ್
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ
ಬೆಂಗಳೂರು

Foreword

The Government of India through NCERT have brought out NCF 2005 to revise the curriculum of schools and suggested all the states to introduce revised textbooks in the schools based on the new curriculum. Accordingly state Governments took up the work and requested respective DSERTs to start introducing new curriculum and texts. Karnataka Government has suggested to its DSERT to take up the challenge to fulfil the vision of NCF-2005. DSERT, Karnataka started the process: constituted committees to revise the syllabi, identified the writers and requested these people to write texts books based on the new syllabi incorporating the expectations of NCF-2005. Karnataka Text Book Society took the initiative and coordinated the whole programme of writing these text books.

The current work, a text book in mathematics for 8-th standard, is a step taken in this direction. An effort has been made here to look at the mathematics needed at 8-th standard through a different lens. At first glance, this may look a totally unconventional approach. Some may feel that it is hard on the part of 8-th standard students. On the other hand that is the correct age for the students to learn new concepts and ideas. Students are receptive to new intellectual challenges. It is the onus of the teachers to teach new things to the students and prepare them to the challenges of the ever changing world. This text book is also an effort to integrate our students with the national mainstream where CBSE has surged forward and parents think that their wards will be better off by learning CBSE texts.

We have tried here to tell something new about numbers and number system. Similarly, some thing new about graphs, postulates of geometry and congruency of triangles are also introduced with more expectations. Quadrilaterals have been introduced now itself. There are optional problems at the end to challenge the students. It is my earnest request to all my teacher friends to take up the new challenge. Let the parents of our students not feel that their wards are always in the back seats.

B. J. Venkatachala
Homi Bhabha Centre for
Science Education, TIFR, Mumbai

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಸಮಿತಿ

ಅಧ್ಯಕ್ಷರು

ಡಾ|| ಬಿ.ಜೆ. ವೆಂಕಟಾಚಲ, ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು ಹೆಚ್.ಬಿ.ಸಿ.ಎಸ್.ಇ.(ಟಿ.ಐ.ಎಫ್.ಆರ್) ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ ಭಾರತೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಂಸ್ಥೆ, ಬೆಂಗಳೂರು-12

ಸದಸ್ಯರು

ಡಾ|| ಜಿ. ಶೀಲಾ, ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಶಿಕ್ಷಣ ವಿಭಾಗ ಮಾನಸಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ,ಮೈಸೂರು

ಶ್ರೀ. ಟಿ.ಕೆ. ರಾಘವೇಂದ್ರ , ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಡಯಟ್, ಚಿಕ್ಕಬಳ್ಳಾಪುರ.

ಶ್ರೀ. ಎ. ರಾಮಸ್ವಾಮಿ, ಸಹಶಿಕ್ಷಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಎಂಪ್ರೆಸ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ತುಮಕೂರು.

ಶ್ರೀ. ವಿನಯ್ .ಎ. ಜೋಸೆಫ್, ಸಹಶಿಕ್ಷಕರು, ಮತ್ತು ಪಿ.ಆರ್.ಓ ಸಂತ ಕ್ಸೇವಿಯರ್ಸ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ಶಿವಾಜಿನಗರ ಬೆಂಗಳೂರು – 51

ಶ್ರೀಮತಿ ವಾಸಂತಿ ರಾವ್, ನಿವೃತ್ತ ಶಿಕ್ಷಕಿ, ರಾಜಾಜಿನಗರ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಶ್ರೀ. ಜಿ.ಎಮ್. ಜಂಗಿ, ಕಲಾವಿದರು, ಡಿ.ಎಸ್.ಇ.ಆರ್.ಟಿ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಅನುವಾದಕರು

ಶ್ರೀ. ವಿ.ಆರ್. ರವಿಕುಮಾರ್, ಹಿರಿಯ ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಜಿಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ, ಇಲಕಲ್, ಬಾಗಲಕೋಟೆ ಜಿಲ್ಲೆ.

ಶ್ರೀ. ಟಿ.ಕೆ. ರಾಘವೇಂದ್ರ, ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ದಯಟ್, ಚಿಕ್ಕಬಳ್ಳಾಪುರ.

ಡಾ|| ವೈ. ಬಿ. ವೆಂಕಟೇಶ್, ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು ಬಿಡದಿ, ರಾಮನಗರ

ಶ್ರೀ. ಪಿ.ಎನ್. ರಾಮಕೃಷ್ಣಾರೆಡ್ಡಿ, ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು, ಕೈವಾರ, ಚಿಂತಾಮಣಿ(ತಾ) ಚಿಕ್ಕಬಳ್ಳಾಪುರ ಜಿಲ್ಲೆ.

ಶ್ರೀ. ಎಂ. ಮಲ್ಲೇಶ ಗೌಡ, ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಎಸ್.ಎಸ್.ಇ.ಎ ಸರ್ಕಾರಿ ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು, ಗೌರಿಬಿದನೂರು, ಚಿಕ್ಕಬಳ್ಳಾಪುರ ಜಿಲ್ಲೆ.

ಶ್ರೀ. ವಿನಯ್ .ಎ. ಜೋಸೆಫ್, ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಮತ್ತು ಪಿ.ಆರ್.ಓ ಸಂತ ಕ್ಸೇವಿಯರ್ಸ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ಶಿವಾಜಿನಗರ ಬೆಂಗಳೂರು – 51.

ಶ್ರೀ. ಪ್ರಮೋದ್ ಕುಲಕರ್ಣಿ, ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು ವಿ.ವಿ ದರ್ಬಾರ್ ಪ್ರಾಢಶಾಲೆ, ಬಿಜಾಪುರ.

ಪರಿಶೀಲಕರು

ಡಾ|| ಅಶೋಕ್.ಎಮ್. ಲಿಮಕರ್, ಗಣಿತ ವಿಷಯ ಪರಿವೀಕ್ಷಕರು, ಉಪನಿರ್ದೇಶಕರ ಕಛೇರಿ, ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ, ಬಿಜಾಪುರ.

ಶ್ರೀ.ಎ.ಎಸ್ ಹನುಮಾನ್, ಗಣಿತ ವಿಷಯ ಪರಿವೀಕ್ಷಕರು, ಉಪನಿರ್ದೇಶಕರ ಕಛೇರಿ, ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ, ಶಿವಮೊಗ್ಗ.

ಸಂಪಾದಕೀಯ ಮಂಡಳಿ ಸದಸ್ಯರು

ಡಾ|| ಸಮೀರ ಸಿಂಹ, ಜಂಟಿ ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿಗಳು, ವಿಜಯಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು, ಜಯನಗರ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಡಾ|| ಎಸ್ ಶಿವಕುಮಾರ್, ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಆರ್ ವಿ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜು, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಮುಖ್ಯ ಸಲಹೆಗಾರರು

ಶ್ರೀ ನಾಗೇಂದ್ರ ಕುಮಾರ್, ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಮುಸ್ತಕ ಸಂಘ ಬೆಂಗಳೂರು-85

ಶ್ರೀಮತಿ ನಾಗಮಣಿ. ಸಿ, ಉಪ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು-85

ಮುಖ್ಯ ಸಂಯೋಜಕರು

ಪ್ರೊ|| ಜಿ. ಎಸ್. ಮುಡಂಬಡಿತ್ತಾಯ, ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಪರಿಷ್ಕರಣೆ ಮತ್ತು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನೆ. ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ ಬೆಂಗಳೂರು-85

ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜಕರು

ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಲಕ್ಷ್ಮಿ ಚಿಕ್ಕನಕೋಟೆ, ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ.) ಬೆಂಗಳೂರು.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ಪರಿಷ್ಕರಣೆ ಕುರಿತು

ಒಂದರಿಂದ ಹತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಪ್ರಕಟಗೊಂಡ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಮಾನ್ಯ ಮುಖ್ಯಮಂತ್ರಿಯವರೂ ಅರ್ಥಸಚಿವರೂ ಆಗಿರುವ ಶ್ರೀ ಸಿದ್ದರಾಮಯ್ಯನವರು ತಮ್ಮ 2014–15 ರ ಬಜೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ ತಜ್ಞರ ಸಮಿತಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ಘೋಷಣೆ ಮಾಡಿದರು. ತಜ್ಞರು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ಮೂಲ ಆಶಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಿದರು: "ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಗಳನ್ನು ಸಾಮಾಜಿಕ ಸಾಮರಸ್ಯ, ನೈತಿಕಮೌಲ್ಯಗಳು, ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವವಿಕಸನ, ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮತ್ತು ವೈಚಾರಿಕ ಮನೋಭಾವ, ಜಾತ್ಯತೀತತೆ ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಬದ್ಧತೆಗಳಿಗೆ ಅನುವಾಗುವಂತೆ ತಜ್ಞರ ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಪುನರ್ ರಚಿಸಲಾಗುವುದು" – ಇದು ಬಜೆಟ್ ಭಾಷಣದಲ್ಲಿ ಸಾದರಪಡಿಸಿದ ಆಶಯ.

ಆನಂತರ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯು ಒಂದರಿಂದ ಹತ್ತನೇ ತರಗತಿಯವರೆಗಿನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಪರಿಷ್ಕರಣೆಗಾಗಿ 27 ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ದಿನಾಂಕ: 24.11.2014 ರಂದು ಆದೇಶಹೊರಡಿಸಿತು. ಈ ಸಮಿತಿಗಳು ವಿಷಯವಾರು ಮತ್ತು ತರಗತಿವಾರು ಮಾನದಂಡಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ರಚಿತವಾದವು. ವಿವಿಧ ಪಠ್ಯವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತಜ್ಞರು, ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಈ ಸಮಿತಿಗಳಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಈಗಾಗಲೇ ಲಿಖಿತವಾಗಿ ಬಂದಿರುವ ಅನೇಕ ಆಕ್ಷೇಪಗಳು ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ತಪ್ಪು ಒಪ್ಪುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿರ್ಣಹಿಸಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸುವ ಹೊಣೆಹೊತ್ತ ಈ ಸಮಿತಿಗಳಿಗೆ 'ಅಗತ್ಯಹಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿ ನಂತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸುವ' ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವನ್ನು 24.11.2014ರ ಆದೇಶದಲ್ಲೇ ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು. ಆನಂತರ 19.09.2015 ರಂದು ಹೊಸ ಆದೇಶ ಹೊರಡಿಸಿ 'ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪುನರ್ ರಚಿಸುವ' ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವನ್ನು ನೀಡಲಾಯಿತು. ಹೀಗೆ ಸಮಗ್ರ ಪರಿಷ್ಕರಣೆಗೊಂಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು 2016–17 ರ ಬದಲು 2017–18ನೇ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದೆಂದು ಇದೇ ಆದೇಶದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಯಿತು.

ಅನೇಕ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳೂ ಸಂಘಟನೆಗಳೂ ಸ್ವಯಂಪ್ರೇರಿತರಾಗಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಮಾಹಿತಿದೋಷ, ಆಶಯದೋಷಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಚಿವರಿಗೆ, ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸಿದ್ದರು. ಅವುಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆಮಾಡಿದ್ದಲ್ಲದೆ, ಸಮಿತಿಗಳಾಚೆಗೆ ಅನೇಕ ಸಂವಾದಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿ ವಿಚಾರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸಂಘಗಳ ಜೊತೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದಲ್ಲದೆ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಕಳಿಸಿ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಧ್ಯಾಪಕರು, ವಿಷಯಪರಿವೀಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ಡಯಟ್ ಪ್ರಾಂಶುಪಾಲರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಭೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಅಭಿಮತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನ, ಸಮಾಜವಿಜ್ಞಾನ, ಗಣಿತ, ಭಾಷೆ ಸಾಹಿತ್ಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತಜ್ಞರಿಗೆ ಮೊದಲೇ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕಳುಹಿಸಿ ಆನಂತರ ಸಭೆ ನಡೆಸಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮಹಿಳಾ ಸಂಘಟನೆ ಹಾಗೂ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಂಬಂಧಿ ಸಂಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ಆಹ್ವಾನಿಸಿ ಚಿಂತನೆ ನಡೆಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಅರಿವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಕಡೆ ಪರಿಷ್ಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಬಹುಮುಖ್ಯವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕು. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಾಲಾ (N.C.E.R.T) ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಜೊತೆ ರಾಜ್ಯದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ತೌಲನಿಕವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ ಸಲಹೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲು ವಿಜ್ಞಾನ, ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಮಾಜವಿಜ್ಞಾನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತಜ್ಞರ ಮೂರು ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಸಮಿತಿಗಳು ನೀಡಿದ ತೌಲನಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಸಲಹೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ರಾಜ್ಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಗುಣಮಟ್ಟವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಾಲಾ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಿಗಿಂತ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಗುಣಮಟ್ಟ ಕಡಿಮೆಯಾಗದಂತೆ ಕಾಯ್ದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಜೊತೆಗೆ ಆಂಧ್ರ, ತಮಿಳುನಾಡು, ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಜೊತೆ ನಮ್ಮ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಪಷ್ಟನೆಯನ್ನು ನೀಡಲು ಬಯಸುತ್ತೇನೆ. ನಮ್ಮ ಸಮಿತಿಗಳು ಮಾಡಿರುವುದು ಪರಿಷ್ಕರಣೆಯೇ ಹೊರತು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಮಗ್ರ ರಚನೆಯಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗಾಗಲೇ ರಚಿತವಾಗಿರುವ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲಿಯೂ ಧಕ್ಕೆಯುಂಟುಮಾಡಿಲ್ಲ. ಲಿಂಗತ್ವ ಸಮಾನತೆ, ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ, ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಮಗ್ರತೆ, ಸಮಾನತೆ, ಸಾಮಾಜಿಕ ಸಾಮರಸ್ಯಗಳ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪರಿಷ್ಕರಣೆಗಳು ನಡೆದಿವೆ. ಹೀಗೆ ಪರಿಷ್ಕರಿಸುವಾಗ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಚೌಕಟ್ಟು ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಮೀರಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಸಬಯಸುತ್ತೇನೆ: ಜೊತೆಗೆ ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನದ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಮಿತಿಗಳು ಮಾಡಿದ ಪರಿಷ್ಕರಣೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ವಿಷಯವಾರು ಉನ್ನತ ಪರಿಶೀಲನ ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅಭಿಪ್ರಾಯಪಡೆದು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ನಡೆದ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ತಮ್ಮನ್ನು ತಾವು ಸಂಪೂರ್ಣ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಂಡ 27 ಸಮಿತಿಗಳ ಅಧ್ಯಕ್ಷರು ಮತ್ತು ಸದಸ್ಯರನ್ನು ಹಾಗೂ ಉನ್ನತ ಪರಿಶೀಲನಾ ಸಮಿತಿಯ ಸಮಸ್ತರನ್ನು ಕೃತಜ್ಞತೆಯಿಂದ ನೆನೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂತೆಯೇ ಸಮಿತಿಗಳ ಕೆಲಸ ಸುಗಮವಾಗಿ ನಡೆಯುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಮಾಡಲು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಾಗಿ ನಿಷ್ಠೆಯಿಂದ ದುಡಿದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘದ ಎಲ್ಲಾ ಅಧಿಕಾರಿಗಳನ್ನೂ ನೆನೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಹಕರಿಸಿದ ಸಿಬ್ಬಂದಿಗೂ ನಮ್ಮ ವಂದನೆಗಳು. ಅಭಿಪ್ರಾಯ ನೀಡಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಸರ್ವ ಸಂಘಟನೆಗಳು ಮತ್ತು ತಜ್ಞರಿಗೆ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ನರಸಿಂಹಯ್ಯ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
ಬೆಂಗಳೂರು-85

ಪ್ರೊ. ಬರಗೂರು ರಾಮಚಂದ್ರಪ್ಪ
ಸರ್ವಾಧ್ಯಕ್ಷರು
ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಪರಿಷ್ಕರಣ ಸಮಿತಿ
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
ಬೆಂಗಳೂರು-85

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಪರಿಷ್ಕರಣಾ ಸಮಿತಿ

ಸರ್ವಾಧ್ಯಕ್ಷರು:

ಡಾ. ಬರಗೂರು ರಾಮಚಂದ್ರಪ್ಪ – ಸರ್ವಾಧ್ಯಕ್ಷರು, ರಾಜ್ಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಪರಿಷ್ಕರಣಾ ಸಮಿತಿ, ಬೆಂಗಳೂರು – 85.

ಮುಖ್ಯ ಸಲಹೆಗಾರರು:

ಶ್ರೀ ನರಸಿಂಹಯ್ಯ – ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಶ್ರೀಮತಿ ನಾಗಮಣಿ. ಸಿ – ಉಪನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಅಧ್ಯಕ್ಷರು:

ಡಾ. ವಿಜಯಲಕ್ಷ್ಮಿ ಶೀಗೇಹಳ್ಳಿ – ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ರಾಣಿ ಚೆನ್ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಬೆಳಗಾವಿ.

ಸದಸ್ಯರು:

ಪ್ರೊ. ಕೆ.ವಿ ಪ್ರಸಾದ್ – ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಶ್ರೀ ಕೃಷ್ಣದೇವರಾಯ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಬಳ್ಳಾರಿ.

ಶ್ರೀಮತಿ ಜಿ.ವಿ. ನಿರ್ಮಲ – ನಿವೃತ್ತ NAL ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು, ಗವಿಪುರಂ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಡಾ. ಶರದ್ ಸುರೆ – ಸಹ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಅಜೀಮ್ ಪ್ರೇಮಜೀ ಫೌಂಡೇಶನ್, ಹೊಸೂರು ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಶ್ರೀ ರಾಮಚಂದ್ರ – ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಶ್ರೀ ಗಂಗಾಧರೇಶ್ವರ ಸಂ.ಪ.ಪೂ. ಕಾಲೇಜು, ಆದಿಚುಂಚನಗಿರಿ, ನಾಗಮಂಗಲ ತಾ॥, ಮಂಡ್ಯ ಜಿಲ್ಲೆ.

ಶ್ರೀ ಗೋಪಾಲಕೃಷ್ಣ ಎಸ್ – ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಸಂತ ಅಲೋಸಿಯಸ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಕೊಡಿಯಾಲ್‌ಬೈಲ್ ಮಂಗಳೂರು.

ಶ್ರೀ ಶ್ರೀಧರ್ ಸಿ ಕೆ – ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಡಿ.ವಿ.ಎಸ್ ಸಂ.ಪ.ಪೂ. ಕಾಲೇಜು, ಶಿವಮೊಗ್ಗ.

ಶ್ರೀಮತಿ ಶಾರದ ಹೆಚ್ ಎಸ್ – ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಕುಕ್ಕರಹಳ್ಳಿ, ಮೈಸೂರು.

ಶ್ರೀ ಅನಿಲ್ ಕುಮಾರ್ ಸಿ ಎನ್ – ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಅರಳಾಳುಸಂದ್ರ, ಹೊಸೂರು ಅಂಚೆ, ಬಿಡದಿ ಹೋಬಳಿ ರಾಮನಗರ ತಾ॥ ಮತ್ತು ಜಿಲ್ಲೆ.

ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜಕರು:

ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಲಕ್ಷ್ಮಿ ಚಿಕ್ಕನಕೋಟೆ – ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಪರಿವಿಡಿ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ – ಒಂದು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಪರಿಚಯ

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು **ವೇದ ಕಾಲದಿಂದಲೂ** ಪ್ರಚಲಿತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ವೇದಕಾಲದ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಪ್ರಥಮ ಪಠ್ಯವೆಂದರೆ ಶುಲ್ವಸೂತ್ರಗಳು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಜ್ಞ ಕುಂಡಗಳ ರಚನಾ ಕ್ರಮದ ಬಗ್ಗೆ ವಿವರಗಳಿವೆ. ಈ ಪುರಾತನ ಪಠ್ಯಗಳು $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಮುಂತಾದ ರೂಪದ **ಕರಣಿ**ಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತವೆ. (ನಿಜ ಸಂಗತಿಯೆಂದರೆ, ಬಹುತೇಕ ಪುರಾತನ ಗಣಿತವು **ಯಜ್ಞ** ಮತ್ತು **ಯಾಗ** ಮತ್ತು ಜ್ಯೋತಿಷ್ಯ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿನ ಆಸಕ್ತಿಯಿಂದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಹೊಂದಿದೆ). ಬೌಧಾಯನ ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ಅಪಸ್ತಂಭ ಸೂತ್ರಗಳು $\sqrt{2}$ ರ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯನ್ನು $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{3\times 4\times 34}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದು, ಅದು 5 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಶಾಸ್ತ್ರೀಯವಾದ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಗ್ರೀಕರು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ, ಅದನ್ನು ಮೇಲಿನ **ಸೂತ್ರ**ಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಮತ್ತೊಂದು ಪರಿಹರಿಸಲಾಗದಿದ್ದ ಸಮಸ್ಯೆಯಾದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವ ಬಗ್ಗೆ **ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರ**ಗಳಲ್ಲಿದೆ. ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ದತ್ತ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಇಂತಹ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಸರಿಸುಮಾರು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಇದು ಎರಡು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳವರೆಗೂ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೇ ಉಳಿದಿತ್ತು ಮತ್ತು 18ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ರಚನೆಯು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ದೃಢವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಯಿತು.

π ನ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲು ನೀಡಿದ ಕೀರ್ತಿ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಆರ್ಯಭಟ I (ಕ್ರಿ.ಶ. 476) π ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸರಿಸುಮಾರು 3.1416 ಎಂದು ನೀಡಿದನು; 20000 ಮಾನದ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು ಸರಿಸುಮಾರು 62832 ಮಾನಗಳಿಗೆ ಸಮನಾದ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆಂದು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಒಂದು ಅಂಶವೆಂದರೆ π ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಮತ್ತು ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಬಳಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಆರ್ಯಭಟI 5ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿಯೇ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿರುತ್ತಾನೆ. 1761ರಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಂಬರ್ಟ್‌ನು π ಒಂದು **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ** ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದನು ಮತ್ತು 1882ರಲ್ಲಿ ಲಿಂಡೆಮನ್‌ನು π ಒಂದು **ಅನುಭವಾತೀತ** ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿದನು.

ಇಡೀ ಪ್ರಪಂಚವೇ ಭಾರತವನ್ನು ಗೌರವಿಸುವ ಒಂದು ಅಸಾಮಾನ್ಯ ಕೊಡುಗೆಯೆಂದರೆ **ಸೊನ್ನೆ** ಮತ್ತು **ಅನಂತ**ದ(infinity) ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನೊಳಗೊಂಡ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ. **ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ**ಯ ಬಳಕೆಯು ಎಷ್ಟು ಸುಲಭವೆಂದರೆ ಮಕ್ಕಳೂ ಸಹ ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ನೀವು ನಿಜವಾಗಲೂ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಾನಬೆಲೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಸರಳತೆಯನ್ನು ಪ್ರಶಂಸಿಸಬೇಕೆಂದರೆ, ಪ್ರಚಲಿತದಲ್ಲಿರುವ **ರೋಮನ್ ಸಂಖ್ಯೆ**ಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಬೇಕು. ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಇತಿಹಾಸ ತಜ್ಞ ಫ್ಲೋರಿಯನ್ ಕಜೋರಿಯವರ ಪ್ರಕಾರ: " **ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಆವಿಷ್ಕಾರಗಳಲ್ಲಿ, ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಗತಿಗಾಗಿ ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ಮಿಗಿಲಾದ ಕಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಯಾರೂ ನೀಡಿಲ್ಲ"**. ಆಧಾರ 10ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಭಾರತೀಯರಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು. (ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಘಟಕ 4ರ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳಿಗಾಗಿ ನೋಡಿರಿ).

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿನ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಮುಖ ಮೈಲಿಗಲ್ಲೆಂದರೆ ಪ್ರಾಚೀನ ಜೈನರ ಕೊಡುಗೆಗಳು. ಇವರುಗಳು ಕ್ರಿ. ಪೂ. 500 ರಿಂದ ಕ್ರಿ.ಪೂ.200 ನೇ ಕಾಲದವರಾಗಿದ್ದು, ಅವರ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಖ್ಯಾತವಾದ ಜೈನ ಪಠ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಪುನಃ π ನ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯು $\sqrt{10}$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು 13 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ವಿಪುಲ ಕೊಡುಗೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳೆಂದರೆ: **ವ್ಯಕ್ತಗಣಿತ**ವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಅಂಕಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳು; **ಅವ್ಯಕ್ತಗಣಿತ**ವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನ. ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದರು. ಅವರುಗಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೊಂದಿಗಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು, ವರ್ಗ ಮತ್ತು ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಘನ ಮತ್ತು ಘನಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹಾಗೂ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಬಗ್ಗೆಯೂ ತಿಳಿದಿದ್ದರು.

ಮಹಾವೀರ(ಕ್ರಿ.ಶ. 9ನೇ ಶತಮಾನ), ಕರ್ನಾಟಕದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಜೈನ ಗಣಿತಜ್ಞನು ತನ್ನ **ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ**ದಲ್ಲಿ ಬಹು ಪ್ರಚಲಿತವಾದ ಸೂತ್ರ $^{n}c_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ಅನ್ನು ಗಣಿತದ ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲೇ ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ನೀಡಿದ್ದಾನೆ. ಎಲ್ಲಾ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೂ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮತ್ತು ಜ್ಯೋತಿಷ್ಯ ಶಾಸ್ತ್ರ ತಜ್ಞನಾದ **ಆರ್ಯಭಟ**I ಭಾರತೀಯನು. ಅವನು ಗಣಿತವನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಬೆಳೆಸಿರುವುದರಿಂದ ಅವನನ್ನು ನೈಜವಾಗಿಯೇ **ಬೀಜಗಣಿತದ ಪಿತಾಮಹ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವನು ಸಂಸ್ಕೃತದಲ್ಲಿ **ಜ್ಯಾ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತ ಸೈನ್‌ನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು 0^0 ಯಿಂದ 90^0 ವರೆಗೆ ನಿಯಮಿತವಾಗಿ $3\frac{3}{4}$ ಡಿಗ್ರಿಗಳಿಗೆ ನೀಡಿದ್ದಾನೆ. ಆತನು ಭೂಮಿಯು ದುಂಡಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷತ್ರಗಳು ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಶ್ಚಲ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವೀಕ್ಷಕನಿಗೆ ಪೂರ್ವದಿಂದ ಪಶ್ಚಿಮದೆಡೆಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ಘೋಷಿಸಿದ ಭಾರತೀಯನಾಗಿದ್ದಾನೆ.

ಆರ್ಯಭಟ–I ನ ನಂತರ ಭಾಸ್ಕರ I (ಕ್ರಿ.ಶ. 6ನೇ ಶತಮಾನ) ಹಲವಾರು ಬೀಜಗಣಿತ ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾದ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದನು. ಇವನು ಬಹಳಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದಾದ ಕೋನ θ ದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಸೈನ್ θ ದ ಸರಿಸುಮಾರು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾನೆ. ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ (ಕ್ರಿ.ಶ. 628)ನು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ನೀಡಿದ್ದಾನೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c, d ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು s ಅರ್ಧ–ಸುತ್ತಳತೆ. ಇವನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬಾಹುಗಳ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ಮೊದಲ ಗಣಿತಜ್ಞ ಸಹ ಆಗಿದ್ದಾನೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತಜ್ಞರು ನೀಡಿದ ಕೊಡುಗೆಗಳ ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಮುಖ್ಯವಾದ ಕ್ಷೇತ್ರವೆಂದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ $ax + by = c$ ಮತ್ತು $x^2 - Ny^2 = 1$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c, N ಗಳು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು N ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವರ್ಗವಲ್ಲದ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಧುನಿಕ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ **ಡಯಾಫಾಂಟೈನ್** ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು **ಆಯ್ಲರನು ಪೆಲ್‌**ನ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ಕರೆದಿದ್ದು ಅದೇ ಹೆಸರು ಈಗಲೂ ಚಾಲ್ತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಈ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ, ಬಹಳಷ್ಟು ಲೇಖಕರು $x^2 - Ny^2 = 1$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ–ಪೆಲ್‌ನ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆರ್ಯಭಟ I, $ax + by = c$ ಸಮೀಕರಣದ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಾನೆ ಹಾಗೂ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನು $x^2 - Ny^2 = 1$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾನೆ. ಆದರೂ, ನಂತರ ಭಾಸ್ಕರ II (ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯನೆಂದು ಪ್ರಖ್ಯಾತವಾಗಿ ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ) $x^2 - Ny^2 = 1$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸುವ, **ಚಕ್ರವಾಲ ಪದ್ಧತಿ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಹೊಸ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾನೆ. $x^2 - Ny^2 = 1$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಬಗ್ಗೆ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಅಂಶವೊಂದಿದೆ. 1657ರಲ್ಲಿ ಫರ್ಮಾಟ್(ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಕೊಡುಗೆಗಾಗಿ ಪ್ರಖ್ಯಾತನಾಗಿದ್ದವ) x, y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ $x^2 - 61y^2 = 1$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಯೂರೋಪಿಯನ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ನೀಡಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಯಾರಿಗೂ ಪರಿಹರಿಸಲಾಗಲಿಲ್ಲ. 1732 ರಲ್ಲಿ ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಆಯ್ಲರ್‌ನು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡಿದನು. ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾಗಿ, ದೈವದ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯೋ(divine coincidence) ಎನ್ನುವಂತೆ ಇದೇ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - 61y^2 = 1$ ನ್ನು ಭಾಸ್ಕರ II, (ಕ್ರಿ.ಶ.1150) ತನ್ನ **ಬೀಜಗಣಿತಂ**ನಲ್ಲಿ **ಚಕ್ರವಾಲ** ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 5 ಶತಮಾನಗಳ ಮೊದಲೇ ಬಿಡಿಸಿದ್ದನು. $x^2 - 61y^2 = 1$ ಸಮೀಕರಣದ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಭಾಸ್ಕರ II, $x = 226153980$

ಮತ್ತು y = 1766319049 ಎಂದು ನೀಡಿದ್ದನು. ಭಾಸ್ಕರ II, ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ (calculus) ದಲ್ಲಿನ ವ್ಯುತ್ಪನ್ನ(derivative) ದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ತೀವ್ರವಾಗಿ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದನು. ಆತನು $d(\sin x) = \cos x.dx$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಿದ್ದನು.

ಭಾಸ್ಕರ II ಮತ್ತು ಮಹಾವೀರರ ಅತ್ಯಂತ ಸುಂದರವಾದ ಮತ್ತು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಕಾವ್ಯಮಯವಾದ ಕಲ್ಪನೆಗಳಲ್ಲಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಾಸಂಗಿಕವಾಗಿ, ಭಾಸ್ಕರ II ಪ್ರಸ್ತುತ **ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಬಿಜಾಪುರ** ಜಿಲ್ಲೆಯ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿ ನಂತರ **ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ** ರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ಹೋದವನಾಗಿದ್ದಾನೆ. ಇಲ್ಲಿ ಚರಣದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಅನುವಾದಿಸಲಾದ ಎರಡು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ:

1. **(ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ ಲೀಲಾವತಿಯಿಂದ)**

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಾಲ್ಕನೇ–ಮೂರು ಭಾಗದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಅದನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೂರನೇ–ಒಂದರಷ್ಟನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿ, 52 ನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ, ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, 8ನ್ನು ಕೂಡಿ, 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ಎಂದು ಮನೆಗೆಲಸದ ಸಹಾಯಕಿ ನನಗೆ ಕೇಳಿದ್ದಾಳೆ. ನನ್ನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿರಾ?

2. **(ಮಹಾವೀರನ ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹದಿಂದ)**

ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಬಿದ್ದಿರುವ ಒಂದು ಕೈಚೀಲವನ್ನು ಮೂವರು ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು ನೋಡುತ್ತಾರೆ. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಹೇಳುತ್ತಾನೆ "ನಾನು ಈ ಕೈಚೀಲವನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ನೀವಿಬ್ಬರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಪಡೆಯುವ ಹಣಕ್ಕಿಂತ ಎರಡರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತೇನೆ". "ಕೈಚೀಲವನ್ನು ನನಗೆ ನೀಡಿ, ನಾನು ಮೂರರಷ್ಟನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತೇನೆ" ಎಂದು ಎರಡನೇ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ಮೂರನೇ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ "ಈ ಕೈಚೀಲವನ್ನು ನಾನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ನೀವಿಬ್ಬರೂ ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕಿಂತ ಉತ್ತಮವಾದ ಹಣವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತೇನೆ; ನೀವಿಬ್ಬರೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ಹಣಕ್ಕಿಂತಲೂ ಐದು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ನನಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ". ಕೈಚೀಲದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಹಣ ಎಷ್ಟು? ಪ್ರತಿ ವ್ಯಾಪಾರಿಯೂ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಹಣವೆಷ್ಟು?

ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಸಾಧನೆಗಳು ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಗಮನಾರ್ಹವಾಗಿವೆ: ಅಂಕಗಣಿತ; ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು; ಗೋಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯೋತಿಷ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ; ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳು; ಸಮಮಿತಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಶಾಸ್ತ್ರ; ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ. ದುರದೃಷ್ಟವಶಾತ್, ಭಾಸ್ಕರ 2ನ ನಂತರ, ಪರಕೀಯರ ದಾಳಿಯಿಂದಾಗಿ, ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರು ನೇಪತ್ಯಕ್ಕೆ

ಸರಿದರು. ಕೇರಳ ಶಾಲೆಯ ನೀಲಕಂಠ ಮತ್ತು ಮಾಧವರವರು **ಟ್ಯಾನ್** ಫಲನ (tan functions) ಗಳಿಗೆ ಸರಣೀಕೃತ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದು ಮಾತ್ರ ಇದಕ್ಕೆ ಅಪವಾದವಾಗಿದೆ. 19ನೇ ಶತಮಾನದ ಅಂತ್ಯಕ್ಕೆ **ಶ್ರೀನಿವಾಸರಾಮಾನುಜನ್**‌ರಿಂದ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತವು ತನ್ನ ವೈಭವವನ್ನು ಮರಳಿ ಪಡೆಯಿತು. ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರು ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಅದ್ಭುತ ಗಣಿತಜ್ಞರು. ಅವರು ತಮ್ಮ ಅಲ್ಪ ಅವಧಿಯ 32 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಅತಿಪರ–ರೇಖಾಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳು(hyper-geometric series), ಅಪಸರಣ ಶ್ರೇಣಿಗಳು(divergent series), ಎಲಿಪ್ಟಿಕ್ ಫಂಕ್ಷನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಇಂಟೆಗ್ರಲ್ಸ್(elliptic functions and integrals) ಮತ್ತು ಮಾಕ್–ತೀಟಾ ಫಂಕ್ಷನ್(mock-theta function) ಗಳಿಗೆ ಅದ್ಭುತವಾದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರು. ಇಂದಿಗೂ, ಪ್ರಪಂಚದಾದ್ಯಂತ ಗಣಿತಜ್ಞರುಗಳು ಅವರ ಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನದ ಆಳವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಮತ್ತು ಅವರು ನೀಡಿದ ಕೆಲವು ಊಹಾತ್ಮಕ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಲೇ ಇದ್ದಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ಒರಿಸ್ಸಾದ **ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಸಾಮಂತ** ಅವರು 19ನೇ ಶತಮಾನದ ಕೊನೆಗೆ ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನಕ್ಕೆ ನೀಡಿರುವ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುವುದೂ ಸಮಂಜಸವಾಗುತ್ತದೆ.

(ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಬಗೆಗಿನ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳಿಗೆ ಡಾಕ್ಟರ್. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್‌ರವರ Indian Mathematics and Astronomy: some landmarks ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಓದಿರಿ)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ಘಟಕ – 1
ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗಿನ ಆಟ

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ನೀವು ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ:

- ದತ್ತ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ (ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 10) ಬರೆಯುವುದು.
- ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೆಲವು ಆಟಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು.
- ಎರಡು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಒಂದರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು.
- 3×3 ರ ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
- 4, 3, 9, 5, 11 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು.
- ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬಿಡಿಸಲಾಗಿರದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಮಾನವನ ಬೌದ್ಧಿಕ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿವೆ. ಇವು ಈಗಲೂ ಮಕ್ಕಳ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವೇದಿಕೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿವೆ. ಮಿದುಳಿಗೆ ಕಸರತ್ತನ್ನು ನೀಡುವ ಕೆಲವು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ಆಟವಾಡಲು (ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ) ಬಳಸಬಹುದು. ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಕೌತುಕವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸೋಣ. ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಇದುವರೆಗೆ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರುವ ಕೆಲವು ಊಹಾ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಮತ್ತು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅದ್ಭುತ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಇದು ಬಹುಶಃ ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.

ನೀವು 76 ಅಥವಾ 315ನ್ನು ಬರೆದು ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುವಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 76ರಲ್ಲಿ 6 ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು 7 ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವಿರಿ. ಅದೇ ರೀತಿ, 315ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, 5 ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ, 1 ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು 3 ನೂರರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವಿರಿ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದರಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಅಂಕಿಯ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅರಿಯುವಿರಿ. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಪರಿಶೋಧಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸೋಣ.

2, 24, 46, 88 ಅಥವಾ 122ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಇವು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ 2 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಕ್ಷಣ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡಿ ಅದು 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ವೀಕ್ಷಿಸಿ

4, 5, 9 ಅಥವಾ 11 ರಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಭಾಗವಾಗುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3, 4, 5, 9, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುವ ಕೆಲವು ಸರಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಸಂಖ್ಯೆ 45ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು

$$45 = 40 + 5 = (4 \times 10) + (5 \times 1)$$

ಅದೇ ರೀತಿ, $34 = 30 + 4 = (3 \times 10) + (4 \times 1)$

354ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$354 = 300 + 50 + 4 = (3 \times 100) + (5 \times 10) + (4 \times 1)$.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 :

ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ರೂಪದಂತೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

75, 88, 121, 361, 1024, 2011, 4444, 2345.

ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ರೂಪದಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಾ? ಎಷ್ಟು ಅಂಕಿಗಳಿವೆ ಎಂಬುದು ನಗಣ್ಯ, ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. 9–ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 123456789 ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು;

$$123456789 = 100000000 + 20000000 + 3000000 + 400000 + 50000 + 6000 + 700 + 80 + 9$$

$$= (1 \times 100000000) + (2 \times 10000000) + (3 \times 1000000) + (4 \times 100000) + (5 \times 10000) + (6 \times 1000) + (7 \times 100) + (8 \times 10) + (9 \times 1)$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ಕಲಿಯುವಿರಿ.

$$123456789 = (1 \times 10^8) + (2 \times 10^7) + (3 \times 10^6) + (4 \times 10^5) + (5 \times 10^4) + (6 \times 10^3) + (7 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$$

ಇದನ್ನು ದತ್ತ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 10ರ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 10ನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 136ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$136 = (1 \times 100) + (3 \times 10) + (6 \times 1)$.

6, 1 ರೊಂದಿಗೆ; 3, 10 ರೊಂದಿಗೆ; ಮತ್ತು 1, 100 ರೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಈ ಕಾರಣದಿಂದಲೇ 6 ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ; 3 ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ ಮತ್ತು 1 ನೂರರ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವುದು.

$abcd$ ಯು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನ, ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನ, ನೂರರ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಸಾವಿರ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ d,c,b,a ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ, ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ ರೂಪವು

$abcd = (a \times 1000) + (b \times 100) + (c \times 10) + (d \times 1)$.

$abcd$ ಯು a, b, c ಮತ್ತು d ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅನುಮಾನವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\overline{abcd}$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, $\overline{abcd} = (a \times 1000) + (b \times 100) + (c \times 10) + (d \times 1)$.

ಕ್ರಿ.ಪೂ. 1200 ರಿಂದ ಉಗಮವಾದ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತವು ಭಾರತದ ಉಪಖಂಡದಲ್ಲಿ, 18 ನೇ ಶತಮಾನದ ಅಂತ್ಯದವರೆಗೂ ಬೆಳೆದು, ಅದರ ನಂತರ ಆಧುನಿಕ ಯುಗವು ಉಗಮಿಸಿತು. ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತದ ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ (ಕ್ರಿ.ಶ 400 ರಿಂದ ಕ್ರಿ.ಶ 1200), ಶ್ರೇಷ್ಠ ವಿದ್ವಾಂಸರಾದ ಆರ್ಯಭಟ, ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ ಮತ್ತು ಭಾಸ್ಕರ–2 ಇವರುಗಳು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದರು. ಪ್ರಸ್ತುತ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿ ಇವುಗಳು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ದಾಖಲಾಗಿವೆ. ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮೊದಲಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ, ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. ಇದೇ ಅಲ್ಲದೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಶಾಸ್ತ್ರವು ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಸೈನ್(sine) ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ (cosine) ನ ಆಧುನಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಭಾರತದಲ್ಲೇ ಚಾಲ್ತಿಗೆ ಬಂದವು. ಈ ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮಧ್ಯ ಪೂರ್ವ, ಚೈನಾ ಮತ್ತು ಯೂರೋಪ್‌ಗಳಿಗೆ ಪ್ರಸರಣ ಹೊಂದಿ, ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ನಾಂದಿಯಾಯಿತು. ಇವುಗಳು ಪ್ರಸ್ತುತ ಬಹುತೇಕ ಗಣಿತ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಬುನಾದಿಯಾಗಿವೆ.

ಬಹುತೇಕ ಗಣಿತದ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ಸರಿ ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಪೂ.500ರವರೆಗೆ ಮೌಖಿಕವಾಗಿ ಪ್ರಸರಣ ಹೊಂದಿವೆ; ತದನಂತರ ಅವುಗಳು ಮೌಖಿಕವಾಗಿ ಮತ್ತು ಬರಹ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸರಣ ಹೊಂದಿದವು. ಭಾರತದ ಉಪಖಂಡದಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಾದ ಅತ್ಯಂತ ಪುರಾತನ ಗಣಿತೀಯ ದಾಖಲೆಯೆಂದರೆ ಬರ್ಚ್ ಬಾರ್ಕ್ ಭಕ್ಷಾಲಿ ಕೈಬರಹ. ಇದನ್ನು 1881ರಲ್ಲಿ ಪೆಶಾವರದ(ಈಗಿನ ಪಾಕಿಸ್ತಾನ) ಸಮೀಪದ ಹಳ್ಳಿ ಭಕ್ಷಾಲಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 10ರ ಆಧಾರವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಒಂದು ಅನುಕೂಲಕರ ಕ್ರಮ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ವಿವಿಧ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು ಆಧಾರ 2 (ದ್ವಿಮಾನ ಸಂಕೇತಗಳು) ಮತ್ತು ಆಧಾರ 16 (ಷಡ್–ದಶಮಾಂಶ ಸಂಕೇತ) ಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತವೆ. ಏನೇ ಆದರೂ, ದೈನಂದಿನ ವ್ಯವಹಾರಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ(ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 10)ಯು ಅತ್ಯಂತ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದು ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ಸದಾ ಕಾಲ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:
   39, 52, 106, 359, 628, 3458, 9502, 7000.

2. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:
   i) $(5 \times 10) + (6 \times 1)$;
   ii) $(7 \times 100) + (5 \times 10) + (8 \times 1)$;
   iii) $(6 \times 1000) + (5 \times 10) + (8 \times 1)$;
   iv) $(7 \times 1000) + (6 \times 1)$; v) $(1 \times 1000) + (1 \times 10)$.

ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೆಲವು ಆಟಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರನ್ನು ಖುಷಿ ಪಡಿಸಲು ಸಹಾಯವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಆಟವನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆಟ 1.

ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಜಾದೂ ಆಡಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಹಲವಾರು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುವಿರಿ.

ಹಂತ–1. 2–ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರಿಗೆ ಹೇಳಿ, ಅದನ್ನು ಅವರು ನಿಮಗೆ ಹೇಳದಿರಲಿ.

ಹಂತ–2. ಅವರು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ತಿಳಿಸಿ.

ಹಂತ–3. ಈಗ ಈ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಂತೆ ತಿಳಿಸಿ.

ಹಂತ–4. ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರನ್ನು ಚಕಿತಗೊಳಿಸಿ.

ಯಾವುದೇ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಅವರು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನಾಗಲೀ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಮೊತ್ತವನ್ನು 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆ 41 ಆಗಿರಲಿ. ಇದರ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆ 14. ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ $41 + 14 = 55$. 55ನ್ನು 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ 0. ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಕುತೂಹಲವಲ್ಲವೆ?

ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ab ಆದರೆ, ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $\overline{ab} = (a \times 10) + (b \times 1)$. ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆ $\overline{ba} = (b \times 10) + (a \times 1)$. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತವು,

$\overline{ab} + \overline{ba} = (a \times 10) + (b \times 1) + (b \times 10) + (a \times 1) = 11(a + b)$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 2 :

ನಿಮ್ಮದೇ ಆದ ಒಂದು ಆಟವನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು. 2-ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಬದಲು, ಅವುಗಳ ಧನಾತ್ಮಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರಿ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. 21, 34, 86, 79, 95 ಹೀಗೆ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಯಾವ ಭಾಜಕವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ: 21–12, 43–34, 86–68, 97–79, 95–59? ಇದರಿಂದ ಯಾವ ಆಟವನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು?

ಆಟ 2.

ಈ ಬಾರಿ, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರಿಗೆ 3–ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಹೇಳಿ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ತಿರುವು ಮುರುವು ಮಾಡಿ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ತಿಳಿಸಿ, ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಈಗ ಪಡೆದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೇಳಲು ತಿಳಿಸಿ. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು 99 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮಗೆ ಏನೂ ತಿಳಿದಿರದಿದ್ದರೂ, ಈಗ ಬರುವ ಶೇಷ 0 ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರನ್ನು ಚಕಿತಗೊಳಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರ ಆಯ್ಕೆ 891 ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ತಿರುವುಮುರುವು (ರಿವರ್ಸ್) ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 198 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 891 – 198 = 693 =99 × 7. ಹೀಗಾಗಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು 99 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3 :

3 ಅಂಕಿಗಳ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ 263, 395, 512, 765, 681, 898, 926. ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ತಿರುವುಮುರುವು ಮಾಡಿ, ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿರುವುಮುರುವು ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು 99 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯ? ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆ $\overline{abc}$ ಆದರೆ, ಅದರ ತಿರುವುಮುರುವು ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆ $\overline{cba}$. ಹೀಗೆ,

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (a \times 100) + (b \times 10) + (c \times 1) - (c \times 100) - (b \times 10) - (a \times 1)$$
$$= (99 \times a) - (99 \times c)$$
$$= 99(a - c)$$

ಆದುದರಿಂದ, ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಯಾವಾಗಲೂ 99 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಟ 3.

ಈಗ ಒಂದು 3 – ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ 132ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ 213 ಮತ್ತು 321 ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ;

132 + 213 + 321 = 666 = 18 × 37 ಪಡೆಯುವಿರಿ.

ಇದನ್ನು 196, 225, 308, 446, 589, 678, 846 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಸಾರಿ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ 37 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಾ? ಈ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ಆಟವನ್ನು ರೂಪಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಹೇಳಿಕೆ 1.

3–ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ $\overline{abc}$ ಕೊಟ್ಟಿದೆ, ಇವುಗಳ ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಿಂದ ಮತ್ತೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ: $\overline{bca}$ ಮತ್ತು $\overline{cab}$. ಈಗ $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವು 37ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಸಾಧನೆ ಕಠಿಣವೇನಲ್ಲ. 132 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

$132 = (1 \times 100) + (3 \times 10) + (2 \times 1)$,

$321 = (3 \times 100) + (2 \times 10) + (1 \times 1)$,

$213 = (2 \times 100) + (1 \times 10) + (3 \times 1)$, ಹೀಗೆ,

$$\begin{aligned} 132 + 321 + 213 &= 1\,(100 + 10 + 1) + 3\,(10 + 1 + 100) + 2\,(1 + 100 + 10) \\ &= (1 + 3 + 2)\ 111 \\ &= 6 \times 3 \times 37. \end{aligned}$$ ಇದನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ,

$\overline{abc} = (a \times 100) + (b \times 10) + (c \times 1)$

$\overline{bca} = (b \times 100) + (c \times 10) + (a \times 1)$

$\overline{cab} = (c \times 100) + (a \times 10) + (b \times 1)$

ಹೀಗೆ,

$$\begin{aligned} \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} &= (a \times 100) + (b \times 10) + (c \times 1) + (b \times 100) + (c \times 10) \\ &\quad + (a \times 1) + (c \times 100) + (a \times 10) + (b \times 1) \\ &= 111\,(a + b + c). \end{aligned}$$

ಆದರೆ, 111 = 37 × 3. ಆದುದರಿಂದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು 37 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ 37 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಆಲ್ಫಾ (Alpha) ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ಅಕ್ಷರಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಂತೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 1. ಮುಂದೆ ನೀಡಿರುವ ಸಂಕಲನದ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ P ಯಿಂದ ಸೂಚಿತವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{array}{rccc} & 4 & 1 & P \\ + & Q & 1 & 5 \\ \hline & 5 & 2 & 6 \\ \hline \end{array}$$

P ಒಂದು ಅಂಕಿಯಾಗಿ 9ನ್ನು ಮೀರಲಾಗದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. 6 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಏಕೈಕ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ 1ಕ್ಕೆ 5ನ್ನು ಕೂಡುವುದು. ಆದುದರಿಂದ P = 1. ಹೀಗೆಯೇ, Q = 1 ಮತ್ತು 411 + 115 = 526 ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2. ಮುಂದಿನ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು C ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{array}{rcc} & 3 & A \\ \times & 1 & 2 \\ \hline C & 8 & 4 \\ \hline \end{array}$$

ಇಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯು 2 × A = 4. ಆದ್ದರಿಂದ A = 2 ಅಥವಾ A = 7. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು? A = 2 ಆದರೆ, 32 × 12 = 384 ಪಡೆಯುವಿರಿ. ಇದು C = 3 ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಾದರೆ, A = 7 ಆದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧ 37 × 12 = 444. ಆದರೂ, ಉತ್ತರದಲ್ಲಿ, ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು 8 ಹೊರತು 4 ಅಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ A = 7, ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿರಸ್ಕರಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ A = 2 ಮತ್ತು C = 3 ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ, A, B ಮತ್ತು C ವಿಭಿನ್ನ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{array}{rccc} & & A & A \\ + & & B & B \\ + & & C & C \\ \hline & B & A & C \\ \hline \end{array}$$

A + B + C ಯಲ್ಲಿ, A + B = 10 ಆಗುವಂತೆ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿ C ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. (A + B = 0, ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಏಕೆ?)C ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $C \leq 9$. ಆದುದರಿಂದ, ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ದಶಕ 1. ನಾವು 3 ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೂಡುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ, ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿನ ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದ ದಶಕವು 2ನ್ನು ಮೀರಲಾಗದು. ಹೀಗಾಗಿ, B, 2 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಲಾರದು. ಆದುದರಿಂದ B = 1 ಅಥವಾ 2. ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ (ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ದಶಕ 1 ನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿಕೊಂಡು) A + B + C + 1 = 10 + C + 1 ದೊರೆಯುತ್ತದೆ

ಮತ್ತು ಇದನ್ನು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ A ಬರುತ್ತದೆ. $B = 1$ ಆದರೆ, $A = 9$ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $C + 1 = 9$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ $C = 8$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, $99 + 11 + 88 = 198$ ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ಸರಿಯುತ್ತರ. $B = 2$ ಆದರೆ, $A = 8$ ಮತ್ತು $C + 1 = 8$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ $C = 7$ ಮತ್ತು $88 + 22 + 77 = 187$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುರಿಂದ, ಸರಿ ಉತ್ತರ $99 + 11 + 88 = 198$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\begin{array}{r} 3 \\ +\ B \\ \hline 7 \\ \hline \end{array}$

ii) $\begin{array}{rr} 1 & 6 \\ +\ 2 & A \\ \hline B & 1 \\ \hline \end{array}$

iii) $\begin{array}{rr} 2 & A \\ \times & A \\ \hline 12 & A \\ \hline \end{array}$

iv) $\begin{array}{rrr} 1 & A & A \\ +\ 1 & A & A \\ \hline 2 & A & A \\ \hline \end{array}$

v) $\begin{array}{rr} 1 & A \\ \times\ 1 & A \\ \hline 1\,B & A \\ \hline \end{array}$

vi) $\begin{array}{rr} 3 & A \\ \times & A \\ \hline 2\,B & A \\ \hline \end{array}$

2. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿ A, B ಮತ್ತು C ಕ್ರಮಾನುಗತ ಅಂಕಿಗಳು. ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ A, B, C ಬೇರೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. A, B, C ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{array}{rrrr} & A & B & C \\ + & C & B & A \\ + & - & - & - \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

ಭಾಜ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಶೇಷಗಳು

ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಗುಣವೆಂದರೆ **ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ.** ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ **ಭಾಗಲಬ್ಧ** ಮತ್ತು **ಶೇಷವನ್ನು** ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. 91ನ್ನು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, 13, 91ನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಶೇಷ ಉಳಿಯುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, 85ನ್ನು 15 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $15 \times 5 = 75$ ಮತ್ತು $15 \times 6 = 90$; ಹಾಗಾಗಿ 85, 15 ರಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. 85ನ್ನು 15 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ 5 ಮತ್ತು ಶೇಷ 10 ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

13)91(7 15)85(5
91 75
00 10

304ನ್ನು 12 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಿರಿ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ 25 ಮತ್ತು ಶೇಷ 4 ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. 887ನ್ನು 17 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧ 52 ಮತ್ತು ಶೇಷ 3ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

12) 304 (25 17) 887 (52
24 85
64 37
60 34
4 3

ಮೇಲಿನ ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ:

$91 = (13 \times 7) + 0$,

$85 = (15 \times 5) + 10$,

$304 = (12 \times 25) + 4$,

$887 = (17 \times 52) + 3$.

$0 < 13$, $10 < 15$, $4 < 12$, $3 < 17$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಾ? ಇದರಿಂದ ಶೇಷವು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಚಟುವಟಿಕೆ 4 :

ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

i) 100 ನ್ನು 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29 ಮತ್ತು 31 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ.

ii) 300 ನ್ನು 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ.

ನಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಒಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a, ಮತ್ತು $b > 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, q ಮತ್ತು r ಎಂಬ ಅನನ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ ಆಗುವಂತೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ಮಾತ್ರ b, a ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಅಂದರೆ $r = 0$.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಇದೇ ರೀತಿಯ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಕಲಿಯುತ್ತೀರಿ. ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಆಡಬಹುದಾದ ಒಂದು ಆಟಕ್ಕೆ ಬುನಾದಿಯನ್ನಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಆಟ 4.

1000 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರಿಗೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ತಿಳಿಸಿ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 7, 11, 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಬರುವ ಶೇಷವನ್ನು ತಿಳಿಸುವಂತೆ ಹೇಳಿ. ಶೇಷಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀವು ರಚಿಸಬಹುದು.

ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 128 ಆದರೆ, ಅದನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ 2; 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾದ ಬರುವ ಶೇಷ 7 ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ 11. ಈಗ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೀಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$(2 \times 715) + (7 \times 364) + (11 \times 924).$$

ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಿದಾಗ 14142 ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 1001 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ,

$14142 = (1001 \times 14) + 128$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷ 128, ಇದೇ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ನಿಮಗೆ ರೋಚಕವೆನಿಸಲಿಲ್ಲವೆ?

ಈ ಆಟದಲ್ಲಿನ ಹಂತಗಳು ಇಂತಿವೆ:

ಹಂತ–1 : 1000 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರಿಗೆ ಹೇಳಿ.

ಹಂತ–2: ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 7, 11, 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ದೊರೆಯುವ ಮೂರು ಶೇಷಗಳನ್ನು ಹೇಳುವಂತೆ ತಿಳಿಸಿ.

ಹಂತ–3: ಮೂರು ಶೇಷಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ರಚಿಸಿ. ನಿಮಗೆ ಹೇಳಿದ ಮೂರು ಶೇಷಗಳು r_1 (7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷ), r_2 (11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷ) ಮತ್ತು r_3 (13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷ) ಆದರೆ; r_1 ನ್ನು 715 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, r_2 ನ್ನು 364 ಮತ್ತು r_3 ನ್ನು 924 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ; ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿರಲಿ. ಹೀಗೆ ಪಡೆದ ಮೂರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ, ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 1001 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ. ನಿಮಗೆ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷವೇ, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 212 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

$212 = (7 \times 30) + 2$; $212 = (11 \times 19) + 3$; $212 = (13 \times 16) + 4$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಹೀಗೆ, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ ಮತ್ತು $r_3 = 4$. ಇದರಿಂದ,

$$(r_1 \times 715) + (r_2 \times 364) + (r_3 \times 924) = (2 \times 715) + (3 \times 364) + (4 \times 924) = 6218.$$

6218ನ್ನು 1001 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ. ಬರುವ ಶೇಷ 212, ಇದೇ ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಇಂತಹ ಆಟವು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗುತ್ತಿರಬಹುದು. ಈಗ ನೀವು ಒಂದು ಸ್ವೇಚ್ಛಾ ಸಂಖ್ಯೆ $a < 1000$ ದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದಿರಿ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. r_1, r_2, r_3 ಗಳು a ನ್ನು 7, 11, 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇದನ್ನು ಕೆಲವು ಪೂರ್ಣಾಂಕ q_1, q_2, q_3 ಗಳಿಗೆ,

$a = 7q_1 + r_1$, $a = 11q_2 + r_2$, $a = 13q_3 + r_3$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದು $r_1 = a - 7q_1$, $r_2 = a - 11q_2$, $r_3 = a - 13q_3$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$715\ r_1 + 364\ r_2 + 924\ r_3 = 715(a - 7q_1) + 364(a - 11q_2) + 924(a - 13q_3)$$
$$= a(715 + 364 + 924) - (7 \times 715)q_1 - (11 \times 364)q_2 - (13 \times 924)q_3.$$

ಇದರಿಂದ ನೀವು,

$7 \times 715 = 7 \times 11 \times 13 \times 5$

$11 \times 364 = 11 \times 7 \times 13 \times 4$

$13 \times 924 = 13 \times 7 \times 11 \times 12$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ಮತ್ತು

$1001 = 7 \times 11 \times 13$. 7, 11 ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯಿತೆ?

ಆದ್ದರಿಂದ, $715\ r_1 + 364\ r_2 + 924\ r_3 = a \times 2003 - 1001\ (5q_1 + 4q_2 + 12q_3)$ ಪಡೆಯುವಿರಿ.

ಅಲ್ಲದೇ, $a \times 2003 = (a \times 1001 \times 2) + a$ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಬಹುದು. $715\ r_1 + 364\ r_2 + 924\ r_3$ ನ್ನು 1001 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1001 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಿ a ಮಾತ್ರ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. $a < 1000$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, a ಯು ಶೇಷವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದು ನೀವು ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ ೫ :

ಆಟ 4ನ್ನು ಇತರೆ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆ ೮೦೪, ೫೧೫, ೬೭೬, ೯೩೮, ೯೭, ೧೮೧ ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. ಮುಂದಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   8, 31, 44, 85, 1220,

2. ಮುಂದಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ 304 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   128, 636, 785, 1038, 2236, 8858,

3. 19 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 12ನ್ನು ನೀಡುವ 100ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ, ಕನಿಷ್ಠ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 181 ರ ಗುಣಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು 1024 ಕ್ಕೆ ಕೂಡಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು 0, 2, 4, 6 ಅಥವಾ 8 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಂಡರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕೂಡಲೇ ಹೇಳುತ್ತೀರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ನಿಮ್ಮ ಆಧಾರವೇನು? ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆ a ಯನ್ನು ನೀವು $a = 10k + r$, ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೀರಿ, ಇಲ್ಲಿ r, 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ. ಹೀಗಾಗಿ r ಎಂಬುದು 0, 2, 4, 6, 8 ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ 10, 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು r ಕೂಡ 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ 2, a ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ, ಇದೇ ರೀತಿಯ ಸರಳ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು ಇತರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಜ್ಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಇವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಆಲೋಚಿಸಬಹುದೆ? ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಈಗ ಸಂಶೋಧಿಸೋಣ.

1) 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ ಅದು 2ರಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗಬೇಕಲ್ಲವೆ? (ಏಕೆ?). ಏಕೆಂದರೆ, ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಯು 0, 2, 4, 6, 8 ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದಾಗಿರಬೇಕು. ಆದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ: 10, 22, 34, 46, 58. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಯು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದಂತೆ ಇದೆಯಾದರೂ, ಯಾವುದೂ 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ನೋಡಿ, ಭಾಜ್ಯತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಬಹುಶಃ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಜ್ಯತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಬಹುದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಭಾಜ್ಯತೆಯನ್ನು ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನೀವು 4 ರ ಮಗ್ಗಿಯನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕಷ್ಟೆ. ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದು, 2 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 112 ಮತ್ತು 122 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. 112 = 100 + 12. 100 ಹಾಗೂ 12 ಎರಡೂ 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಇದರಿಂದ 112, 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ 122 = 100 + 22, ಇಲ್ಲಿ 100, 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಆದರೆ 22 ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ಮೂಲ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹೇಳಿಕೆ 1 :

***a* ಮತ್ತು *b*, $m \neq 0$ ನಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ, $a + b$, $a - b$ ಮತ್ತು *ab* ಯನ್ನು *m* ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.**

ಇದು ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಹೇಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ? ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 'a' ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ q ಮತ್ತು ಶೇಷ r ನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಇದನ್ನು 100 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ: $a = 100\,q + r$, ಇಲ್ಲಿ $0 \leq r < 100$. 4, 100 ನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ, (r ಸಂಖ್ಯೆಯು 4ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ) a ಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಕ್ಷಣ ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಆದರೆ r, a ನ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹೀಗೆ ನೀವು ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಹೇಳಿಕೆ 2.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ a (ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ) ನ, ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ a ಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: 12456, 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ, ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 56. ಇದು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ 12456 ಸಹ 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: 12345678 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದೇ?

ಪರಿಹಾರ : ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 78, ಇದು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ 12345678 ಕೂಡ 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 8 :

ನಿಮ್ಮ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುವ ಸ್ನೇಹಿತರಿಗೆ 4, 5 ಮತ್ತು 6 ಅಂಕಿಗಳ ಹಲವಾರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲು ತಿಳಿಸಿ. ಅವುಗಳಿಗೆ 4ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 9 :

ಹಲವಾರು 4 ಮತ್ತು 5 ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ 8 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಿ.

2) 3 ಮತ್ತು 9ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು

2, 23, 234, 2345, 23456, 234567 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಈ ಆರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 234 ಮತ್ತು 234567 ಮಾತ್ರ 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ

ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲೀ ಯೋಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. 3, 234ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಯೇ ವಿನಃ 34ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅದೇ ರೀತಿ 3, 456 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ 23456 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 10 :

1, 11, 21, 31, 41, ... 141, 151 (1ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಲ್ಲಾ 1ರಿಂದ 151ರ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು). ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತವೂ 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ?

234 ಮತ್ತು 234567 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 9 ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 27, ಇವೆರಡೂ 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ. (ಅದೇ ರೀತಿ 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ). 2–ಅಂಕಿಗಳ, 3–ಅಂಕಿಗಳ ಮತ್ತು 4–ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. $n = \overline{ab}$ ಒಂದು 2–ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆಗ

$$n = \overline{ab} = (10 \times a) + b = 9a + (a + b).$$

ಇದು, $a + b$, 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ, n, 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, $m = \overline{pqr}$, ಗೆ $m = \overline{pqr} = 100p + 10q + r = (99p + 9q) + (p + q + r)$ ಮತ್ತು $(p + q + r)$ 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ m, 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ 9ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದಿರೇ? $(p + q + r)$, 9ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ m, 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಇದೇ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು 4–ಅಂಕಿಯ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಲು ನಿಮಗೇನೂ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲವಷ್ಟೆ? 234567 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 27. ಈಗ 9 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಹೇಳಿಕೆ 3.

ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ a, 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ b ಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 9ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ b, 9ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: 12345321 ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಅದು 9ರಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗುವುದೇ?

ಪರಿಹಾರ: ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 3 + 2 + 1 = 21$. ಆದುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $12345321 = (9 \times 1371702) + 3$.

ಉದಾಹರಣೆ 7: 444445 ಸಂಖ್ಯೆಯು 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದೇ?

ಪರಿಹಾರ: ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 25. ಇದು 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ 444445, 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3) 5 ಮತ್ತು 10ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು

ಚಟುವಟಿಕೆ 11 :

51ರಿಂದ 100ರ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ 5ರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. 5 ರ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಕಗಳ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ.

5 ರ ಪ್ರತಿ ಗುಣಕದಲ್ಲೂ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0 ಅಥವಾ 5 ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಈ ನಿಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಯು 5 ಮತ್ತು 10ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆಯೆ?

ಹೇಳಿಕೆ 4.

ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ a, 0 ಅಥವಾ 5ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅದು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು 0 ಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಂಡಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅದು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: 101ರಿಂದ 200ರ ವರೆಗಿನ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ?

ಪರಿಹಾರ: 0 ಅಥವಾ 5ರಿಂದ ಪೂರ್ಣಗೊಳ್ಳುವ 101ರಿಂದ 200ರ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ: 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200. 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ 20 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: 12345 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 15ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೇ?

ಪರಿಹಾರ : $15 = 3 \times 5$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ಮತ್ತು 5 ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. (ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು 15ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಇದಿಷ್ಟೇ ಸಾಕು. ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವುದು ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 4, 12ನ್ನು ಮತ್ತು 6, 12ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 24, 12ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?) ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 5 ಇರುವುದರಿಂದ ಇದು 5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ಮತ್ತು ಇದು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, 12345, 3ರಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ 12345, 15ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಉಹಾಹರಣೆ 10: 201 ರಿಂದ 250 ರವರೆಗಿನ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಆದರೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ?

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ ಪುನಃ 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250. ಈಗ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: ಅದು 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10, 6, 11, 7 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ 3, 6, 9. ಹೀಗೆ, 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ 10 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಉಳಿದ 7 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

4) 11ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ

4587 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇದು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

($4587 = 11 \times 417$). ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$4587 = (4 \times 1000) + (5 \times 100) + (8 \times 10) + 7$$
$$= (4 \times 1001) + (5 \times 99) + (8 \times 11) + (-4 + 5 - 8 + 7)$$
$$= (11 \times 91 \times 4) + (11 \times 9 \times 5) + (11 \times 8) - (4 - 5 + 8 - 7).$$

ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ, 4587 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು $4 - 5 + 8 - 7$ ಇದರ ಭಾಜ್ಯತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ. ಇದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಅಂಶವೆಂದರೆ + ಮತ್ತು – ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ನಾವು $4 - 5 + 8 - 7 = 0$, ಇದು 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

3–ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 429ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. 429, 11ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. $429 = 11 \times 39$. ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

$$429 = (4 \times 100) + (2 \times 10) + 9$$
$$= (4 \times 99) + (2 \times 11) + (4 - 2 + 9).$$

$4 - 2 + 9 = 11$, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದರಿಂದ 429, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು, 11 ರಿಂದ ನೈಜವಾಗಿ ಭಾಗಿಸದೆಯೇ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

3–ಅಂಕಿಗಳ ಅಥವಾ 4–ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವಿರಿ? $n = \overline{abc}$, ಒಂದು 3–ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆಗ

$$n = 100\,a + 10\,b + c$$
$$= 99\,a + 11\,b + (a - b + c).$$

ಹೀಗೆ $(a - b + c)$, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ n, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. $m = \overline{pqrs}$ ಒಂದು 4–ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆಗ

$$n = 1000p + 100q + 10r + s$$
$$= 1001p + 99q + 11r - (p - q + r - s)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(p - q + r - s)$ 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ n, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಎಷ್ಟೇ ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಾದರೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಹೇಳಿಕೆ 5.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ n ನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ಅಂಕಿಗಳ ನಡುವೆ ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ – ಮತ್ತು + ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಮೊತ್ತವು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಸ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಮ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11: 23456 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದೆ?

ಪರಿಹಾರ: $2 - 3 + 4 - 5 + 6 = 4$, ಇದು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಪರೀಕ್ಷೆಯು 23456, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಗಣನೀಯ ಅಂಶವೆಂದರೆ $23456 = (11 \times 2123) + 4$.

ಪಾಲಿನ್‌ಡ್ರೋಮ್ ಎಂಬುದು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹೀಗೆ ಪಾಲಿನ್‌ಡ್ರೋಮ್ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದು, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 232 ಒಂದು 3–ಅಂಕಿಯ, 5445 ಎಂಬುದು ಒಂದು 4–ಅಂಕಿಯ ಪಾಲಿನ್‌ಡ್ರೋಮ್.

ಉದಾಹರಣೆ 12: 11ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ 3–ಅಂಕಿಗಳ ಪಾಲಿನ್‌ಡ್ರೋಮ್‌ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: 3–ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಪಾಲಿನ್‌ಡ್ರೋಮ್ $\overline{aba}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರಬೇಕು $a \neq 0$ ಮತ್ತು b ಅಂಕಿಗಳು. $2a - b$, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಮಾತ್ರ $\overline{aba}$ ಯು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು $2a - b = 0$ ಅಥವಾ $2a - b = 11$ ಅಥವಾ $2a - b = -11$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. $a \geq 1$ ಮತ್ತು $b \leq 9$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $2a - b \geq 2 - 9 = -7 > -11$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $2a - b = -11$ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. $2a - b = 0$ ಆದಾಗ, $2a = b$; ಹೀಗೆ $a = 1, b = 2$; $a = 2, b = 4$; $a = 3, b = 6$; ಮತ್ತು $a = 4, b = 8$ ಈ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

ಇದರಿಂದ 121, 242, 363, 484 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $a = 6, b = 1$ ಆದರೆ $2a - b = 12 - 1 = 11$, ಆದುದರಿಂದ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ

$a = 7$, $b = 3$; $a = 8$, $b = 5$; ಮತ್ತು $a = 9$, $b = 7$ ಆದರೆ $2a - b$, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಕಲ್ಪಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಇನ್ನೂ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ: 616, 737, 858 ಮತ್ತು 979. ಹೀಗೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ, 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979.

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದೇ 12456, 36 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು $36 = 4 \times 9$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ಮತ್ತು 9 ರಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ (4 ಮತ್ತು 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ದಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರಾಯಿತು. ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ: 56. ಇದು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ 12456, 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 18 ಮತ್ತು ಇದು 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ 12456, 9 ರಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಇವೆರಡರಿಂದ ನಾವು ಅಗತ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದೆಯೇ, ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 3, 4, 5, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   803, 875, 474, 583, 1067, 350, 657, 684, 2187, 4334, 1905, 2548
2. 1001 ರಿಂದ 2000ದವರೆಗೆ 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?
3. 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಒಂದು 3–ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ $\overline{abc}$ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$, 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
4. $\overline{4a3b}$ ಯು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ, $a + b$ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 4–ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಪಾಲಿನ್‌ಡ್ರೋಮ್ ಯಾವಾಗಲೂ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಮಾಯಾ ಚೌಕಗಳು

1 ರಿಂದ 9 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 3 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಆಯೋಜಿಸಿ, ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡ ಸಾಲು, ಪ್ರತಿ ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಕರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮಾಡಬಲ್ಲಿರಾ? ಮುಂದೆ ನೀಡಿರುವ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿ. (ಚಿತ್ರ 1)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ಚಿತ್ರ. 1

6	1	8
7	5	3
2	9	4

ಚಿತ್ರ. 2

ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 15, ಪ್ರತಿ ಕಂಬ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 15 ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಕರ್ಣದ ಮೊತ್ತವೂ 15 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆಯೂ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಎರಡೂ ಮಾಯಾ ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪತೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಾ? ಎರಡೂ ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (1, 5, 9) ಆಗಿವೆ. ಚಿತ್ರ 1 ರಲ್ಲಿನ ಎಡಬದಿಯ ಕಂಬಸಾಲು (8, 3, 4) ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಬಲ ಬದಿಯ ಕಂಬಸಾಲಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ, ಮೊದಲನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಬಲಬದಿಯ ಕಂಬಸಾಲು (6, 7, 2) ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಎರಡನೇ ಚೌಕವನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಬದಿಯ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ. ಮೊತ್ತ 15ನ್ನು **ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ರೀತಿಯ ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆಯೆ? ಮೊದಲನೆ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಮಧ್ಯದ ಕೋಶ(ಸೆಲ್)ದಲ್ಲಿ 1ನ್ನು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ.

	1	

ಈಗ ನಾವು ಮುಂದಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಿಯಮ 1. ಕರ್ಣದ ಎಡ ಭಾಗದಿಂದ ಬಲಭಾಗದವರೆಗೆ, ಒಂದು ಖಾಲಿ ಕೋಶವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ತುಂಬಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ನೇರದಲ್ಲಿ 4 ರ ನಂತರ ಒಂದು ಖಾಲಿ ಕೋಶ ಇದೆ. ಅದನ್ನು 5 ರಿಂದ ತುಂಬಿ.

4		

→

	5	
4		

ನಿಯಮ 2. ಕರ್ಣದಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಕೋಶವಿಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಮುಂದಿನ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಕೆಳಭಾಗದ ಕೋಶವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ತುಂಬಿರಿ. ನಿಯಮ 1 ನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ. (ಇಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ನೇರದಲ್ಲಿ 1 ರ ನಂತರ ಯಾವುದೇ ಖಾಲಿ ಕೋಶವಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಕಂಬ ಸಾಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, 2 ನ್ನು ತುಂಬುತ್ತೇವೆ.)

	1	

→

	1	
		2

ನಿಯಮ 3. ಕರ್ಣದ ನೇರದಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಕೋಶವಿಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ಯಾವುದೇ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಿಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ನೀವಿರುವ ಕೋಶದಿಂದ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೇಲಿನ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, ಅಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಎಡಭಾಗದ ಕೋಶವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ತುಂಬಿ, ನಿಯಮ 1 ನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ. (ಇಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ನೇರದಲ್ಲಿ 1 ರ ನಂತರ ಮುಂದುವರಿಯಲು ಯಾವುದೇ ಕೋಶವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ, ಮುಂದಿನ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಅದನ್ನು 2ರಿಂದ ತುಂಬುತ್ತೇವೆ).

	1	
		2

→

	1	
3		
		2

ನಿಯಮ 4. ಯಾವುದೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ತುಂಬಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಕೋಶವು ಎದುರಾದಲ್ಲಿ, ನೀವಿರುವ ಕೋಶದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಮತ್ತು ನಿಯಮ 1 ನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಮುಂದುವರೆಯಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ 3 ರ ನಂತರ ಕರ್ಣದ ನೇರದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಅಲ್ಲಿ 1 ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ 3 ರ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಅಲ್ಲಿ 4ನ್ನು ತುಂಬುತ್ತೇವೆ.)

	1	
3		

→

	1	6
3	5	
4		

ನಿಯಮ 5. ನೀವು ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಕರ್ಣದಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಕೋಶದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ತುಂಬಿರಿ ಮತ್ತು ಸೂಕ್ತ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 6 ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಅದನ್ನು 7 ರಿಂದ ತುಂಬುತ್ತೇವೆ.)

	1	6
3	5	
4		

→

	1	6
3	5	7
4		

ಇದು 3 × 3 ಮಾಯಾ ಚೌಕಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮಧ್ಯದ ಕೋಶದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ಅದನ್ನು 1 ರಿಂದ ತುಂಬಿರಿ. ಈಗ ಕರ್ಣದ ನೇರದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರುವುದರಿಂದ ನಿಯಮ 2 ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ. ಈಗ ಮುಂದಿನ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಕೆಳಭಾಗದ ಕೋಶವನ್ನು ಅಂದರೆ 3 ನೇ ಕೋಶವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ತುಂಬಿರಿ. ಪುನಃ ಕರ್ಣದ ನೇರದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಅಲ್ಲದೆ ಯಾವುದೇ ಕಂಬಸಾಲುಗಳೂ ಇಲ್ಲ. ಈಗ ನಿಯಮ 3 ನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಚಲಿಸಿ ಅತ್ಯಂತ ಎಡಭಾಗದ ಕೋಶವನ್ನು 3ರಿಂದ ತುಂಬಿರಿ. ಈಗ ನೀವು ಕರ್ಣದ ನೇರದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರೆಯಲಾರಿರಿ ಏಕೆಂದರೆ ಅಲ್ಲಿನ ಕೋಶವು ಈಗಾಗಲೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿಯಮ 4 ನ್ನು ಬಳಸಿ, ನಾವಿರುವ ಕೋಶದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು 4 ರಿಂದ ತುಂಬಿ, ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿ 5 ಮತ್ತು 6 ರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ತುಂಬುತ್ತೇವೆ. ಪುನಃ ನಾವು ಮುಂದುವರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ನಾವೀಗ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಿಯಮ 5 ನ್ನು ಬಳಸಿ ಕರ್ಣದ ಕೊನೆಯ ಕೋಶದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶವನ್ನು 7 ರಿಂದ ತುಂಬುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನಿಯಮ 3 ನ್ನು ಪಾಲಿಸಿ, ಈ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೇಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಎಡಕೋಶವನ್ನು 8 ರಿಂದ ತುಂಬುತ್ತೇವೆ. ನಿಯಮ 2 ನ್ನು ಬಳಸಿ, ಮುಂದಿನ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶವನ್ನು 9 ರಿಂದ ತುಂಬುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ಪಡೆದಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಸರಣೀಕೃತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದೆ.

	1	

→ ನಿಯಮ 2→

	1	
		2

→ ನಿಯಮ 3→

	1	
3		
		2

→ ನಿಯಮ 4→

	1	
3		
4		2

→ ನಿಯಮ 1→

	1	
3	5	
4		2

→ ನಿಯಮ 1→

	1	6
3	5	
4		2

→ ನಿಯಮ 5→

	1	6
3	5	7
4		2

→ ನಿಯಮ 3→

8	1	6
3	5	7
4		2

→ ನಿಯಮ 2→

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ಚಟುವಟಿಕೆ 6 :

ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮಧ್ಯದ ಕೋಶವನ್ನು ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನವಾಗಿ ಬಳಸಿ, 1ರಿಂದ ೯ರ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ೩ × ೩ ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದು ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿನ ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೋಲುತ್ತದೆ? ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮಾಯಾ ಚೌಕದ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯದ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವಿದೆ?

೩ ರಿಂದ 11 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಇಲ್ಲಿಯೂ ಹಿಂದೆ ಬಳಸಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೇ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ, ಆದರೆ 1 ರ ಬದಲಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸುತ್ತೇವೆ.

	3	

→ ನಿಯಮ 2→

	3	
		4

→ ನಿಯಮ 3→

	3	
5		
		4

→ ನಿಯಮ 4→

	3	
5		
6		4

→ ನಿಯಮ 1→

	3	
5	7	
6		4

→ ನಿಯಮ 1→

	3	8
5	7	
6		4

→ ನಿಯಮ 5→

	3	8
5	7	9
6		4

→ ನಿಯಮ 3→

10	3	8
5	7	9
6		4

→ ನಿಯಮ 2→

10	3	8
5	7	9
6	11	4

ಇಲ್ಲಿ ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ 21.

ಚಟುವಟಿಕೆ 7 :

ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, 1 ರಿಂದ 25ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ 5 × 5 ರ ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮಾಯಾ ಚೌಕದ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯದ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವಿದೆ?

ಐದೂ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ $m > 1$, ಆಗಿರುವಂತೆ 1 ರಿಂದ m^2 ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ $m \times m$ ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1. 5 ರಿಂದ 13 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು 3 × 3 ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದರಲ್ಲಿನ ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ ಏನು? ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮಾಯಾ ಚೌಕದ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವಿದೆ?
2. 9 ರಿಂದ 17 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, 3 × 3 ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದರಲ್ಲಿನ ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ ಏನು? ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮಾಯಾ ಚೌಕದ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವಿದೆ?
3. ಚೌಕದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯದ ಕೋಶದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, 1 ರಿಂದ 9 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು 3 × 3 ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

4. 1 ರಿಂದ 17 ರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು 3 × 3 ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

5. 1 ರಿಂದ 50 ರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು 5 × 5 ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 . . .

ಹೀಗೆ ಅನಂತ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73).

ಇವುಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು. ಅಂದರೆ: ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2. ಈ ರೀತಿಯ ಜೋಡಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಅವಳಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅವಳಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತವಾಗಿವೆಯೇ? ಇದು ಈವರೆಗೂ ಪರಿಹರಿಸಲಾಗದ ಸಮಸ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಡಿಸಲಾಗದ ಸಮಸ್ಯೆಯೆಂದರೆ ಗೋಲ್ಡ್‌ಬಾಕ್‌ನ ಊಹೆ(Goldbach's conjecture). ಇದು 1742 ನೇ ಇಸವಿಯಿಂದ ಪ್ರಚಲಿತದಲ್ಲಿದೆ. 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7, 14 = 3 + 11, 16 = 5 + 11 ಇತ್ಯಾದಿ. ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಗೋಲ್ಡ್‌ಬಾಕ್‌ನು 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಪ್ರತಿ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆಂದು ಊಹಿಸಿದನು. ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ವಿಷದವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಈ ಊಹೆಯು ನಿಜವೆಂಬ ದೃಢವಾದ ನಂಬಿಕೆಯಿದೆ. ಆದರೆ ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಯಾವುದೇ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಯೂ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಲಭ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ.

ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, nನ್ನು **ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಅಂದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತ). ಮೊದಲ ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ 6. ಇದು ಮೂರು ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ, 1, 2, 3; ಮತ್ತು 1 + 2 + 3 = 6. ಅದೇ ರೀತಿ, 28, 1, 2, 4, 7, 14 ಈ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಮತ್ತು 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28. ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ 496 ಮತ್ತು 8128. ಈ ಎಲ್ಲವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದವನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು, p ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, 2^p-1 ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾದಾಗಲೆಲ್ಲಾ, $2^{p-1}(2^p-1)$, ಒಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದನು. 2^p-1 ರೂಪದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮರ್‌ಸೆನ್ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. (7ನೇ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಮರಿನ್ ಮರ್‌ಸೆನ್ ಎಂಬುವವರ ಹೆಸರಿನಿಂದ). n ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ $2^n - 1$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ p ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ 2^p-1 ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಲ್ಲ. ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಲವು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. $2^{p-1}(2^p-1)$ ರೂಪದ, p ಯು 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಬಿಡಿಸಲಾಗದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿವೆ.

1. ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತವಾಗಿರುವುವೆ? (ಅದಕ್ಕೆ ಸರಿಸಮನಾಗಿ, ಅನಂತ ಮರ್‌ಸೆನ್ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆಯೆ?)

2. ಇದುವರೆಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹುಟ್ಟುಹಾಕುತ್ತದೆ: ಬೆಸ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆಯೆ?

✦✦✦✦✦

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

ಭಾಜ್ಯತೆ: 'q' ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವಂತೆ $a = qb$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ 'a' ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'b' ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ: $a, b \neq 0$, ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ, $a = qb$ ಆದರೆ, a ಯನ್ನು b ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು q ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಶೇಷ : $a = bq + r, 0 \leq r < b$ ಆದರೆ, a ನ್ನು b ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷವು 'r' ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪಾಲಿನ್‌ಡ್ರೋಮ್: ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸಮಸ್ಯೆ: ಮೆದುಳಿಗೆ ಕಸರತ್ತನ್ನು ನೀಡುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಚಟುವಟಿಕೆ.

ಆಲ್ಫಾ ಸಂಖ್ಯಾ ಸೂಚಿ: ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಕ್ಷರ.

ಊಹೆ: ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿರದ, ಸತ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ.

ಮಾಯಾ ಚೌಕ: ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತ, ಕಂಬ ಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಕರ್ಣದ ಮೊತ್ತ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವ ಚೌಕಾಕಾರದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ: ಇದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳು, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತವೆ & ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಅವಳಿ–ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು: ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2 ಇರುವ ಜೊತೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಮರ್‌ಸೆನ್ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು: 2^p-1 ರೂಪದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.(2^p-1 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾದರೆ, ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ p ಕೂಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ).

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧಾರ 10ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.
- a ಮತ್ತು $b > 0$ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ, $a = bq + r$, ಮತ್ತು $0 \leq r < b$ ಆಗುವಂತೆ q ಮತ್ತು r ಎರಡು ಅನನ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. $a = qb$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ 'a' ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'b' ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
- ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತವು 3 ಅಥವಾ 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ಅಥವಾ 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.
- 0 ಅಥವಾ 5 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ.
- ಬೆಸ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳು ಮತ್ತು ಸರಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

✦✦✦✦✦

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. **(i)** $(3 \times 10) + (9 \times 1)$ **(ii)** $(5 \times 10) + (2 \times 1)$ **(iii)** $(1 \times 100) + (6 \times 1)$ **(iv)** $(3 \times 100) + (5 \times 10) + (9 \times 1)$ **(v)** $(6 \times 100) + (2 \times 10) + (8 \times 1)$
   (vi) $(3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + (8 \times 1)$
   (vii) $(9 \times 1000) + (5 \times 100) + (2 \times 1)$
   (viii) (7×1000)
2. **(i)** 56 **(ii)** 758 **(iii)** 6058 **(iv)** 7006 **(v)** 1010

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. **(i)** B = 4 **(ii)** A = 5, B = 4 **(iii)** A = 5 **(iv)** A=0
   (v) ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು: A = 0, B = 0 ಮತ್ತು A = 1, B = 2
   (vi) A= 6, B= 1.
2. A = 3, B = 4, C = 5.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. s ನ್ನು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $s \to (q, r)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ q ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಮತ್ತು r ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

   8→(0, 8); 31→ (2, 5); 44→ (3, 5); 85→ (6, 7); 1220→ (93, 11)

2. s ನ್ನು 304 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $s \to (q, r)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ q ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಮತ್ತು r ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

   128 → (0, 128); 636 → (2, 28), 785 → (2, 177); 1038 → (3, 126); 2236 → (7, 108); 8858 → (29, 42)

3. 107 4. 62

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

2. 250 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

4. 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : 4939, 4037, 4136, 4235, 4334, 4433, 4532, 4631, 4730. ಆದ್ದರಿಂದ, a + b = 18 [ಸಂಖ್ಯೆ 4939 ಆದಾಗ] ಅಥವಾ a + b = 7

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1.

12	5	10
7	9	11
8	13	6

ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ 27 ಆಗಿದೆ.
ಕೇಂದ್ರಸಂಖ್ಯೆ 9 ಆಗಿದೆ.
$\Rightarrow 27 = 3 \times 9$

2.

16	9	14
11	13	15
12	17	10

ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತ 39 ಆಗಿದೆ.
ಕೇಂದ್ರಸಂಖ್ಯೆ 13 ಆಗಿದೆ.
$\Rightarrow 39 = 3 \times 13$

3.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

ಇದು ಕೇವಲ ಒಂದು ಮಾಯಾ ಚೌಕ. 1ರ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಿಸಿ ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಮಾಯಾ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

4.

15	1	11
5	9	13
7	17	3

5.

34	48	2	16	30
46	10	14	28	32
8	12	26	40	44
20	24	38	42	6
22	36	50	4	18

ಘಟಕ – 2
ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ನೀವು ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ :

- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅರ್ಥ ಮತ್ತು ವಿಧಗಳು.
- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ.
- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ: ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಂದ, ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿವನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಂದ, ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿವನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಂದ $(x + a)(x + b), (a + b)^2$, ಮತ್ತು $(a + b)(a - b)$ ಇತ್ಯಾದಿ ಅಂಶಗಳು.

ಪೀಠಿಕೆ

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪುನರಾವಲೋಕಿಸೋಣ.

ಸ್ಥಿರಾಂಕ : ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಕೇತವನ್ನು **ಸ್ಥಿರಾಂಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $5, -7, 2\frac{3}{5}, \sqrt{5}, 2 + \sqrt{3}\ \pi$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಚರಾಕ್ಷರ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರದ ಸಂಕೇತವಾಗಿದ್ದು, ನಮ್ಮ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ ಚರಾಕ್ಷರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆ: p, q, x, y, z ಇತ್ಯಾದಿ.

ಚರಾಕ್ಷರ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಸಹ ಒಂದು **ಚರಾಕ್ಷರ**ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : $3x, (4 + p), \frac{6}{x}, \frac{x}{7}\ x - 4, 9x$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಸಂಯೋಗವು (ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು) ಒಂದು **ಸ್ಥಿರಾಂಕ** ಅಥವಾ **ಚರಾಕ್ಷರ** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : $xy, \frac{x}{y}, (x - y), (y - x), -x, (x + y), xyz, \frac{xy}{z}, 13 + x - y,$

$14x - y, 10 - xy, 7\frac{x}{y}, 8\frac{x}{y}$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಗಮನಿಸಿ : $(4 + x) + (4 - x) = 8$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ

ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಿರಾಂಕ, ಯಾವುದೇ ಚರಾಕ್ಷರ ಅಥವಾ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಅವುಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು **ಬೀಜಪದ** (ಏಕಪದ) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $9, x, 3x, 4xy, \frac{7x}{15y}, \frac{21}{xy}, \frac{yz}{x}$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಬೀಜೋಕ್ತಿ : ಒಂದು ಅಥವಾ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜ ಪದಗಳು '+' ಅಥವಾ '–' ಮತ್ತು '×' ಅಥವಾ '÷' ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದ ಸಹಯೋಗ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು **ಬೀಜೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $7-y,\ 3x^2-4y,\ 6xy,\ 6+x^2-3x,\ \left(\frac{7x}{9}+4y-6z\right)$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಸೂಚನೆ : ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಬೀಜಪದಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಬೀಜಪದಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾ : $9x^2 4y$ ಅಥವಾ $\frac{4x^2}{7y}$ಗಳು ಏಕಪದಗಳು.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ : ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು **'ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $x^2-4x,\ x-4xy+y^2,\ 6-5y+xy+x^2y,\ 4$

ಗಮನಿಸಿ : $\frac{x}{y}+2$ ಇದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲ, ಇದು ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿ.

ಏಕಪದೋಕ್ತಿ : ಒಂದೇ ಪದವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **'ಏಕಪದೋಕ್ತಿ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $4,\ \frac{5}{11},\ x,\ 6x,\ 8xy,\ 7x^2y,\ xyz,\ \frac{5}{7}x^2yz$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ : ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **'ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $7+x,\ xy-7,\ 5xy-3x,\ 3x^2-6xy,\ yz^2+2z.$

ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ : ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **'ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $4+x+y,\ 6x+15-y^2,\ ax^2+bx+c,\ ax+by+2$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. **ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

$12+z,\ 15,\ -\frac{x}{5},\ -\frac{3}{7},\ \sqrt{x},\ \sqrt{3},\ \frac{2}{3}xy,\ \frac{5}{2}xy,\ 7,\ 7-x,$

$6x+4y,\ -7z,\ \frac{(8yz)}{3x},\ y+4,\ \frac{y}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{(2x)}{(8yz)}$.

2. **ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ, ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿ ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

$7xyz,\ 9-4y,\ 4y^2-xz,\ x-2y+3z,\ 7x+x^2,\ 8xy,\ \frac{8}{5},\ x^2y^2,\ 4+5y-6z.$

ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು

$9x$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇದರಲ್ಲಿ '9' ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಮತ್ತು 'x' ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿದೆ. $9x$ ನಲ್ಲಿ 9 ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಸಹಗುಣಕವೆಂದು ಮತ್ತು 'x' ನ್ನು '9' ರ ಅಕ್ಷರ ಸಹಗುಣಕವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$9xy$ ನಲ್ಲಿ 'x' ಮತ್ತು 'y' ಗಳು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಾಗಿವೆ. '$9x$' ನ್ನು 'y' ನ ಸಹಗುಣಕ ಮತ್ತು $9y$ ನ್ನು 'x' ನ ಸಹಗುಣಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಗುಣಲಬ್ಧ	ಸಹಗುಣಕ	ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕ (ಸ್ಥಿರಾಂಕ)	ಅಕ್ಷರ ಸಹಗುಣಕ (ಚರಾಕ್ಷರ)
$-8xy$	$-8x$, 'y'ನ ಸಹಗುಣಕ	-8	x
	$-8y$, 'x' ನ ಸಹಗುಣಕ	-8	y
	xy '-8'ರ ಸಹಗುಣಕ	–	xy
	-8, xyನ ಸಹಗುಣಕ	-8	–

ಸೂಚನೆ :

1. ಚರಾಕ್ಷರವು ಯಾವುದೇ ಚಿಹ್ನೆ ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ಧನ ಚಿಹ್ನೆ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂದರ್ಥ.
2. ಯಾವುದೇ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೂಚಿಸಿರದ ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
3. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವು ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕ ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
   ಉದಾ : $x=+1x$.
4. ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತವು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಜಾತಿ ಮತ್ತು ವಿಜಾತಿ ಪದಗಳು :

ಒಂದೇ ಬೀಜಪದವನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು **ಸಜಾತಿ ಪದಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $5x, 2x, 7x, -9x, \left(\frac{1}{3}\right) x$ ಇತ್ಯಾದಿ.

$x^2, 2x^2, 6x^2, 9x^2, \frac{1}{7} x^2$ ಇತ್ಯಾದಿ.

$x^3, 3x^3, 7x^3, -9x^3, \frac{1}{9} x^3$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳುಳ್ಳ ಒಂದೇ ಬೀಜಪದ ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತ/ ಒಂದೇ ಘಾತ ಇರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೀಜ ಪದಗಳನ್ನು **ವಿಜಾತಿ ಪದಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : x, x^2, x^3, x^4, x^5 ಇತ್ಯಾದಿ.

x, m, n, p ಇತ್ಯಾದಿ.

$-x, xy, xy^2$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದ ಮೇಲಿನ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ನಿಯಮವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

1. ಎರಡು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

   $(+7) + (+5) = +7 + 5 = +12$

2. ಎರಡು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

   $(-7) + (-5) = -7 - 5 = -12$

3. ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕದ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ, ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

   $(+7) + (-5) = +7 - 5 = +2$

4. ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕದ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದರೆ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

   $(-7) + (5) = -7 + 5 = -2$

5. ಎರಡು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

   $(+7) \times (+5) = +35$

6. ಎರಡು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

   $(-5) \times (-7) = +35$

7. ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರುವುದು.

   $(+7) \times (-5) = -35$

8. ಒಂದು ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗುವುದು.

   $(-7) \times (+5) = -35$

ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

1. ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಬಹುದು, ಕಳೆಯಬಹುದು.
2. ವಿಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಅಥವಾ ಕಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
3. ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡುವಾಗ ಅಥವಾ ಕಳೆಯುವಾಗ ಅವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು ಅಥವಾ ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಉದಾ1 : $5x^2y, -7x^2y$ ಮತ್ತು $9x^2y$ ನ್ನು ಕೂಡಿ

ಪರಿಹಾರ : $(5x^2y) + (-7x^2y) + (9x^2y) = [5 + (-7) + 9]x^2y = (5 - 7 + 9)x^2y = 7x^2y$

[ಇದು ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಕೂಡುವಿಕೆಯಾಗಿದೆ]

ಈ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಂಡು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಸಹ ಕೂಡಬಹುದು,

$$\begin{array}{r} +5x^2y \\ -7x^2y \\ +9x^2y \\ \hline 7x^2y \\ \hline \end{array}$$

ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಉದಾ 2 : ಕೂಡಿ : $7x^2 - 4x + 5$ ಮತ್ತು $9x - 10$

ಇಲ್ಲಿ ಸಜಾತಿ ಮತ್ತು ವಿಜಾತಿ ಪದಗಳಿವೆ. ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೂಡಬಹುದು. ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕೂಡಲು ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{array}{rrr} 7x^2 & -\ 4x & +\ 5 \\ & +\ 9x & -\ 10 \\ \hline 7x^2 & +\ 5x & -\ 5 \end{array}$$

ಉದಾ 3 : ಕೂಡಿ : $8xy + 4yz - 7zx$, $6yz + 11zx - 6y$ ಮತ್ತು $-5xz + 6x - 2yx$

$$\begin{array}{llllll} +8xy & +\ 4yz & -\ 7zx & & \\ & +\ 6yz & +\ 11zx & & -\ 6y \\ -2xy & & -\ 5xz & +\ 6x & \\ \hline +6xy & +\ 10yz & -\ xz & +\ 6x & -\ 6y \\ \hline \end{array}$$

ಕೂಡುವುದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಲು ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದನ್ನು ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಸಹಗುಣಕ ಕೂಡಬೇಕು (ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ: $xy = yx$ ಮತ್ತು $xz = zx$)

ಉದಾ 4 : $x^3 + 5x^2 - 4x + 6$ ರಿಂದ $2x^3 - x^2 + 4x - 6$ನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ.

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +\ 5x^2 & -\ 4x & +\ 6 & \rightarrow \text{ ವ್ಯವಕಲ್ಯ } (\textit{Minuend}) \\ 2x^3 & -\ x^2 & +\ 4x & -\ 6 & \rightarrow \text{ ವ್ಯವಕಲಕ } (\textit{Subtrahend}) \\ (-2) & (+1) & (-4) & (+6) & \\ \hline -x^3 & +\ 6x^2 & -\ 8x & +\ 12 & \\ \hline \end{array}$$

ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದನ್ನು ಬರೆದು ವ್ಯವಕಲಕದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ (ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆ) ಸಂಕಲನ ಮಾಡಬೇಕು.

ವ್ಯವಕಲನದ ಕ್ರಿಯೆ ಅರಿತ ನಂತರ ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ವೇಗವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.

$$(x^3 + 5x^2 - 4x + 6) - (2x^3 - x^2 + 4x - 6)$$

$$= x^3 + 5x^2 - 4x + 6 - 2x^3 + x^2 - 4x + 6$$

$$= (1 - 2)x^3 + (5 + 1)x^2 + (-4 - 4)x + (6 + 6)$$

$$= -x^3 + 6x^2 - 8x + 12$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. **ಸಜಾತಿ ಮತ್ತು ವಿಜಾತಿ ಪದಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ.**

   $4x^2, \frac{1}{3}x, -8x^3, xy, 6x^3, 4y, -74x^3, 8xy, 7xyz, 3x^2$

2. **ಸುಲಭೀಕರಿಸಿ** (i) $7x - 9y + 3 - 3x - 5y + 8$

   (ii) $3x^2 + 5xy - 4y^2 + x^2 - 8xy - 5y^2$

3. **ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :**

   (i) $5a + 3b$, $a - 2b$ ಮತ್ತು $3a + 5b$

   (ii) $x^3 - x^2y + 5xy^2 + y^3$, $-x^3 - 9xy^2 + y^3$ ಮತ್ತು $3x^2y + 9xy^2$

4. **ಕಳೆಯಿರಿ :** (i) $8x^2y$ ನಿಂದ $-2x^2y + 3xy^2$

   (ii) $4a + 6b - 2c$ ಯಿಂದ $a - b - 2c$

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ

ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

(i) $5x \times 6x^2 = (5 \times 6)\ (x \times x^2) = 30x^3$

(ii) $2x \times 6y \times 8z = [(2 \times 6) \times (x \times y)] \times (8z) = (12xy) \times (8z)$

$= (12 \times 8) \times (x \times y \times z) = 96xyz$

ನಾವು ಇದನ್ನು ಒಂದೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು

$2x \times 6y \times 8z = [2 \times 6 \times 8) \times (x \times y \times z)] = 96xyz$

ಗಮನಿಸಿ :

ಗುಣಲಬ್ಧದ ಸಹಗುಣಕ = ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.

ಗುಣಲಬ್ಧದ ಬೈಜಿಕ ಅಪವರ್ತನ = ಎಲ್ಲಾ ಬೈಜಿಕ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.

ಉದಾ 5 : ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $6x$ ಮತ್ತು $-7x^2y$

ಪರಿಹಾರ $(6x) \times (-7x^2y) = [6 \times (-7)] \times (x \times x^2y) = -42x^3y$

ಸೂಚನೆ :

$x \times x^2y = (x \times x^2)y = x^3y$ ನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ

ಒಂದೇ ವಿಧದ (ಚರಾಕ್ಷರ) ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದಾಗ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮ $x^m \times x^n = x^{m+n}$ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸುಲಭೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ 'm' ಮತ್ತು 'n' ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದು :

ಉದಾ 6 : ಗುಣಿಸಿ : $4x \times 5y \times 7z$

ಪರಿಹಾರ : $4x \times 5y \times 7z = (4 \times 5 \times 7)\ (x \times y \times z) = 140\ xyz$

ಉದಾ 7 : $2l^2m \times 3lm^2$ ಗುಣಲಬ್ಧವೇನು?

ಪರಿಹಾರ : $2l^2m \times 3lm^2 = (2 \times 3) \times (l^2 \times l) \times (m \times m^2)$

$= 6l^3m^3$

$x^m \times x^n = x^{m+n}$ ಘಾತಾಂಕ ಗುಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು :

$9 \times 103 = 927$ ಗುಣಲಬ್ಧ ಗಮನಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$9 \times 103 = 9(100 + 3)$

$= (9 \times 100 + 9 \times 3)$

$= 900 + 27$

$= 927$

ಸಂಕಲನದ ಮೇಲೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿತರಣಾ ಗುಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಇದೇ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವಾಗ ಸಹ ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$2x(3x + 5xy) = [(2x) \times (3x) + (2x)(5xy)]$

$= [6x^2 + 10x^2y]$

ಉದಾ 8 : $(8y + 3) \times 4x$ ಗುಣಲಬ್ಧ ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

$(8y + 3) \times (4x) = 4x \times (8y + 3)$

$= (4x \times 8y) + (4x \times 3)$

$= 32xy + 12x$

(ಇಲ್ಲಿ ಎಡವಿತರಣಾ ಗುಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.)

ಬಲವಿತರಣಾ ಗುಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$(8y + 3) \times (4x) = (8y \times 4x) + (3 \times 4x)$

$= 32yx + 12x$

$= 32xy + 12x$ ($xy=yx$ ಇರುವುದರಿಂದ)

ಪ್ರಮುಖ ಅಂಶಗಳು :

ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ, ವಿತರಣಾ ಗುಣ, ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೂಲದಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ. ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಗಳು ಸರಿಹೊಂದುವುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಗುಣಿಸುವುದು

$(4a + 6b)$ ಮತ್ತು $(5a + 7b)$ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$$(4a + 6b)(5a + 7b) = 4a(5a + 7b) + 6b(5a + 7b)$$

$$= [(4a)(5a) + (4a)(7b)] + [(6b)(5a) + (6b)(7b)]$$

$$= 20a^2 + 28ab + 30ab + 42b^2$$

$$= 20a^2 + 42b^2 + 58ab$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. ಎರಡು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿ.

ಮೊದಲನೆಯದು → ಎರಡನೆಯದು ↓	$3x$	$-6y$	$4x^2$	$-8xy$	$9x^2y$	$-11x^3y^2$
$3x$						
$-6y$						
$4x^2$						
$-8xy$						
$9x^2y$						
$-11x^3y^2$						

2. ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $(5x + 8)\ 3$ (ii) $(-3pq)(-15p^3q^2 - q^3)$

(iii) $\frac{6x}{5}(a^3 - b^3)$ (iv) $-x(x - 15)$

3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭೀಕರಿಸಿ:

(i) $(2x^2y - xy)(3xy - 5)$ (ii) $(3x^2y^2 + 1)(4xy - 6xy^2)$

(iii) $(3x^2 + 2x)(2x^2 + 3)$ (iv) $(2m^3 + 3m)(5m - 1)$

ವಿಶೇಷ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು

ನಾವು ಈಗ ವಿಶೇಷ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯೋಣ

$(x + a)$ $(x + b)$ ಈ ಎರಡು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x(x + b) + a(x + b)\\ &= x^2 + xb + ax + ab\\ &= x^2 + ax + bx + ab\\ \mathbf{(x + a)(x + b)} &= \mathbf{x^2 + (a + b)x + ab}\end{aligned}$$

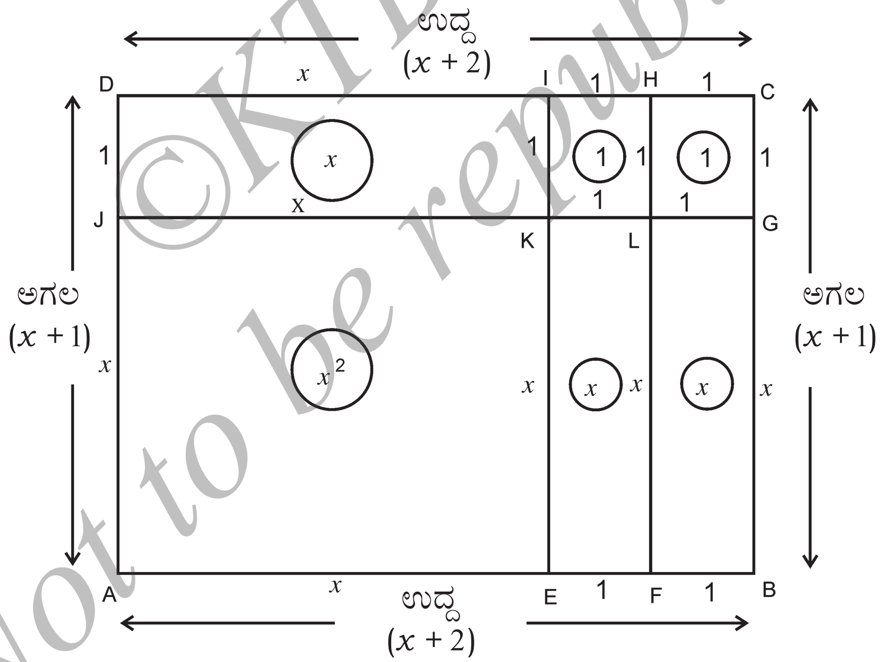
ಇಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ ಮತ್ತು ವಿತರಣಾ ಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

$xb = bx$, $(ax + bx) = (a + b)x$

ಇಲ್ಲಿ $\mathbf{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$ ಯು ಒಂದು ನಿತ್ಯ **ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.**

ಹಾಗೆ $(x + 2)(x + 1) = x^2 + (2 + 1)x + (2 \times 1) = x^2 + 3x + 2$.

$(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಚಿತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ : *ABCD* ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $(x + 2)$ $(x + 1)$ ರ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಯತವನ್ನು ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕ ವರ್ಗಗಳು ಮತ್ತು ಆಯತಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. AEKJ, KLHI ಮತ್ತು LGCH ವರ್ಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಕ್ರಮವಾಗಿ x^2, 1, 1 ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು EFLK, *FBGL*, *JKID* ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ x, x, x ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ *ABCD* ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= x^2 + 1 + 1 + x + x + x = x^2 + 3x + 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$(x + a)(x + b)$ ಬೆಲೆ ಏನು? 'x' ಜಾಗದಲ್ಲಿ 'y'ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ $(x + a)(x+ b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ಮತ್ತೊಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಪಡೆಯಬಹುದೆ ನೋಡಿರಿ?

ಉದಾ 9 : ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $(x + 6)(x + 7)$

ಪರಿಹಾರ : $(x + 6)(x + 7) = x^2 + (6 + 7)x + (6 \times 7)$

$$= x^2 + 13x + 42$$

ಉದಾ 10 : $(x + 8)$ ಮತ್ತು $(x - 4)$ರ ಗುಣಲಬ್ಧವೇನು?

ಪರಿಹಾರ : $(x + 8)(x - 4) = x^2 + (8 - 4)x + [(8) \times (-4)]$

$$= x^2 + 4x - 32$$

$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

ಉದಾ 11 : ಗುಣಿಸಿ : $(2x + 5)(2x + 3)$

$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$ ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$(2x + 5)(2x + 3) = (2x)^2 + 2x(5 + 3) + (5 \times 3)$

$$= 4x^2 + 16x + 15$$

ಉದಾ 12 : ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : 103×98

ಪರಿಹಾರ :

$$\begin{aligned} 103 \times 98 &= (100 + 3)(100 - 2) \\ &= (100)^2 + 100\,[3 + (-2)] + [3 \times (-2)] \\ &= 10000 + 100\,(+1) - 6 \\ &= 10000 + 100 - 6 \\ &= 10{,}094 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ $x = 100,\ a = 3,\ b = -2$ ಗಳನ್ನು

$(x + a)(x + b) = x^2 + x\,(a + b) + ab$ ಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಉದಾ 13 : ಗುಣಿಸಿ : $(p^2 - 5)\ (p^2 - 3)$

$$(p^2 - 5)\ (p^2 - 3) = [(p^2)^2 + ((-5) + (-3)][(p)^2 + (-5) \times (-3)]$$

$$= p^4 - 8p^2 + 15$$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು :

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ಸಮಾನತೆ ಆಗಿದ್ದು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅದು ವಾಸ್ತವವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $(x + 3)\ (x + 2) = x^2 + 5x + 6$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ 'x' ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗವು ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಮ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಶೇಷ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತವೆ.

$$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a(a + b) + b(a + b)$$

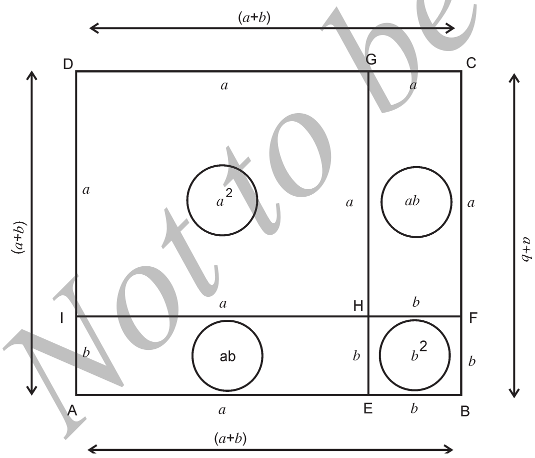
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$$

ಇಲ್ಲಿ $ab = ba$ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

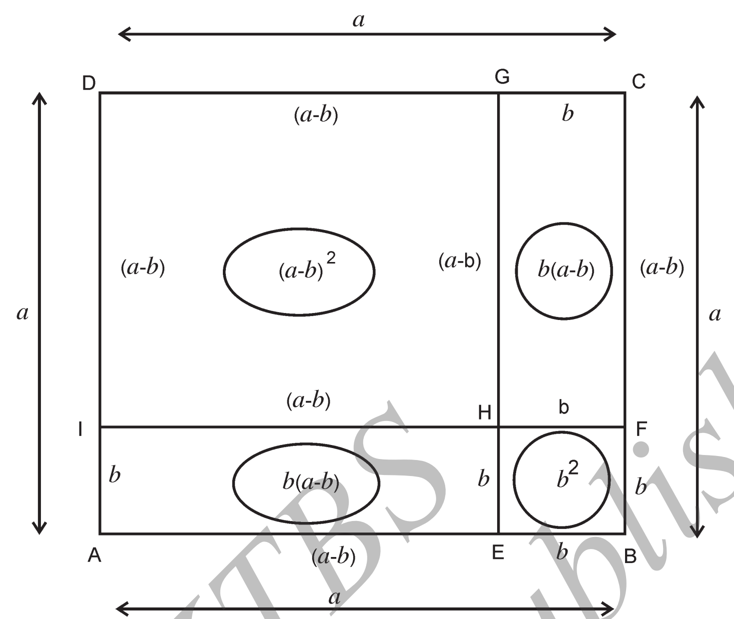


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $ABCD$ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $(a + b)^2$ ಗೆ ಸಮ ಇರುವುದು. ಈ ವರ್ಗವನ್ನು ಎರಡು ಚಿಕ್ಕ ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ಮತ್ತು 2 ಚಿಕ್ಕ ಆಯತಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. $HKGD$ ಮತ್ತು $EBFK$ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ a^2 ಮತ್ತು b^2 ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಆಯತ $KFCG$ ಮತ್ತು $AEKH$ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ab ಮತ್ತು ab ಆಗಿರುತ್ತವೆ. $ABCD$ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$ ಆಗುವುದು.

ಹಾಗಾಗಿ $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಸಹ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 'a' ಆಗಿರುವ $ABCD$ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ a^2. ಈ ವರ್ಗವನ್ನು ಎರಡು ಚಿಕ್ಕ ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ಮತ್ತು 2 ಚಿಕ್ಕ ಆಯತಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ವರ್ಗ $HKGD$ ಮತ್ತು ವರ್ಗ $EBFK$ ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(a - b)^2$ ಮತ್ತು b^2 ಆಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಆಯತ $KFCG$ ಮತ್ತು ಆಯತ $AEKH$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $b(a - b)$ ಮತ್ತು $b(a - b)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ವರ್ಗ $ABCD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ $EBFK$ ದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಆಯತ $KFCG$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಆಯತ $AEKH$ ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಳೆದರೆ ವರ್ಗ $HKGD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬರುತ್ತದೆ.

(ಇಲ್ಲಿ $a > b$ ಆಗಿದೆ).

ಆದ್ದರಿಂದ $(a - b)^2 = a^2 - b^2 - b(a - b) - b(a - b)$

$= a^2 - b^2 - ba + b^2 - ba + b^2$

$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$\mathbf{(a+b)(a-b)} = \mathbf{a^2 - ab + ba - b^2} = \mathbf{a^2 - b^2}$. ಇದೂ ಸಹ ಒಂದು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾ 14 : ಸೂಕ್ತ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ : $(2x + 3y)^2$

ಪರಿಹಾರ : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$ ಇಲ್ಲಿ $a = 2x, b = 3y$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

ಉದಾ 15 : $(4p - 3q)^2$ ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2$ ಇಲ್ಲಿ $a = 4p$ ಮತ್ತು

$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$ $b = 3q$ ಇರಲಿ

ಉದಾ 16 : ಸೂಕ್ತ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $(4.9)^2$ ರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $(4.9)^2 = (5 - 0.1)^2$

$= (5)^2 - 2(5)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25 - 1 + 0.01$

$= 24.01$

$(4.9)^2$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಉದಾ 17 : ಸೂಕ್ತ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 54×46 ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ಉಪಯೋಗಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $a = 50, b=4$

$54 \times 46 = (50 + 4)(50 - 4)$

$= (50)^2 - (4)^2$

$= 2500 - 16$

$= 2484$

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. ಸೂಕ್ತ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) $(a + 3)(a + 5)$ ii) $(3t + 1)(3t + 4)$

   iii) $(a - 8)(a + 2)$ iv) $(a - 6)(a - 2)$

2. ಸೂಕ್ತ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಬಳಸಿ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   i) 53×55 ii) 102×106 iii) 34×36

   iv) 103×96 v) 102×106

3. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಅನುಸರಿಸಿ $(x + a)(x + b)(x + c)$ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

   i) $(a + 6)^2$ ii) $(3x + 2y)^2$ iii) $(2p + 3q)^2$ iv) $(x^2 + 5)^2$

5. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   i) $(34)^2$ ii) $(10.2)^2$ iii) $(53)^2$ iv) $(41)^2$

6. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ:

   (i) $(x - 6)^2$ (ii) $(3x - 5y)^2$ (iii) $(5a - 4b)^2$ (iv) $(p^2 - q^2)^2$

7. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) $(49)^2$ ii) $(9.8)^2$ iii) $(59)^2$ iv) $(198)^2$

8. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   i) $(x + 6)(x - 6)$ ii) $(3x + 5)(3x - 5)$

   iii) $(2a + 4b)(2a - 4b)$ iv) $\left(\frac{2x}{3} + 1\right)\left(\frac{2x}{3} - 1\right)$

9. ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) 55×45 ii) 33×27 iii) 8.5×9.5 iv) 102×98

10. ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$ ii) $(2a+3)(2a-3)(4a^2+9)$

iii) $(p+2)(p-2)(p^2+4)$ iv) $\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{9}\right)$

v) $(2x-y)(2x+4y)(4x^2+y^2)$ vi) $(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+9y^2)$

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ : ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಹ ಸಂಕೇತ.

ಚರಾಕ್ಷರ : ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಹ ಒಂದು ಸಂಕೇತ.

ಬೀಜೋಕ್ತಿ : ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಮತ್ತು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಸಂಯೋಗ.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ : ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬೀಜೋಕ್ತಿ.

ಸಹಗುಣಕ : ಚರಾಕ್ಷರದ ಸಹ ಅಪವರ್ತನ.

ಏಕಪದೋಕ್ತಿ : ಒಂದೇ ಪದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ.

ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ : ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ.

ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ : ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ.

ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ : ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಚರಾಕ್ಷರದ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತ (ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿ ಪದಕ್ಕೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು. ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಮೊತ್ತವು ಆ ಬಹುಪದದ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು)

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು : ಚರಾಕ್ಷರದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಾಗಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳು.

ಬೀಜಾಕ್ಷರ ಪದ : ಯಾವುದೇ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಬೀಜಾಕ್ಷರ ಪದ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

* ಚರಾಕ್ಷರ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ್ದು ಗಣಿತದ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲಭೂತ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ, ಕೂಡುವುದು, ಕಳೆಯುವುದು, ಗುಣಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಭಾಗಿಸುವುದನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಪದಗಳಿಗೆ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
* ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡುವಾಗ ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೂಡುತ್ತೇವೆ.
* ಎರಡು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವಾಗ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದೊಂದು ಪದ ಗುಣಿಸಿ ಸುಲಭೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.
* ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಘಾತಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
* ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ಸಮಾನತೆಯಾಗಿದ್ದು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅದು ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. **ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳು:** $15, \frac{-3}{7}, \sqrt{3}, 7$; **ಚರಾಕ್ಷರಗಳು:** $12+z, \frac{-x}{5}, \sqrt{x}, \frac{2}{3}xy, \frac{5xy}{2}, 7-x$
$6x+4y, -7z, \frac{8yz}{4x}, y+4, \frac{y}{4}, \frac{2x}{8yz}$

2. **ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳು:** $7xyz, 8xy\ \frac{8}{5}x^2y^2$; **ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳು:** $9-4y, 4y^2-xz, 7x+z^2$; **ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳು** : $x-2y+3z, 4+5y-6z$.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. $\{4x^2, 3x^2\}, \{xy, 8xy\}, \{-8x^3, 6x^3, -74x^3\}, \left\{\frac{1}{3}x\right\}, \{7xyz\}$.
2. (*i*) $4x-14y+11$; (ii) $4x^2-3xy-9y^2$
3. (*i*) $9a+6b$; (ii) $2x^2y+5xy^2+2y^3$
4. (*i*) $10x^2y-3xy^2$; (ii) $3a+7b$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1.

ಮೊದಲನೆಯದು→	$3x$	$-6y$	$4x^2$	$-8xy$	$9x^2y$	$-11x^3y^2$
ಎರಡನೆಯದು↓						
$3x$	$9x^2$	$-18xy$	$12x^3$	$-24x^2y$	$27x^3y$	$-33x^4y^2$
$-6y$	$-18xy$	$36y^2$	$-24x^2y$	$48xy^2$	$-54x^2y^2$	$66x^3y^3$
$4x^2$	$12x^3$	$-24x^2y$	$16x^4$	$-32x^3y$	$36x^4y$	$-44x^5y^2$
$-8xy$	$-24x^2y$	$48xy^2$	$-32x^3y$	$64x^2y^2$	$-72x^3y^2$	$88x^4y^3$
$9x^2y$	$27x^3y$	$-54x^2y^2$	$36x^4y$	$-72x^3y^2$	$8x^4y^2$	$-99x^5y^3$
$-11x^3y^2$	$-33x^4y^2$	$66x^3y^3$	$-44x^5y^2$	$88x^4y^3$	$-99x^5y^3$	$121x^6y^4$

2. i) $15x^2 + 24x$ ii) $45p^4q^3 + 3pq^4$

iii) $\frac{6}{5}a^3x - \frac{6}{5}b^3x$ (iv) $-x^3 + 15x.$

3. i) $6x^3y^2 - 10x^2y - 3x^2y^2 + 5xy;$ ii) $12x^3y^3 - 18x^3y^4 + 4xy - 6xy^2$

iii) $6x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 6x;$ iv) $10m^3 + 2m^2 - 3m$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. i) $a^2 + 8a + 15$ ii) $9t^2 + 15t + 4$

iii) $a^2 - 6a - 16$ iv) $a^2 - 8a + 12.$

2. i) 2915 ii) 10812 iii) 1224 iv) 9888.

3. $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc.$

4. i) $a^2 + 12a + 36$ ii) $9x^2 + 12xy + 4y^2;$

iii) $4p^2 + 12pq + 9q^2$ iv) $x^4 + 10x^2 + 25;$

5. i) 1156 ii) 104.04 iii) 2809 iv) 1681.

6. i) $x^2 - 12x + 36$ ii) $9x^2 - 30xy + 25y^2$
   iii) $25a^2 - 40ab + 16b^2$ iv) $p^4 - 2p^2q^2 + q^4$

7. i) 2401 ii) 96.04 iii) 3481 iv) 39204.

8. i) $x^2 - 36$ ii) $9x^2 - 25$ iii) $4a^2 - 6\ b^2$ iv) $\left(\frac{4x^2}{9} - 1\right)$.

9. i) 2475 ii) 851 iii) 80.75 iv) 9996.

10. i) $x^4 - 81$ ii) $16a^4 - 81$ iii) $p^4 - 16$
    iv) $\left(\frac{1}{16}m^4 - \frac{1}{81}\right)$ v) $16x^4 - y^4$ vi) $16x^4 - 81y^4$.

✦ ✦ ✦

ಘಟಕ – 3
ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು, ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ನೀವು ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ :

* ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು, ಅಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅರ್ಥ.
* ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡದ ರೇಖೆ, ಬಿಂದು, ಸಮತಲ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ (space) ಗಳ ಬಗ್ಗೆ.
* ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ.
* ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 5ನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಬಗ್ಗೆ.

ಪೀಠಿಕೆ :

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಹಲವಾರು ಅಂಶಗಳಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು, ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ ಹಾಗೂ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ವಿಧಗಳು, ತ್ರಿಭುಜದ ಅಸಮತೆ (ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು 3 ನೇ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ), ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು, ಎತ್ತರಗಳು, ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅರಿತಿರುವಿರಿ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸುಮಾರು 2000 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವಜರು ನಿರೂಪಿಸಿರುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವೆನಿಸಬಹುದು.

ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಬಹಳ ಪುರಾತನವಾಗಿದ್ದು, ಅದರ ಬೆಳವಣಿಗೆಯು ಈಜಿಪ್ಟ್ ನಾಗರಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದಿರುತ್ತದೆ. **'ಜ್ಯಾಮಿಟ್ರಿ'** ಎಂಬ ಪದವು ಗ್ರೀಕ್‌ನ **"ಜಿಯೋ"** ಎಂದರೆ **'ಭೂಮಿ'** ಮತ್ತು **"ಮೆಟ್ರಾನ್"** ಎಂದರೆ 'ಅಳತೆ' ಎಂಬ ಎರಡು ಪದಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಆಗಿದೆ. ನೈಲ್ ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದಿಂದ ಅಲ್ಲಿಯ ವ್ಯವಸಾಯಕ್ಕೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಭೂಮಿಯ ಮುಳುಗಡೆಯಿಂದ, ಅದರ ಸೀಮಾರೇಖೆಗಳು ಅಳಿಸಿ ಹೋದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಪುನಃ ಸೀಮಾರೇಖೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಈಜಿಪ್ಷಿಯನ್ನರು ರೇಖಾಗಣಿತದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದರು, ಹಾಗೂ ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳುಳ್ಳ ಘನಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗ್ಗೆ ಜಗತ್ತಿಗೆ ಪರಿಚಯಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಆಹಾರ ಸಂಗ್ರಹಣಾಗಾರಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಜಗತ್ತಿನ ಏಳು ಅದ್ಭುತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ **'ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ'** ರಚನೆಯು ಮಾನವನ ಸಾಧನೆಗೆ ಹಿಡಿದ ಕನ್ನಡಿಯಾಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ರಚನೆಯು ಈಜಿಪ್ಷಿಯನ್ನರು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿದ ಅಗಾಧ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಭೂಮಿಯನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಗತ್ಯತೆಯಿಂದಾಗಿ ಪುರಾತನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಯಿತು. ಆದಾಗ್ಯೂ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿಸುವ ಕಾರ್ಯ ಸುಮಾರು 2500 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. ಗ್ರೀಕರು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅಗತ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡವರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯವರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಬಿಂದು, ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸಮತಲಗಳ ಅರ್ಥದ ಬಗ್ಗೆ ಗಮನ ಕೊಡದೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಯಿತು, ಆದರೆ, ಗ್ರೀಕ್ ತತ್ವಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಮತ್ತು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು **ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ**ಯಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಹೆಚ್ಚು ಆಸಕ್ತರಾಗಿದ್ದರು. ಬಹುಶಃ ಥೇಲ್ಸ್‌ನು (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 640 – ಕ್ರಿ.ಪೂ. 546) ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ **"ಸಾಧನೆ"** ಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದವನಾಗಿರುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವ ಅಗತ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡನು. ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಅಪೊಲೋನಿಯಸ್, ಪ್ಲೇಟೊ, ಪೈಥಾಗೋರಸ್, ಡಯಾಫಾಂಟಸ್, ಟಾಲೇಮಿ ಇವರೆಲ್ಲರೂ ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ಗಣಿತದ ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಅಪ್ರತಿಮ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿ **'ಗಣಿತ ಒಂದು ತರ್ಕಬದ್ಧ ವಿಜ್ಞಾನವಾಗಲು'** ಭದ್ರ ಬುನಾದಿಯನ್ನು ಹಾಕಿಕೊಟ್ಟರು.

ಆದರೆ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ತನ್ನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳೊಂದಿಗೆ 13 ಸಂಪುಟಗಳ "ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ " ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ಮೊದಲಬಾರಿಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದನು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ (ಸುಮಾರು ಕಿ.ಪೂ. 300) : ಗ್ರೀಕ್‌ನ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರನ್ನು **'ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪಿತಾಮಹ'** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇವರು ಗ್ರೀಕ್‌ನ ಇನ್ನೋರ್ವ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞ ಟಾಲೇಮಿ (ಕಿ.ಪೂ 323– ಕಿ.ಪೂ 283.) ರವರ ಸಮಕಾಲೀನರು.ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರ ಕೃತಿ **"Elements"** (ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್), ಗಣಿತದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ಉನ್ನತ ಸ್ಥಾನ ಪಡೆದಿದ್ದು ನಂತರದ ಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಪ್ರೇರಕವಾಗಿದೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಹಾಗೂ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಕೆಲವು ತತ್ವಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ **ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ ರೇಖಾಗಣಿತ**ದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತದ ಇತರ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಇವರ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಅಪರಿಮಿತ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಸ್ಥಿತ್ವವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರ ಕಾರ್ಯವು ಅತ್ಯಂತ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಜೀವನದ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ದೊರೆತಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅವರ ಜನ್ಮದಿನ ಮತ್ತು ಜನ್ಮಸ್ಥಳದ ಬಗ್ಗೆ ನಿಖರವಾದ ಮಾಹಿತಿ ತಿಳಿದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಇವರನ್ನು ಕುರಿತು ಇತರರು ತಮ್ಮ ಅಧ್ಯಯನಗಳಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿರುವ ವಿಷಯಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಸ್ತುತ ಮೇಲೆ ನೀಡಿರುವ ಭಾವಚಿತ್ರವು ಸಹ ಕಲಾವಿದನ ಕಲ್ಪನೆಯಿಂದ ಮೂಡಿರುವುದಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದಲ್ಲಿ **'ಶುಲ್ವಸೂತ್ರ'ಗಳು** ಪ್ರಮುಖವಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತದ (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 600 – ಕ್ರಿ.ಪೂ. 300) ಬಗ್ಗೆ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದ ಮೊದಲ ದಾಖಲೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇವು ವೇದಗಳ ಕಾಲ ಮತ್ತು ನಂತರದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದ ಗಣಿತ ತತ್ವಗಳ ದಾಖಲೆಗಳಾಗಿವೆ. **ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳು** ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ.

ಭಾರತೀಯ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಧಾರ್ಮಿಕ ಆಚರಣೆಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ದೇವರನ್ನು ಆರಾಧಿಸುವ ಸಂಬಂಧ ರಚಿಸುವ **ಯಜ್ಞ-ಯಾಗಾದಿಗಳ** ಹಾಗೂ **ಗ್ರಹಣಗಳ** ಅಧ್ಯಯನದ ಸಂಬಂಧ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಯಿತು. **ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರ**ಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಾಚೀನವಾದ **ಬೋಧಾಯನ ಸೂತ್ರವು** *"ಆಯತದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ"* ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ತತ್ವವಿದ್ದು ಯಾವುದೇ ಸಾಧನೆ ಇಲ್ಲದಿರುವುದು ದುರದೃಷ್ಟಕರವಾಗಿದೆ.

"**ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರ**"ವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಷ್ಟಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗದ ರಚನೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ರಚನೆಯೊಂದಿಗೆ π ನ ಸಮೀಪ ಬೆಲೆಯು 3.088 ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದ್ದು, ಅದು ಈಗಿನ π ನ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮೀಪವಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನು ಹಲವಾರು ಮಹನೀಯರು ತಮ್ಮದೇ ಆದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿರುತ್ತಾರೆ. ಅವರಲ್ಲಿ ಆರ್ಯಭಟ I, ಭಾಸ್ಕರ I, ವರಾಹಮಿಹಿರ, ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ, ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ, ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ II, ಮಾಧವ ನೀಲಕಂಠ ಸೋಮಯಾಜಿ ಇವರುಗಳು ಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಉತ್ತಮ ಕಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ ಪ್ರಮುಖರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು :

180 ಡಿಗ್ರಿಗಳ ಅಳತೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಸರಳಕೋನ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿಟ್ಟಾಗ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 180 ಡಿಗ್ರಿಗಳು ಎಂದು ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು 180 ಡಿಗ್ರಿಗಳ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಕ್ಕೆ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ಕೋನಮಾಪಕವು ಸರಳಕೋನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೂ, ಸರಳಕೋನವು ಕೋನಮಾಪಕದ ಅಳತೆಯ ಮೇಲೂ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಾ ?

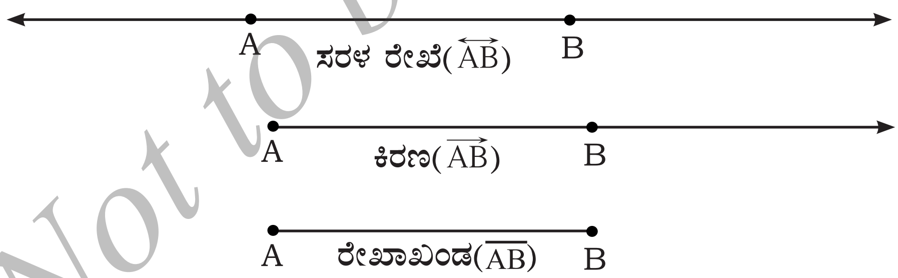
ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಒಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ನಿಗಮನ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲು ಬಹಳ ಕಷ್ಟಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಿದ್ದರು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಅವರು ಮೂಲಭೂತ ಅಂಶಗಳಾದ ಬಿಂದುಗಳು, ರೇಖೆಗಳು, ಸಮತಲಗಳು ಮತ್ತು ಅವಕಾಶ (space) ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಬೇಕಾಯಿತು. ಇದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವಿಷಯವನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ತರ್ಕಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಲ್ಲ. ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತಹ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಶ್ನಿಸದೇ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿದ್ದರು. ಅವರು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ್ದರು.

ಪ್ರಶ್ನಿಸದೇ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವಂತಹ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನದ ಎಲ್ಲಾ ಶಾಖೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ "**ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು**" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಶ್ನಿಸದೇ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವಂತಹ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾಗಣಿತದ "**ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು**" (ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾದ ಯಾವುದೇ ಫಲಿತಾಂಶವು ಈ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿಯ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯೆಂದರೆ ಕೆಲವು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಮಗೆಲ್ಲಾ ಬಿಂದುವಿನ ಬಗ್ಗೆ ಸಹಜವಾದ ಅಭಿಪ್ರಾಯವಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಬಿಂದು ಎಂದರೇನು? ಬಿಂದುವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವಾಗ, ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವುದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು, ರೇಖೆ, ಸಮತಲ, ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಕ್ಕೊಳಪಡದ ಪದಗಳಾಗಿವೆ. ಇವು ಕೇವಲ **ಅಮೂರ್ತ ಕಲ್ಪನೆ**ಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದುವನ್ನು ನೋಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಮೊನಚಾದ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಚುಕ್ಕೆ ಇಟ್ಟರೆ, ಅದು ಸರಿ ಸುಮಾರಾಗಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ನಾವು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೂ ಕಾಣಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಬಿಂದುವು ತನ್ನ ಎರಡು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದಾಗ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಅಂತ್ಯವಿಲ್ಲದ್ದಾಗಿದೆ.

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಕಿರಣ ಎನ್ನುವರು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕಿರಣವು ಒಂದು ಆದಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಒಂದು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಿರುತ್ತದೆ. A ಯು ಕಿರಣದ ಆದಿ ಬಿಂದು ಮತ್ತು B ಯು ಕಿರಣದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ ಕಿರಣವನ್ನು $\overrightarrow{AB}$ ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಸರಳರೇಖೆಯ ಭಾಗಕ್ಕೆ ರೇಖಾಖಂಡ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $\overline{AB}$ ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



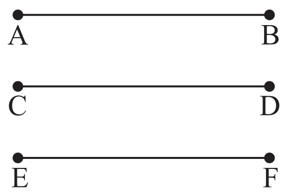
ಇದೇ ರೀತಿ, ಸಮತಲವನ್ನು ಸಹ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ನಮಗೆ ಇರುವ ಸಹಜ ಜ್ಞಾನದಂತೆ **'ಒಂದು ಸಮತಲವು ಯಾವುದೇ ದಪ್ಪವಿಲ್ಲದ ಸಮತಟ್ಟಾದ ಅಪರಿಮಿತ ಮೇಲ್ಮೈ ಆಗಿದೆ'**. ಒಂದು ಕಪ್ಪು ಹಲಗೆಯ ಅಥವಾ ನೀರಿನ ತಟಸ್ಥ ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಸಮತಲದ ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಕೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಅವಕಾಶ(Space)ವನ್ನೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಇವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡದ ಪದಗಳಾಗಿವೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಸೂಕ್ತವಾದ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಬಳಕೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಾವು ಈ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ.

I. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು :

'ಪ್ರಶ್ನಿಸದೇ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವ ಮತ್ತು ಸ್ವತಃ ಸಿದ್ಧವಾದ ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತವಾದ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ **ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು'** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನದ ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು **"ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳೆಂದು"** ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 1 :

"ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ".



$AB = CD$

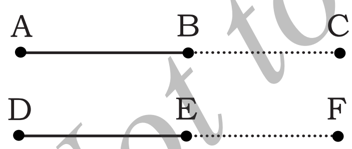
$EF = CD$

$\Rightarrow AB = EF$

ನಿಮ್ಮ ಬಳಿ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು, ಕಿತ್ತಲೆಹಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ಬಾಳೆಹಣ್ಣುಗಳು ಇರುವ A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಬುಟ್ಟಿಗಳು ಇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. A, B ಬುಟ್ಟಿಗಳು ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು B, C ಬುಟ್ಟಿಗಳು ಸಹ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಹಾಗಾದರೆ A ಮತ್ತು C ಬುಟ್ಟಿಗಳು ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದೇ?

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 2 :

"ಸಮನಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ."

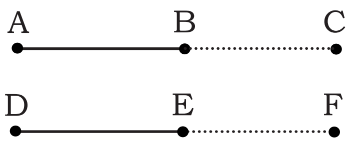


$\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{DE}$ ಗಳು ಸಮನಾದ ಉದ್ದಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಾಗಿವೆ, ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{AB}$ ಗೆ $\overline{BC}$ ಯನ್ನು ಮತ್ತು ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ $\overline{DE}$ ಗೆ $\overline{EF}$ ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $BC=EF$ ಆದಾಗ $AC=DF$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

10 ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳಿರುವ 'A' ಬುಟ್ಟಿ ಮತ್ತು 10 ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳಿರುವ 'B' ಬುಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬುಟ್ಟಿಗೂ 5 ಸೇಬುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಎರಡೂ ಬುಟ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಣ್ಣುಗಳಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? (15ಕ್ಕೆ ಸಮ).

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 3 :

"ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಉಳಿದ ಭಾಗಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ."



AC=DF ಮತ್ತು BC = EF

AC - BC = DF - EF ⇒AB=DE

$\overline{AC}$ ಮತ್ತು $\overline{DF}$ ಗಳು ಸಮನಾದ ಉದ್ದಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಸರಳರೇಖಾಖಂಡಗಳಾಗಿವೆ, ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{AC}$ ಯಿಂದ $\overline{BC}$ ಯನ್ನು ಮತ್ತು ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{DF}$ ನಿಂದ $\overline{EF}$ ನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ BC =EF ಆದಾಗ AB=DE ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

10 ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳಿರುವ ಬುಟ್ಟಿ 'A' ಮತ್ತು 10 ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳಿರುವ ಬುಟ್ಟಿ 'B' ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಿಂದ ಎರಡು ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ A ಮತ್ತು B ಬುಟ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಣ್ಣುಗಳಿರುತ್ತವೆ.(8ಕ್ಕೆ ಸಮ).

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 4 :

"ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ."

ಇದರರ್ಥ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 5 :

"ಪೂರ್ಣವು ಅದರ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದು".

AC ಯು AB ಯ ಒಂದು ಭಾಗವಾದರೆ AB > AC.

ನೀರು ತುಂಬಿದ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣದ ನೀರನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಈಗ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರವು ಮೊದಲಿದ್ದ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರದಷ್ಟೆ ಇರುವುದೇ?

ಮೊದಲ '5' ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳಾಗಿವೆ. ಮೊದಲ '3' ಸಮ ಅಥವಾ ಸಮ ಅಂಶಗಳು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ. 4 ನೇಯದರ ಅರ್ಥ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ, ಕೋನಗಳ, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅಥವಾ ವೃತ್ತಗಳ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಆ ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆಧುನಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳಿಂದ ಎರಡು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ: (1) ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಮಾಣಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. (2) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ಆಕೃತಿಯ ಭಾಗವಾಗಿ ಕಾಣಿಸಿದರೆ ಆ ಭಾಗದ ಪರಿಮಾಣವು ಪೂರ್ಣ ಭಾಗದ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಂಕಲಿಸಲು ಮತ್ತು ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಲು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ನಾವು ಉದ್ದವನ್ನು ಕೂಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 5 ನ್ನು ದೊಡ್ಡದು (Greater than) ಎಂಬುದನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. 'b' ಯು 'a' ನ ಒಂದು ಭಾಗವಾದಾಗ 'a' ಯು 'b' ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಒಂದೇ ವಿಧದ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಹೋಲಿಕೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ರೇಖೆಯು ಬಿಂದುವಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಅನರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ) ಪರಿಮಾಣವಿಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ನಾವು ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವು ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

II. ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು / ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು:

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಕೆಲವು ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿರುತ್ತಾನೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ – 1 : 'ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು'.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ – 2 : ಯಾವುದೇ ಸರಳ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ – 3 : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ – 4 : ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ – 5 : "ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಮತ್ತೆರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಒಂದೇ ಬದಿಗೆ ಉಂಟಾದ ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದು, ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುವುವು".

ಐದನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು "ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ" ಎಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇದು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು "ಸಮಾಂತರ"ವೇ ಅಥವಾ ಅವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಸಹ ಹಲವರು ಈ ಪ್ರಯತ್ನಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುತ್ತಾರೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಸಹ ತನ್ನ ಮೊದಲ 4 ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತನ್ನ ಕೃತಿ **ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್‌ನ** ಮೊದಲ 28 ಉಕ್ತಿಗಳ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಿರುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ 29 ನೇ ಉಕ್ತಿಯ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲೇಬೇಕಾಯಿತು. 1823ರಲ್ಲಿ **ಜಾನೋಸ್ ಬೋಲ್ಯಾಯ್** (Janos Bolyai) ಮತ್ತು **ನಿಕೋಲೈ ಲೊಬಾಚೆವಸ್ಕಿ** (Nicolai Lobachevsky) ಎಂಬುವವರು ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೇ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ **ಸ್ವ–ಸ್ಥಿರ ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ನೇತರ ರೇಖಾಗಣಿತ** ("Non-Eucledion Geometry") ಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿದರು. ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು **'ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಎಂದಿಗೂ ಸಂಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ'** ಎಂಬ ಉಕ್ತಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ತನ್ನ ಹೇಳಿಕೆ (ಉಕ್ತಿ) ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವಾಗ, ಹಲವಾರು ಸರ್ವಕಾಲಿಕ ಊಹಾಸತ್ಯಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿರುತ್ತಾನೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, **ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ** 1 ರಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಮನಗಂಡಿದ್ದನು. ಅದರಂತೆಯೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಅನೇಕ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 2 ರಂತೆ, ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. **ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 4** ಲಂಬ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಬೇರೆಲ್ಲಿಯೂ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ. ಅವರು "ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದಾದ ಕೋನವು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆಂದು ಊಹಿಸಿದ್ದರು".

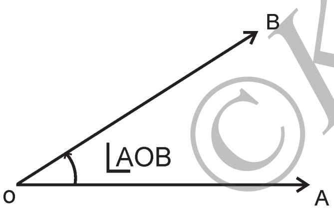
ಪ್ರಸ್ತುತ ಸನ್ನಿವೇಶಕ್ಕೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕೃತಿ **ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್‌ನ**ಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಅಸ್ಥಿರ ಅಂಶಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಕ್ಲಿಷ್ಟಕರ ಗಣಿತ ತತ್ವಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲಿರುವ ಈ ಕೃತಿಯು ಖಚಿತವಾಗಿಯೂ **ಪ್ರಥಮ ಪುಸ್ತಕ**ವಾಗಿದೆ.

ಇತ್ತೀಚಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡದ ಹೊಸ ಅಂಶಗಳು, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವ ಅನೇಕ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆಯುತ್ತಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ ಪದಗಳನ್ನು ಈ ಹೊಸ ಅಂಶಗಳು, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತು ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳ ಆಳವಾದ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದ ಬಿಂದು, ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸಮತಲಗಳಂತಹ ಅಮೂರ್ತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು **ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಪದ್ಧತಿ**ಯನ್ನು (Co-ordinate System) ಅನುಸರಿಸಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ ಅಂಶಗಳು ಯಾವುವು?
2. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?
3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳಿಗೆ ನಿಮ್ಮ ಅನುಭವದ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.
   (a) ಸಮ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮನಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
   (b) ಪೂರ್ಣವು ಅದರ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದು.
4. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವ ಅಗತ್ಯವೇನು?
5. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿವೆ. (ಆವೃತ ಗುಣ). ಇದು ಒಂದು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧವೋ ಅಥವಾ ನೀವು ಇದನ್ನೇನಾದರೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದೇ?

ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು :



ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ 'O' ಆದಿ ಬಿಂದುವುಳ್ಳ $\overrightarrow{OA}$ ಯು ಒಂದು ಕಿರಣ ವಾಗಿದೆ. ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ $\overrightarrow{OB}$ ಯು ಅದೇ 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಮತ್ತೊಂದು ಕಿರಣವಾಗಿದೆ. $\overrightarrow{OB}$ ಯು $\overrightarrow{OA}$ ಯನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತ ತಿರುಗಿಸುವುದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. $\overrightarrow{OB}$ ಯು $\overrightarrow{OA}$ ಯೊಂದಿಗೆ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಕಿರಣವು ಸುತ್ತುವ ಪ್ರಮಾಣವು ಆ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಲು **'ಡಿಗ್ರಿ'** ಎಂಬ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಅಳತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. **'a' ಡಿಗ್ರಿ**ಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು a^0 ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಕೋನದ **ಬಾಹು**ಗಳೆಂದು ಮತ್ತು 'O' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೋನದ **ಶೃಂಗ**ಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು $\angle AOB$ ಅಥವಾ $A\hat{O}B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

> **ಸೂಚನೆ :**
> **$\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳು ಎರಡು ಕಿರಣಗಳು. X ವು $\overrightarrow{OA}$ ಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದಾಗ $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OX}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 'Y' ಯು $\overrightarrow{OB}$ ಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದಾಗ $\overrightarrow{OB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OY}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AOB = \angle XOY$**

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 :

ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು ಬಳಸಿ 40° ಅಳತೆಯ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ಚಟುವಟಿಕೆ 2 :

$\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕೋನಮಾಪಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಳೆಯಿರಿ.

ಜಾಗ್ರತೆ !

ಅತಿ ನಿಖರವಾದ ಕೋನಮಾಪಕ, ಅಳತೆಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯ ಕೋನವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣುಗಳು ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತವೆ. ಸ್ವಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣದ ದೋಷ ವಿದ್ದರೂ ಸಹ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಈ ರೀತಿಯ ರಚನೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

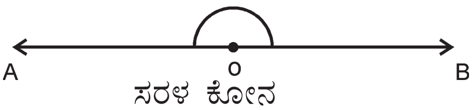
ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವ ಬಗ್ಗೆ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅವು **ಸರಳಕೋನ, ಲಂಬಕೋನ, ಲಘುಕೋನ, ಅಧಿಕಕೋನ, ಸರಳಾಧಿಕಕೋನ, ಪೂರ್ಣಕೋನ, ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು, ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು, ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳು** ಇತ್ಯಾದಿ.

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, 'O' ಯು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ 'O' ಯು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಕಿರಣಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ B ಯು 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಎಡ ಭಾಗಕ್ಕೂ ಮತ್ತು Aಯು 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೂ ಇದ್ದಾಗ, $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಕ್ಕೆ **ಸರಳಕೋನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

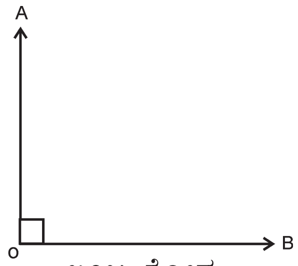
ಒಂದು ಕೋನ ಮಾಪಕದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರಿಸಿ ನೋಡಿದಾಗ $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 180° ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ 180° ಯ ಸರಳಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ರೂಪಿಸುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಸಾಧನದ ಸಹಾಯದಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವಂತೆ ಇದನ್ನೊಂದು ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಒಮ್ಮೆ ಒಂದು ಸರಳ ಕೋನದ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದ ನಂತರ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಬಗೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

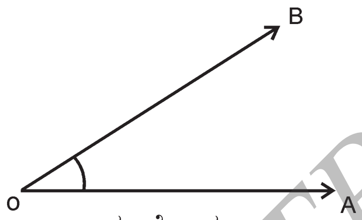
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 90^0 ಅಳತೆಯ ಕೋನಕ್ಕೆ **ಲಂಬಕೋನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಕೋನಮಾಪಕದ ಅರ್ಧ ಅಳತೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 90^0 ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಳತೆಯ ಕೋನಕ್ಕೆ **ಲಘುಕೋನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು 90^0 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಆದರೆ 180^0 ಕಡಿಮೆ ಅಳತೆಯಿರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ **ಅಧಿಕಕೋನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 180^0 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಆದರೆ 360^0 ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಳತೆಯಿರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ **ಸರಳಾಧಿಕಕೋನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ 360^0 ಅಳತೆಯ ಕೋನಕ್ಕೆ **ಪೂರ್ಣಕೋನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಇದು $\overrightarrow{OA}$ ಕಿರಣವು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಸುತ್ತನ್ನು ಸುತ್ತುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿದೆ.



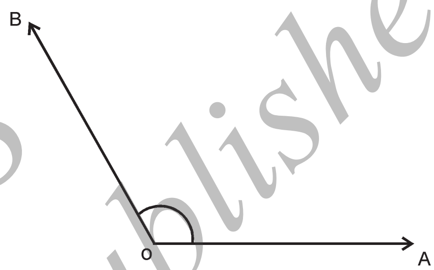
ಸರಳ ಕೋನ



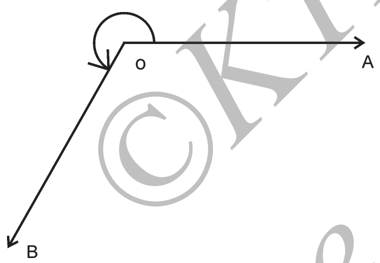
ಲಂಬ ಕೋನ



ಲಘು ಕೋನ

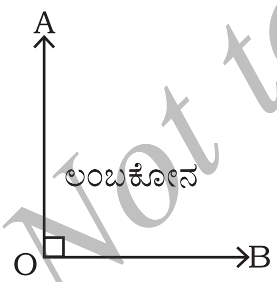


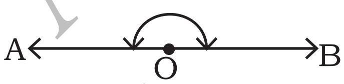
ಅಧಿಕ ಕೋನ



ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನ

ಪೂರ್ಣ ಕೋನ





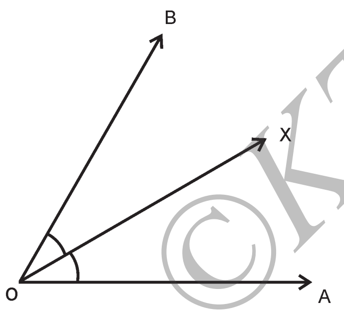
ಸರಳಕೋನ

$\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 90^0 ಇದ್ದರೆ ಅವು ಪರಸ್ಪರ **ಲಂಬವಾಗಿ**ರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 180^0 ಇದ್ದಾಗ ಅವು **ಪರಿಪೂರಕ ಕಿರಣ**ಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ **ವಿರುದ್ಧ** ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

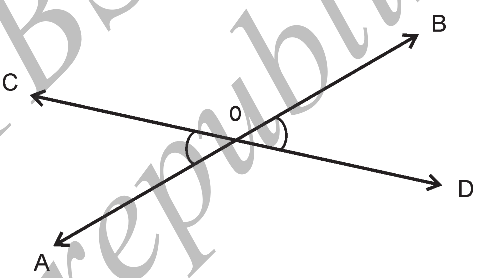
ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. 'O' ಇದರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ 'O' ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಕಿರಣಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ : 'B' ಯು 'O' ನ ಎಡಬದಿಗೂ ಹಾಗೂ 'A' ಯು 'O' ನ ಬಲಬದಿಗೂ ಇದ್ದಾಗ ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯು $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಈ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳಿಂದಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಒಂದು ಸರಳಕೋನ ಅಥವಾ 180^0.

ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು **ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳು** ಅಥವಾ **ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 90^0 ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು **ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು** ಅಥವಾ **ಲಂಬಕೋನ ಪೂರಕಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು ಹಾಗೂ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದು (ಶೃಂಗಬಿಂದು)ವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು **ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ 'O' ಬಿಂದುವು ಮೊದಲನೇ ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳನ್ನಾಗಿಯೂ ಎರಡನೇ ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{CD}$ ಯನ್ನು $\overrightarrow{OC}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OD}$ ಕಿರಣಗಳನ್ನಾಗಿಯೂ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$ ಮತ್ತು $\angle DOA$ ಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. $\angle AOC$ ಮತ್ತು $\angle BOD$ ಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ **"ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು"** ಹಾಗೂ $\angle COB$ ಮತ್ತು $\angle DOA$ ಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.



ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು



ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು

ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವಾಗ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿಲ್ಲ ಆದರೆ ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಇವುಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದನು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ನಿಯಮ 1 : **ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡವು ಧನಾತ್ಮಕ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. (ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{AB}$ ಯ ಉದ್ದವನ್ನು AB ಅಥವಾ $|AB|$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.)**

ನಿಯಮ 2 : **ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{AB}$ ಮೇಲೆ 'C' ಬಿಂದುವಿದ್ದಾಗ, $\overline{AB}$ ಯ ಉದ್ದವು $\overline{AC}$ ಮತ್ತು $\overline{CB}$ ಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $AB = AC + CB$.**

ನಿಯಮ 3 : **ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಸರಳಕೋನವು 180^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.**

ನಿಯಮ 4 : **$\overrightarrow{OC}$ ಯು $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇದ್ದಾಗ $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.**

ನಿಯಮ 5 : **ಎರಡು ಕಿರಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 0^0 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 0^0 ಅಥವಾ 360^0 ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

ಸೂಚನೆ: ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಕೋನಗಳು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ : ಗಣಿತದ ತತ್ವಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯೆಂದರೆ ಕನಿಷ್ಟ ಎಷ್ಟು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳಿಂದ ಸ್ವಸ್ಥಿರ ರೇಖಾಗಣಿತ (Self Consistant Geometry) ವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು. ಇಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಅಥವಾ ಯುಕ್ಲಿಡನ ಮೂಲ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ ಮತ್ತು ಅಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲೇಬೇಕೆಂಬ ಪರಿಗಣನೆ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನಿಂದ ನಿರೂಪಿತ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳಿಗೂ ಹಾಗೂ ನಂತರದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಸೇರಿಸಿದ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳಿಗೂ ತುಂಬಾ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3 :

ಒಂದು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ 'O' ಬಿಂದು ಗುರ್ತಿಸಿ. $\overrightarrow{OC}$ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\angle BOC$ ಮತ್ತು $\angle COA$ ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. $\angle BOC + \angle COA$ ಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು? ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು $\overrightarrow{OC}$ ಯನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿ ಮುಂದುವರೆಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಕಂಡುಬರುವ ಅಂಶಗಳೇನು?

ಪ್ರತಿ ಬಾರಿಯು ಆ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಇರುವುದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಇದನ್ನು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

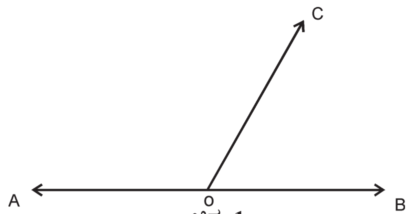
ಸೂಚನೆ:

ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನೆಯ ಅಗತ್ಯತೆ ಇದೆ ಎಂದು ಅರ್ಥವಾಯಿತಲ್ಲವೆ? ಯಾವುದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ ಉಂಟಾದ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ನೀವು ಅಳೆಯ ಬಹುದು. ಆದಾಗ್ಯೂ ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕಿರಣದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣದ ರಚನೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಅನೇಕ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅವೆಲ್ಲವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಆಧಾರಿತ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನೆಗಳು ಅಥವಾ ಈಗಾಗಲೇ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ ಯಾವ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸಾಧನೆಯ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಆ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಇದೊಂದು **ಉಕ್ತಿ** (Proposition)ಯಾಗಿದೆ. **'ಉಕ್ತಿ'** ಎಂದರೆ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇದು ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಊಹಾಕಲ್ಪನೆಗಳ ಮೇಲೂ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ.

ಉಕ್ತಿ 1 : $\overleftrightarrow{AB}$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\overrightarrow{OC}$ ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ $\angle BOC + \angle COA = 180^0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆಗೆ ಮುಂಚೆಯೇ, ಯಾವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ ಮತ್ತು ಏನನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.



ಚಿತ್ರ–1

ದತ್ತ : $\angle BOC$ ಮತ್ತು $\angle COA$ ಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\overrightarrow{OC}$ ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಧನೀಯ : $\angle BOC + \angle COA = 180^0$

ಸಾಧನೆ : ಚಿತ್ರದಿಂದ $\angle BOC + \angle COA = \angle BOA$ (ನಿಯಮ 4 ರಂತೆ), ಆದರೆ $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ $\angle BOA$ ಯು ಒಂದು ಸರಳಕೋನವಾಗಿದೆ. ನಿಯಮ 3 ರಂತೆ $\angle BOA = 180^0$

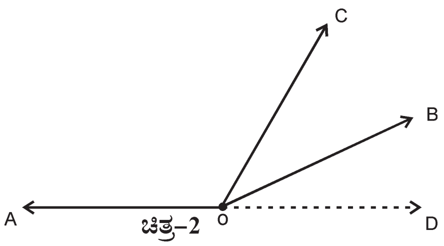
ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 1 ರಂತೆ ಒಂದೇ ಅಂಶ $\angle BOA$ ಗೆ ಸಮನಾದ ಅಂಶಗಳು $\angle BOC + \angle COA$ ಮತ್ತು 180^0ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BOC + \angle COA = 180^0$

ಪುನಃ ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಅದರಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಆ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದು ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವಭಾವವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ S ನಿಜವಾದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತೊಂದು ಹೇಳಿಕೆ 'R' ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ 'S' ಒಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಊಹಾಕಲ್ಪನೆ ಮತ್ತು 'R' ಒಂದು ತೀರ್ಮಾನವಾಗಿದೆ. (ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣವು ನಿಂತಿದೆ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆ S ಊಹಾಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಎನ್ನುವ 'R' ಹೇಳಿಕೆ ತೀರ್ಮಾನವಾಗಿದೆ).

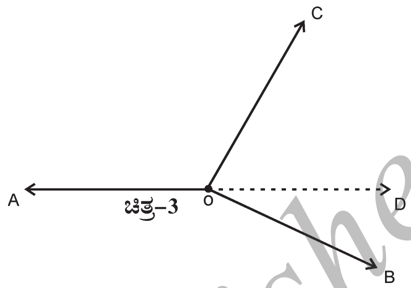
ಹಾಗಾದರೆ ಉಕ್ತಿಯ ವಿಲೋಮವೇನು? ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಊಹಾಕಲ್ಪನೆ ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಮೂಲ ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ 'S' ಊಹಾಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿದ್ದು R ತೀರ್ಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಿಲೋಮ ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ R ಊಹಾ ಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿದ್ದು 'S' ತೀರ್ಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರಸ್ತುತ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಉಕ್ತಿಯ ವಿಲೋಮವು $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OC}$ ಕಿರಣಗಳು, $\angle BOC$ ಮತ್ತು $\angle COA$ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ (ಅಂದರೆ $\overrightarrow{OC}$ ಯು $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ) ಮತ್ತು $\angle BOC + \angle COA = 180^0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, A, O, B ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ A, O, B ಗಳು **ಏಕರೇಖಾಗತ**ವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಉಕ್ತಿಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ಉಕ್ತಿ 2 : $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OC}$ **ಗಳು ಮೂರು ಕಿರಣಗಳಾಗಿದ್ದು** $\overrightarrow{OC}$ **ಯು** $\overrightarrow{OA}$ **ಮತ್ತು** $\overrightarrow{OB}$ **ಗಳ ನಡುವೆಇದೆ.** $\angle BOC + \angle COA = 180^0$ **ಆದಾಗ, A, O, B ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ.**



ಚಿತ್ರ–2



ಚಿತ್ರ–3

ದತ್ತಾಂಶ : $\angle BOC$ ಮತ್ತು $\angle COA$ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗಿರುವಂತೆ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OC}$ ಗಳು ಮೂರು ಕಿರಣಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಧನೀಯ : A,O,B ಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ.

ರಚನೆ : A,O,D ಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವಂತೆ AO ವನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ

ಸಾಧನೆ : ಉಕ್ತಿ (1)ರಿಂದ, $\angle DOC + \angle COA = 180^0$.

ಆದರೆ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವಂತೆ $\angle BOC + \angle COA = 180^0$

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (1) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, $\angle DOC + \angle COA = \angle BOC + \angle COA$.

ಈಗ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (3)ರಂತೆ $\angle DOC = \angle BOC$. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು, ಅವು $\overrightarrow{OB}$ ಯು $\overrightarrow{OD}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OC}$ ಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿದೆ (ಚಿತ್ರ (2)ನ್ನು ನೋಡಿ) ಅಥವಾ $\overrightarrow{OD}$ ಯು $\overrightarrow{OB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OC}$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ. (ಚಿತ್ರ–3 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಮೊದಲನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಿಯಮ (4)ರಂತೆ, ನಮಗೆ,

$\angle BOC = \angle DOC = \angle DOB + \angle BOC$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (3) ಹೇಳುವಂತೆ $\angle DOB = 0$ ಮತ್ತು

ಎರಡನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಿಯಮ (4) ರಂತೆ,

$\angle DOC = \angle BOC = \angle BOD + \angle DOC$ ಮತ್ತು

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (3)ರಂತೆ. $\angle BOD = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ $\overrightarrow{OB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OD}$ ಕಿರಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ '0' ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಿಯಮ (5)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದಾದರೆ $\overrightarrow{OB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OD}$ ಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ B ಮತ್ತು O ಗಳು $\overleftrightarrow{AD}$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A, O, B ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸೂಚನೆ :

ಉಕ್ತಿ (1) ಮತ್ತು ಉಕ್ತಿ (2), ಇವು ಎರಡು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿದ್ದು ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮವಾಗಿವೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ವಿಲೋಮ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಇದನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕೆಲವೊಂದು ಸರಿಯಾದ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ವಿಲೋಮಗಳು ತಪ್ಪಾಗಿರಬಹುದು. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯುವಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle COA - \angle BOC = 50^0$ ಆದರೆ ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

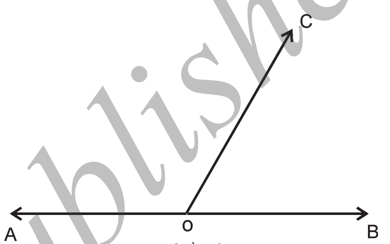
ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $\angle COA - \angle BOC = 50^0$ (ದತ್ತ)

ಉಕ್ತಿ (1)ರಿಂದ, $\angle BOC + \angle COA = 180^0$

ಮೇಲ್ಕಂಡ ಎರಡು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$2\angle COA = 230^0$

(ಇಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ?)



ಚಿತ್ರ–4

$\Rightarrow \angle COA = 115^0$ (ಇಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ?)

ಈಗ, $\angle BOC = 180^0 - \angle COA = 180^0 - 115^0$

$\angle BOC = 65^0$

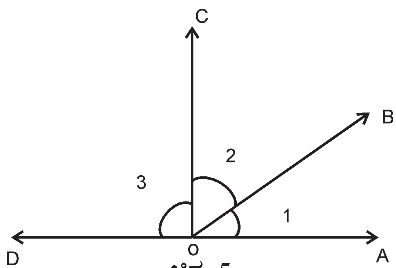
ಉದಾಹರಣೆ 2 : ನೀಡಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$ ಕೋನಗಳು 1:2:3ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಹಾಗೂ $\overleftrightarrow{AD}$ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $\angle AOB : \angle BOC : \angle COD = 1:2:3$

ಉಕ್ತಿ (1) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180°$

ಆದರೆ, ನೀಡಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದಂತೆ $\angle BOC = 2\angle AOB$ ಮತ್ತು $\angle COD = 3\angle AOB$



ಚಿತ್ರ–5

ಆದ್ದರಿಂದ $6\ \angle AOB = 180°$

$\angle AOB = 30°$

$\angle BOC = 2(30°) = 60°$, ಮತ್ತು $\angle COD = 3(30°) = 90°$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $\angle AOB$ಯು $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ. $\overrightarrow{OP}$ ಯು $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಕಿರಣವಾದಾಗ $\angle AOP=\angle POB$. ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{OP}$ ಯು $\angle AOB$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಅಥವಾ $\overrightarrow{OP}$ ಯು $\angle AOB$ಯ **ಕೋನಾರ್ಧಕ**ವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AOP=\angle POB=\frac{1}{2}\angle AOB$

ಚಟುವಟಿಕೆ 4 :

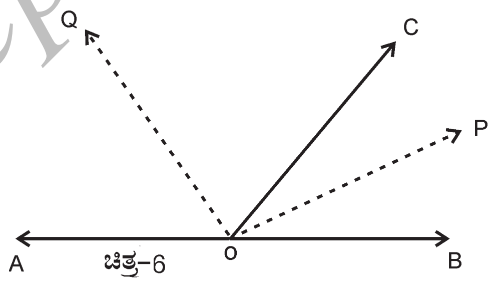
$\overleftrightarrow{AB}$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\overrightarrow{OC}$ ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\angle BOC$ ಮತ್ತು $\angle COA$ ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಕಿರಣ $\overrightarrow{OP}$ ಯು $\angle BOC$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ ರಚಿಸಿ. ಇದೇ ರೀತಿ $\angle COA$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ $\overrightarrow{OQ}$ ಯನ್ನುರಚಿಸಿ. $\angle POQ$ ಅನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. $\angle POQ = 90^\circ$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಇದೇ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ $\overrightarrow{OC}$ ಗಳನ್ನು $\overleftrightarrow{AB}$ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಬಾರಿಯು $\angle POQ=90^\circ$ ಇರುವುದು ಕಂಡುಬರುವುದೇ? ಇದನ್ನು ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯನ್ನಾಗಿ ರೂಪಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಉಕ್ತಿ 3 :

$\overrightarrow{OC}$ ಯು $\overleftrightarrow{AB}$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಒಂದು ಕಿರಣವಾಗಿರಲಿ. $\overrightarrow{OP}$ ಯು $\angle BOC$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OQ}$ ಯು $\angle COA$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳಾದಾಗ $\angle POQ = 90^\circ$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತಾಂಶ:

$\overrightarrow{OP}$ಯು $\angle BOC$ ಯನ್ನು ಮತ್ತು $\overrightarrow{OQ}$ ಯು $\angle COA$ ಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ-6

ಸಾಧನೀಯ: $\angle POQ = 90^0$

ಸಾಧನೆ:

$\overrightarrow{OP}$ ಯು $\angle BOC$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$\angle POC=\frac{1}{2}\angle BOC$ .... (1)

$\overrightarrow{OQ}$ ಯು $\angle COA$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle COQ=\frac{1}{2}\angle COA$ .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಮತ್ತು ನಿಯಮ (4)ರಂತೆ

$$\angle POC + \angle COQ = \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle COA)$$

$$\angle POQ = \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle COA)$$

ಉಕ್ತಿ 1 ರಂತೆ, $\angle BOC + \angle COA = 180^0$

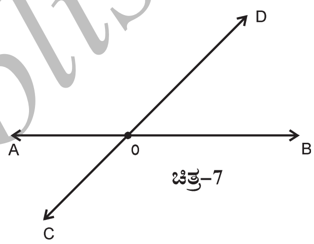
ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$

ಚಟುವಟಿಕೆ 5 :

$\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ $\angle BOD$, $\angle DOA$, $\angle AOC$ ಮತ್ತು $\angle COB$ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. $\angle BOD$ ಮತ್ತು $\angle AOC$ ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿ. ಇದೇ ರೀತಿ $\angle DOA$ ಮತ್ತು $\angle COB$ ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಮಂಜಸ ಅಂಶವು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದಲ್ಲವೆ? ಇದನ್ನು $\overleftrightarrow{CD}$ ಯು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯೊಂದಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಒಂದು ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಉಕ್ತಿ 4 :

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ–7

ದತ್ತಾಂಶ: $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\angle BOD = \angle AOC$ ಮತ್ತು $\angle DOA = \angle COB$

ಸಾಧನೆ : $\overrightarrow{OD}$ ಕಿರಣವು ನಿಂತಿರುವ $\overleftrightarrow{AB}$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ $\angle BOD$ ಮತ್ತು $\angle DOA$ ಗಳು ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉಕ್ತಿ – (1) ರಂತೆ $\angle BOD + \angle DOA = 180^0$ .... (1)

ಇದೇ ರೀತಿ $\overrightarrow{OA}$ ಕಿರಣವು ನಿಂತಿರುವ $\overleftrightarrow{CD}$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ $\angle DOA$ ಮತ್ತು $\angle AOC$ ಗಳು ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪುನಃ ಉಕ್ತಿ(1)ರಂತೆ $\angle DOA + \angle AOC = 180^0$ .... (2)

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (1) ರಂತೆ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$\angle BOD + \angle DOA = \angle DOA + \angle AOC$ .... (3)

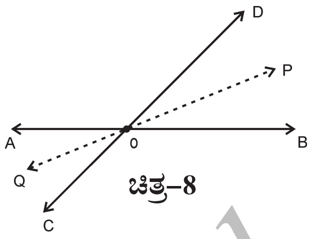
ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (3) ರಂತೆ $\angle DOA$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ,

$\angle BOD = \angle AOC$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\angle DOA = \angle COB$.

ಅಂದರೆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ 3 : $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು 'O' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ. $\overrightarrow{OP}$ ಯು $\angle BOD$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ $\overrightarrow{OQ}$ ಯು $\angle AOC$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ Q, O, P ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ–8

ಸಾಧನೆ : $\angle POQ = 180^0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ದತ್ತಾಂಶದಂತೆ $\overrightarrow{OP}$ ಯು ಕೋನ $\angle BOD$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle POD = \frac{1}{2}\angle BOD$ ....(1)

ಇದೇ ರೀತಿ, $\overrightarrow{OQ}$ ಯು $\angle AOC$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOC$..................(2)

$\angle POQ = \angle POD + \angle DOA + \angle AOQ$ (ನಿಯಮ 4 ರಂತೆ)

$= \angle DOA + \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$ .... ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$= \angle DOA + \frac{1}{2} \times 2\angle AOC$, ($\angle BOD$ ಮತ್ತು $\angle AOC$ ಗಳು ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

$= \angle DOA + \angle AOC$.

$\angle POQ = 180^0$ (ಉಕ್ತಿ 1 ರಂತೆ)

ಇದರಿಂದ P,O,Q ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

(1) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸನ್ನಿವೇಶಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

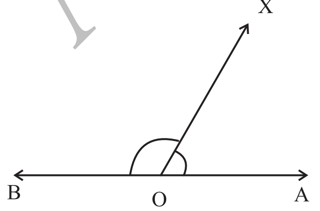
(a) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗದ 3 ಸರಳರೇಖೆಗಳು.

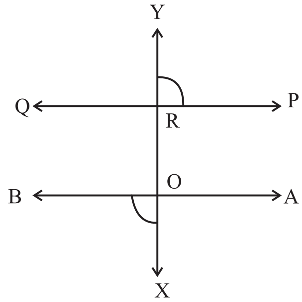
(b) ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಹೊರಟಿರುವ ಅನೇಕ ಕಿರಣಗಳು; ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕಿರಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಒಂದು ಲಘುಕೋನ.

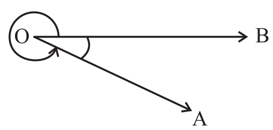
(c) ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳಲ್ಲದ ಎರಡು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳು.

(d) ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು.

(2) ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳ ವಿಧಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

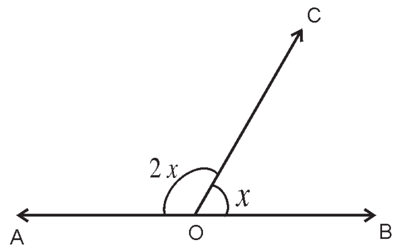




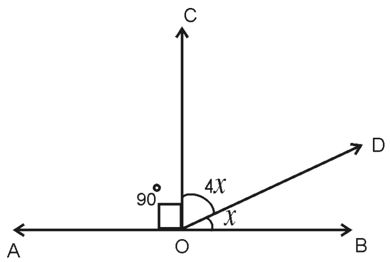


(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'x' ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

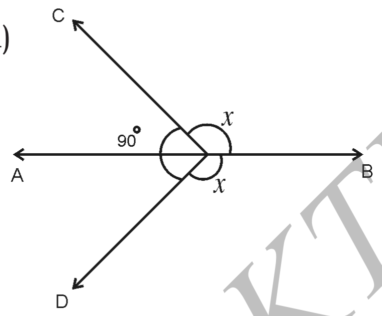
i)



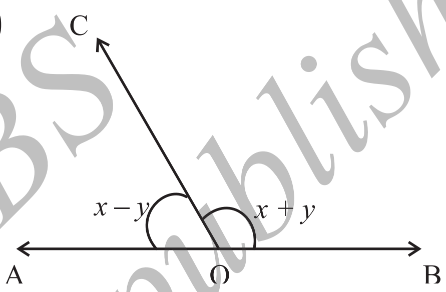
ii)



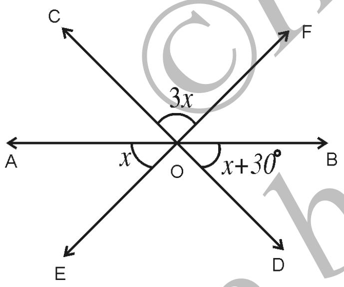
iii)



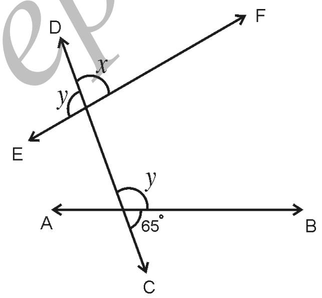
iv)



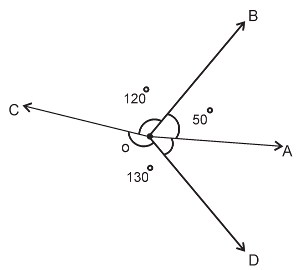
v)



vi)



(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ? ಆ ಕಿರಣಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳೇ?



(5) ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವು ವಿಶಾಲಕೋನವಾದಾಗ ಇನ್ನೊಂದು ಲಘುಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 5ನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

$\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ.ಇವುಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಒಂದೇ ಬಿಂದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ P, Q ಎಂಬ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳು ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿವೆಯೆಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆದರೆ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ (1) ರಂತೆ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಏಕೈಕ ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{PQ}$ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. P ಮತ್ತು Q ಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{PQ}$. ಇದೇ ರೀತಿಯಂತೆ $\overleftrightarrow{CD}=\overleftrightarrow{PQ}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (1) ರಂತೆ $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{CD}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೇಖೆಗಳು ಎಂಬ ಊಹೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೇಖೆಗಳು ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ಅವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನುಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ **ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.**

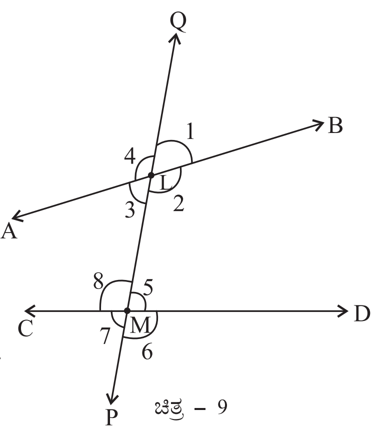
ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ **ಸಮಾಂತರ**ವಾಗಿವೆಯೆಂದರೆ ಅವು ಐಕ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು ಅಥವಾ ಅವು ಛೇದಿಸದೇ ಇರಬೇಕು.ಹೀಗಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದ $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈಗ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 5ನೇ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಗಮನಿಸೋಣ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ – 5 :

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅವು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಇದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಅತ್ಯಂತ ಕಠಿಣವಾದ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಾಗಿದೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ನಂತರದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ 5ನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿ ಮತ್ತು ಸರಳವಾಗಿರುವ ಹೊಸ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ಅನೇಕ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆದವು.

$\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{PQ}$ರೇಖೆಯು(ಚಿತ್ರ 9ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ), $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು 'L' ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ಯನ್ನು'M' ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಆ ರೇಖೆಗಳ **"ಛೇದಕ ರೇಖೆ"** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{PQ}$ ಯು $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳ ಛೇದಕವಾಗಿದೆ. ಈ 3 ರೇಖೆಗಳು ಒಟ್ಟು 8 ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿವೆ.



ಚಿತ್ರ – 9

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ,$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಇವು ಆ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $\angle 1, \angle 4, \angle 7$ ಮತ್ತು $\angle 6$ **ಬಹಿರ್‌ಕೋನಗಳು**(ಹೊರಕೋನಗಳು). $\angle 3, \angle 2, \angle 5$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಗಳು **ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು**(ಒಳಕೋನಗಳು) ಆಗಿವೆ. $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 5$ ಗಳ ಒಂದು ಜೊತೆ ಮತ್ತು $\angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಗಳ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳನ್ನು **ಅಂತರ್ ಪರ್ಯಾಯಕೋನ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 7$ ಗಳ ಒಂದು ಜೊತೆ ಮತ್ತು $\angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 6$ ಗಳ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳನ್ನು **ಬಹಿರ್ ಪರ್ಯಾಯಕೋನ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 5$ ನ್ನು ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ಎನ್ನುವರು. $\angle 2$, $\angle 6$; $\angle 3$, $\angle 7$, ಮತ್ತು $\angle 4$, $\angle 8$ ಇವು ಉಳಿದ 3 ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

$\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಗಳು $\overleftrightarrow{PQ}$ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 5 ರಂತೆ $\angle 3 + \angle 8 < 180^0$. ಆದರೆ $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು $\overleftrightarrow{PQ}$ ರೇಖೆಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. (ಅಥವಾ $\angle 2 + \angle 5 < 180^0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅವು $\overleftrightarrow{PQ}$ ರೇಖೆಯ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ)

$\angle 3 + \angle 8 \neq 180^0$ ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ. ಇದರಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಉಕ್ತಿ– 5 :

ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ , ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಫಲಿತಾಂಶ ಸತ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ಊಹಿಸೋಣ $\angle 3 + \angle 8 \neq 180^0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $\angle 3 + \angle 8 < 180^0$ ಅಥವಾ $\angle 3 + \angle 8 > 180^0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.(ಚಿತ್ರ 10ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಮೊದಲನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು $\overleftrightarrow{PQ}$ ನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

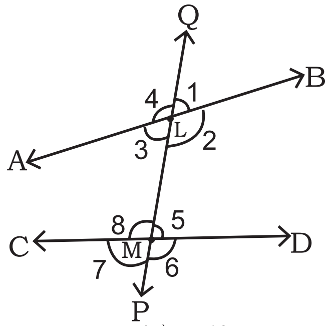
$\angle 3 + \angle 8 > 180^0$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದಾಗಿದ್ದು,

$$\angle 3 + \angle 8 + \angle 2 + \angle 5 = (\angle 3 + \angle 2) + (\angle 8 + \angle 5)$$

$$= \angle ALB + \angle CMD$$

$$= 180^0 + 180^0$$

$$= 360^0.$$



ಚಿತ್ರ – 10

ಇದರಂತೆ $\angle 2 + \angle 5 = 360^0 - (\angle 3 + \angle 8) < 360^0 - 180^0 = 180^0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle 2+\angle 5 < 180^0$

ಆದ್ದರಿಂದ, 5ನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಂತೆ, $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ಗಳು $\overleftrightarrow{PQ}$ ರೇಖೆಯ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಇದರಿಂದ ಬರಬಹುದಾದ ತೀರ್ಮಾನವೆಂದರೆ, $\overleftrightarrow{PQ}$ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಗೆ ಸಮವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಆ ರೇಖೆಯ ಎಡಭಾಗದ ಅಥವಾ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಸಮಾಂತರವಾದಾಗ, ಯಾವುದೇ ಛೇದಕ $\overleftrightarrow{PQ}$ ನ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಉಕ್ತಿಯ ಪೂರ್ಣವಾದ ಸಾಧನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಏನನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಹೊರಟಿದ್ದೇವೆಯೋ ಅದೇ ತಪ್ಪು ಎಂಬಲ್ಲಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದೆವು. ಅಂದರೆ, "S implies R" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು 'R ತಪ್ಪು' ಎಂದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದೆವು. ಹಾಗೂ 'S ತಪ್ಪು' ಎಂಬಲ್ಲಿ ತಲುಪಿದೆವು.

ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಮತ್ತು ಇತರ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪದೇ ಪದೇ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. 'S implies R' ಎಂಬುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು "not R implies not S" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು **'Reductio ad absurdum'** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. 'Reductio ad absurdum' ಎಂಬುದು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದವಾಗಿದೆ. **ತಾರ್ಕಿಕ ಅಸಂಬದ್ಧತೆಗೆ ಇಳಿಕೆ 'Reduction to absurdity'** ಎಂಬುದು ಇದರ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ವೈರುಧ್ಯ ವಿಧಾನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 5 ರಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ? ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿರುವವೆ? ಇಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥವುಳ್ಳ ಸೂಕ್ತ ಸರಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಇದನ್ನು ಮೊದಲಬಾರಿಗೆ ಸ್ಕಾಟಿಷ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಪ್ಲೆಫೇರ್ (Playfair) ರವರು ನೀಡಿರುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ಲೇಫೇರ್‌ನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ (Playfair's Postulate) :

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಆ ರೇಖೆಯ ಹೊರಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಆ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉಕ್ತಿ – 6 :

ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ, ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಗೆ ಸಮವಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

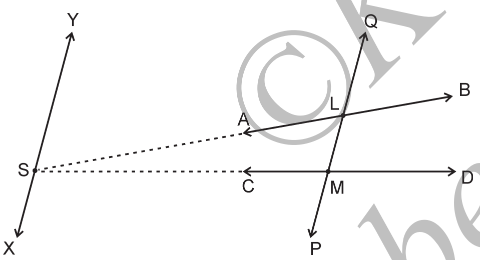
ದತ್ತ: $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಛೇದಕ $\overleftrightarrow{PQ}$ ಯು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು 'L' ನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಯನ್ನು 'M' ನಲ್ಲಿಯೂ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿರುವವು; ಮತ್ತು $\angle ALM+\angle LMC = 180^0$ ಆಗಿದೆ

ಸಾಧನೀಯ :– $\overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{CD}$

ಇದನ್ನು ವೈರುಧ್ಯ ವಿಧಾನ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

ಸಾಧನೆ:– $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದಾಗ, ಅವೆರಡೂ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿರುತ್ತವೆ. ಆ ಬಿಂದು 'S' ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಪ್ಲೇಫೇರ್‌ನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಂತೆ, $\overleftrightarrow{XY}$ ಎನ್ನುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆಯು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ S ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.



$\overleftrightarrow{XY} \,||\, \overleftrightarrow{PQ}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle QLS+\angle LSY = 180^0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. (ಅವು $\overleftrightarrow{XY}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದಕ $\overrightarrow{SB}$ ನ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿನ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು)

ಆದರೆ $\angle QLS+\angle ALM=180^0$ (ಅವು $\overleftrightarrow{PQ}$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\overrightarrow{LA}$ ಕಿರಣ ನಿಂತಾಗ ಉಂಟಾದ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle LSY=\angle ALM$ (ಇಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ?)

ಆದರೆ, $\angle ALM+\angle LMC=180^0$ (ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ)

ಅದರೊಂದಿಗೆ, $\angle LMC+ \angle MSY=180^0$ (ಏಕೆಂದರೆ ($\overleftrightarrow{XY}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದಕ $\overrightarrow{SD}$ ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle ALM = \angle MSY$

ಹಾಗಾಗಿ, $\angle LSY= \angle MSY$

ಆದರೆ, $\angle MSY = \angle MSL + \angle LSY$. ಇದರಿಂದ $\angle MSL = 0^0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ $\overrightarrow{SB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{SD}$ ಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದು ಅವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಎನ್ನುವ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{CD}$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 6 :

ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರ ಛೇದನದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

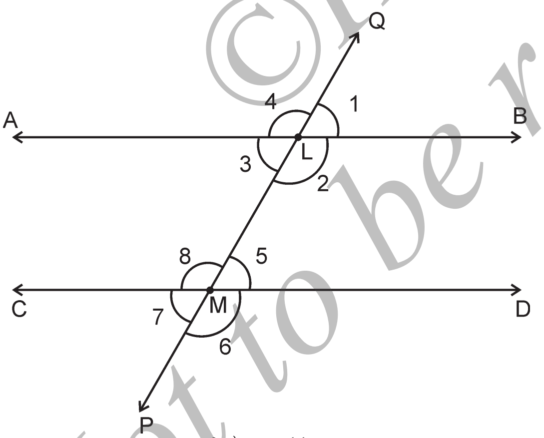
1) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು (Alternate Angles) ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

2) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು (Corresponding Angles) ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಕವಿರುವಂತೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿಬಾರಿಯು ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವೇ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಲ್ಪಡುವುದನ್ನು ನೋಡಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನಾಗಿ ರೂಪಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯವೆಂದರೆ "ಸ್ವೀಕೃತವಾದ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲಾದ ಉಕ್ತಿ".

ಪ್ರಮೇಯ – 1 : ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ
(1) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
(2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ – 11

ದತ್ತ : $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಛೇದಕವು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು L ನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಯನ್ನು M ನಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ : $\angle 3 = \angle 5$ ಮತ್ತು $\angle 1 = \angle 5$

ಸಾಧನೆ : $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದ $\overleftrightarrow{PQ}$ ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಒಳಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore \angle 3 + \angle 8 = 180^0 \rightarrow (1)$

ಆದರೆ, $\angle 8$ ಮತ್ತು $\angle 5$ ಗಳು $\overleftrightarrow{CD}$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\overrightarrow{MP}$ ಕಿರಣ ನಿಂತಾಗ ಉಂಟಾದ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore \angle 8 + \angle 5 = 180^0 \rightarrow (2)$

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ $\angle 3 = \angle 5$, ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $\angle 3$, $\angle 5$ಗಳ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪುನಃ ಅವಲೋಕಿಸಿದಾಗ $\angle 2 + \angle 3 = 180^0 = \angle 8 + \angle 5$

ಇಲ್ಲಿ $\angle 3 = \angle 5$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ $\angle 2 = \angle 8$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದಾದ ಅಂಶವೇನೆಂದರೆ, $\angle 1 = \angle 3$

ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು.

ಇದನ್ನು $\angle 3 = \angle 5$ ರೊಂದಿಗೆ ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ $\angle 1 = \angle 5$ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle 1, \angle 5$ ಗಳ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ $\angle 2 = \angle 6, \angle 4 = \angle 8$, ಮತ್ತು $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 6$ ಎಂದು ಯಾವುದೇ ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲದೇ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಯೋಚಿಸಿ :

ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿವೆ. ಅವು:

(i) ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ ಇವೆರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲು ಮತ್ತೊಂದು ಹೇಳಿಕೆ ಹಾಗೂ ಉಕ್ತಿ (1) ಮತ್ತು (4)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

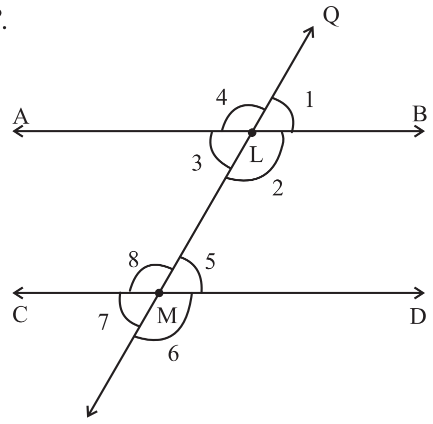
ಪ್ರಮೇಯ 1 ರ ವಿಲೋಮವೇನು? ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಂದು ಛೇದಕದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, "ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೇಖೆಗಳ ಒಂದು ಛೇದಕದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 :

ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತಾಂಶ : $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಯು ಒಂದು ಛೇದಕ ಹಾಗೂ $\angle 3 = \angle 5$ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ – 12

ಸಾಧನೀಯ :– $\overleftrightarrow{AB} \;||\; \overleftrightarrow{CD}$

ಸಾಧನೆ:– ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $\angle 8+\angle 5=180^0$ (ಅವು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ)

ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ $\angle 3=\angle 5$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle 3+\angle 8=180^0$.

ಆದಾಗ್ಯೂ, $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದ ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿನ ಒಳಕೋನಗಳು.

ಉಕ್ತಿ 6 ರಿಂದ $\overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{CD}$ ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದು ಛೇದಕವು ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : ಚಿತ್ರ 11ನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, $\angle 1 = \angle 5$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಆದರೆ $\angle 1=\angle 3$ ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

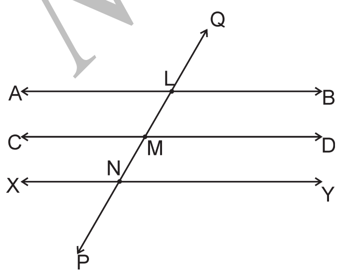
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle 3=\angle 5$

ಪ್ರಮೇಯ 2 ರಿಂದ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ಚಟುವಟಿಕೆ 7 :

$\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\overleftrightarrow{CD}$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು $\overleftrightarrow{XY}$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\overrightarrow{PQ}$ ಛೇದಕವು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು L ನಲ್ಲಿಯೂ, $\overleftrightarrow{CD}$ ಯನ್ನು M ನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{XY}$ ಯನ್ನು Nನಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. $\angle BLQ$ ಮತ್ತು $\angle YNQ$ ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಅವೆರಡರ ಅಳತೆ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ? ಇದನ್ನು $\overleftrightarrow{PQ}$ ವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಪರಿಹಾರ : $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{XY}$ ಗಳು ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು. ಈ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು $\overleftrightarrow{CD}$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.

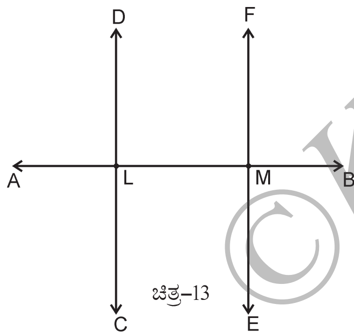
ಇಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{AB} \;||\, \overleftrightarrow{XY}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. $\overleftrightarrow{PQ}$ ಛೇದಕವು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು L ನಲ್ಲಿಯೂ, $\overleftrightarrow{CD}$ ಯನ್ನು M ನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{XY}$ ಯನ್ನು N ನಲ್ಲಿಯೂ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $\angle BLP = \angle DMP$ ಆಗಿದೆ. ಇವು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಛೇದಕವು $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸಿದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, $\angle DMP = \angle YNP$ (ಏಕೆ?)

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 1 ರಂತೆ $\angle BLP = \angle YNP$, ಪ್ರಮೇಯ 2 ರ ಉಪಪ್ರಮೇಯದಂತೆ, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{XY}$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $\overleftrightarrow{AB}$ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ, $\overleftrightarrow{CD}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{EF}$ ಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದಾಗ, $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ–13

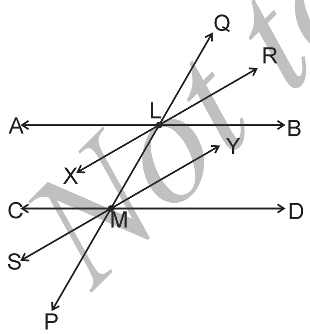
ಪರಿಹಾರ : $\overleftrightarrow{AB}$ ಯು $\overleftrightarrow{CD}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{EF}$ ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ L ಮತ್ತು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ.

$CD \perp AB$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle DLA = 90^{0}$ ಹಾಗೂ $EF \perp AB$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle FMA = 90^{0}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle DLA = \angle FMA$. ಆದರೆ ಇವು $\overleftrightarrow{CD}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{EF}$ ರೇಖೆಗಳನ್ನು, $\overleftrightarrow{AB}$ ಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 2 ರ ಉಪಪ್ರಮೇಯದಂತೆ, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಪರಿಹಾರ : $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಛೇದಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$\angle ALM$ ಮತ್ತು $\angle LMD$ ಗಳ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. $\overrightarrow{LX}$ ಕಿರಣವು $\angle ALM$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ $\overrightarrow{MY}$ ಕಿರಣವು $\angle LMD$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $\overrightarrow{LX}$ ನ್ನು ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{XR}$ ಆಗುವಂತೆ ಹಾಗೂ $\overrightarrow{MY}$ ನ್ನು ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{SY}$ ಆಗುವಂತೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ.

ಇದರಿಂದ $\overleftrightarrow{XR} \parallel \overleftrightarrow{SY}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$\overleftrightarrow{XR}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{SY}$ ರೇಖೆಗಳನ್ನು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಛೇದಕದೊಂದಿಗೆ ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಇದರಿಂದ $\angle XLM = \frac{1}{2}\angle ALM$

$\angle LMY = \frac{1}{2}\angle LMD$

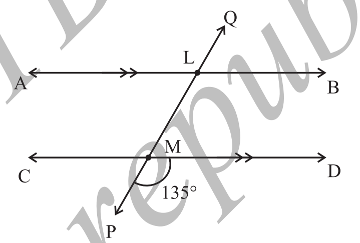
ಇದರಿಂದ $\angle ALM = \angle LMD$ (ಏಕೆ?).

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle XLM = \angle LMY$.

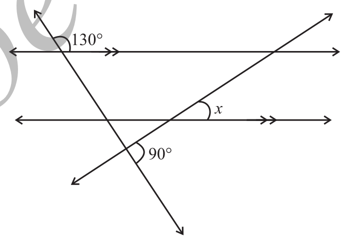
ಆದರೆ ಇವು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಛೇದಕವು $\overleftrightarrow{XR}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{SY}$ ರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡಿದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರಮೇಯ 2ರಿಂದ, $\overleftrightarrow{XR} \| \overleftrightarrow{SY}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



3) ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಉಳಿದ ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಸಹ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4) $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು, $\overleftrightarrow{PQ}$ ಒಂದು ಛೇದಕವಾಗಿದೆ. ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ ಅಂಶಗಳು(Undefined terms) : ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಅಂಶಗಳು.

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (Axiom) : ಗಣಿತದ ಎಲ್ಲಾ ಶಾಖೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತಹ ಗಣಿತ ಸಾಧನೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವಂತಹ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ (Postulate): ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿರುವಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳು.

ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ (Hypothesis) : ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯನ್ನು(proposition) ಸಾಧಿಸಲು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡ ಕೆಲವು ನಿಬಂಧನೆಗಳು.

ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು (Adjacent angles) : ಒಂದು ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು ಹಾಗೂ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳು.

ಪೂರಕಕೋನಗಳು (Complementary angles) : ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 90^0 ಆಗಿರುವಂತಹ ಕೋನಗಳು.

ಪರಿಪೂರಕಕೋನಗಳು(Supplementary angles) : ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿರುವಂತಹ ಕೋನಗಳು.

ಸರಳಕೋನ (Straight angle) : ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ 180^0 ಅಳತೆಯ ಕೋನ.

ಪೂರ್ಣಕೋನ (Complete angle) : 360^0 ಅಳತೆಯ ಕೋನ.

ಸರಳಾಧಿಕಕೋನ (Reflex angle) : 180^0 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಹಾಗೂ 360^0 ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಳತೆಯಿರುವ ಕೋನ.

ಸರಳ ಯುಗ್ಮ (Linear pair) : ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು.

ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು(Vertically opposite angles): ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸರಳಯುಗ್ಮವಲ್ಲದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು.

ಏಕರೇಖಾಗತ (Collinear) : ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು.

ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು (Parallel lines) : ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸದೆ ಇರುವ ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಗಳು.

ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು (Alternate angles) : ಒಂದು ಜೊತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸರಳಯುಗ್ಮವಲ್ಲದ ಒಂದು ಛೇದಕದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು.

ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು (Corresponding angles) : ಒಂದು ಜೊತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಂದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದಕೋನಗಳು.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

(1) ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳು, ರೇಖೆಗಳು, ಸಮತಲಗಳು, ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡದ ಅಂಶಗಳಾಗಿವೆ. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ರೇಖಾಗಣಿತದ ನಿಯಮಗಳಾಗಿವೆ.

(2) ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 5ನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

"ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಆ ರೇಖೆಯ ಹೊರಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ" ಎಂಬುದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 5ನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಂತಹದ್ದಾಗಿದೆ. ಇದೊಂದು ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದರಿಂದ ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ನೇತರ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

3. i) 60° ii) 18° iii) 135° iv) 90° v) 30° vi) 65°

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1. $\angle DML = 45^\circ$, $\angle BLQ = 45^\circ$, $\angle MLB = 135^\circ$,
   $\angle CMP = 45^\circ$, $\angle CML = 135^\circ$, $\angle MLA = 45^\circ$,
   $\angle QLA = 135^\circ$,

2. 40°

ಘಟಕ – 4
ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ನೀವು ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ :

* ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ತೆಗೆದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು.
* ಪದಗಳನ್ನು ಗುಂಪು ಮಾಡಿ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು.
* ಎರಡು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನ.
* ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ.
* ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವರ್ಗತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ.

ಪೀಠಿಕೆ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು (ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಅಥವಾ ಚರಾಕ್ಷರ) **ಅಪವರ್ತನ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : (1) $7xy$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳು $7, x, y, 7x, 7y, xy$ ಮತ್ತು $7xy$.

(2) $x^2 + 5x + 6$ ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು $(x + 3)$ ಮತ್ತು $(x+ 2)$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದನ್ನು ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ ಇದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಗೆ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ, ಇದೇ ರೀತಿ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಸೂಚನೆ : (1) ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳು. ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಒಂದು ಹೊಸ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗುವಂತೆ ಸರಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತೇವೆ.

(2) '1' ನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಬಳಸಬಹುದು. $(x + 5) = 1 \times (x + 5)$. ಆದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಶೇಷತೆಯಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಇಂತಹ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳು.

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ತಿಳಿಯೋಣ.

1. ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ :–

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾ 1 : $5x^2 - 10x$

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $5x^2$ ಮತ್ತು $10x$ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ $5x$ಆಗಿದೆ. ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ $5x$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ $5x^2 - 10x = (5x)(x) - (5x)(2) = 5x(x - 2)$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ 2 : $4a + 12b = 4(a + 3b)$

ಉದಾ 3 : $3x^2y - 6xy^2 + 9xy = 3xy\,(x - 2y + 3)$

ಉದಾ 4 : $a^3 - a^2 + a = a(a^2 - a + 1)$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮ.ಸಾ.ಅ ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ.

2. ಗುಂಪು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ :–

ಇಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ–1 : ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇರುವಂತೆ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು.

ಹಂತ–2 : ಪ್ರತಿ ಗುಂಪನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು.

ಹಂತ–3 : ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ತೆಗೆಯುವುದು.

ಉದಾ 5 : ಅಪವರ್ತಿಸಿ : $ax - bx + ay - by$

ಪರಿಹಾರ : $(ax - bx) + (ay - by)$ ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ

$= x(a - b) + y(a - b)$

$= (a - b)\,(x + y)$

ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಡಬಹುದು.

$$\begin{aligned} ax - bx + ay - by &= (ax + ay) - (bx + by) \\ &= a(x + y) - b(x + y) \\ &= (a - b)\,(x + y) \end{aligned}$$

ಉದಾ 6 : $y^3 - 3y^2 + 2y - 6 - xy + 3x$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ ಗುಂಪು ಮಾಡುವುದರಿಂದ

$(y^3 - 3y^2) + (2y - 6) - (xy - 3x)$

$= y^2(y - 3) + 2(y - 3) - x(y - 3)$

$= (y - 3)\ (y^2 + 2 - x)$

3. ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ :–

ಎಲ್ಲಾ a ಮತ್ತು b ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನಾಗಿ ಬರೆದು ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ 7 : ಅಪವರ್ತಿಸಿ : $36a^2 - 49b^2$

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $36a^2 = (6a)^2$ ಮತ್ತು $49b^2 = (7b)^2$

$$36a^2 - 49b^2 = (6a)^2 - (7b)^2$$
$$= (6a + 7b)\ (6a - 7b)$$

ಉದಾ 8 : $\frac{x^2}{y^2} - \frac{9}{16}$

ಪರಿಹಾರ : $$\frac{x^2}{y^2} - \frac{9}{16} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{3}{4}\right)$$

ಉದಾ 9 : ಲೆಕ್ಕಿಸಿ : $(4.5)^2 - (1.5)^2$

ಪರಿಹಾರ : $(4.5)^2 - (1.5)^2 = (4.5 + 1.5) \times (4.5 - 1.5)$

$$= (6)\ (3)$$
$$= 18$$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ :

(i) $x^2 + xy$; (ii) $3x^2 - 6x$;

(iii) $(1.6)a^2 - (0.8)a$; (iv) $5 - 10m - 20n$

2. ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

(i) $a^2 + ax + ab + bx$; (ii) $3ac + 7bc - 3ad - 7bd$;

(iii) $3xy - 6zy - 3xt + 6zt$; (iv) $y^3 - 3y^2 + 2y - 6 - xy + 3x$.

3. ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

(i) $4a^2 - 25$ (ii) $x^2 - \frac{9}{16}$

(iii) $x^4 - y^4$ (iv) $\left(7\frac{3}{10}\right)^2 - \left(2\frac{1}{10}\right)^2$

(v) $(0.7)^2 - (0.3)^2$ (vi) $(5a - 2b)^2 - (2a - b)^2$

ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನ

$(x + a)(x + b)$ ರೂಪದ ಎರಡು ದ್ವಿಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

ಆದ್ದರಿಂದ $x^2 + (a + b)x + ab$ ರೂಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು $(x + a)$ ಮತ್ತು $(x + b)$ ಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಇದನ್ನು $x^2 + mx + n$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ m, n ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $m = (a + b)$ ಮತ್ತು $n = a \times b$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಬೇಕಾಗಿರುತ್ತವೆ. ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕಲಿಯೋಣ.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಹೇಳಿಕೆಯು ತೀರ್ಮಾನ (ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ)ಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ನಿಬಂಧನೆ (ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು)ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೆ ಹೇಳಿಕೆಯು ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ (ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ

ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ) ಬರಲು ಸಾಕಾಗುವ ನಿಬಂಧನೆ (ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಹಾಗು ಸಾಕಾಗುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು [Necessary and sufficient condition] ಜೊತೆಯಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬೇಕು.

$a + b$ ಮತ್ತು ab ಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ. 6, 5 ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು; $5 = 3 + 2$ ಮತ್ತು $6 = 3 \times 2$; 3 ಮತ್ತು 2 ಕೂಡ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ a ಮತ್ತು b ಋಣ ಆದಾಗ $a + b$ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ab ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. 21 ಮತ್ತು –10 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ $-10 = (-7) + (-3)$ ಮತ್ತು $21 = (-7)(-3)$ ಇರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ 7ನ್ನು 7 ಮತ್ತು – 7ರ **ನಿರಪೇಕ್ಷ** ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಯ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯನ್ನು $a > 0$ ಅದಾಗ $|a| = a$, $a < 0$ ಅದಾಗ $|a| = -a$, ಮತ್ತು $a = 0$ ಆದಾಗ $|a| = 0$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: $-8 < -6$ ಆದರೆ $|-8| = 8 > 6 = |-6|$.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $a + b$ ಯು ಧನ ಮತ್ತು ab ಯು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, a ಮತ್ತು b ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಧನ ಮತ್ತೊಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು; ಅಲ್ಲದೆ a ಧನಸಂಖ್ಯೆ, b ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಯಾಗಿದ್ದರೆ $|a| > |b|$ ಇರಬೇಕು; a ಋಣ ಮತ್ತು b ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $|a| < |b|$ ಇರಬೇಕು.

ಉದಾ : $a + b = 7$ ಮತ್ತು $ab = -18$ ಇದ್ದರೆ, $a = 9$ ಮತ್ತು $b = -2$ ಅಥವಾ $a = -2$ ಮತ್ತು $b = 9$ ಇರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿರಪೇಕ್ಷಬೆಲೆಯು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಅರ್ಥ: $a + b$ ಮತ್ತು ab ಗಳೆರಡೂ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬೇಕಿದ್ದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಋಣ ಮತ್ತೊಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು; $a > 0$, $b < 0$ ಇದ್ದಾಗ $|a| < |b|$ ಇರಬೇಕು; $a < 0$, $b > 0$ ಇದ್ದಾಗ, $|a| > |b|$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ವಭಾವದ ಬಗ್ಗೆ ಏನನ್ನೂ ತಿಳಿಸಿಲ್ಲ. ಅವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $a + b = -12$ ಮತ್ತು $ab = -28$ ಇದ್ದಾಗ $a = -14$ ಮತ್ತು $b = 2$ ಅಥವಾ $a = 2$ ಮತ್ತು $b = -14$ ಇರುವುದು.

ಉದಾ 10 : ಅಪವರ್ತಿಸಿ : $6x^2 + 11x + 3$.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದ ಬಿಡಿಸಿ ಗುಂಪು ಮಾಡುವ ವಿಧಾನದಿಂದ

$6x^2 + 11x + 3 = 6x^2 + 9x + 2x + 3 = (6x^2 + 9x) + (2x + 3)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$= 3x(2x + 3) + 1(2x + 3)$$

$$= (3x + 1)(2x + 3)$$

$6x^2 + 11x + 3 = (ax + b)(cx + d)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಮಧ್ಯಪದ ಬಿಡಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಲಭಾಗ ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

ಅಂದರೆ, $6x^2 + 11x + 3 = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಜೊತೆ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ

$ac = 6$, $ad + bc = 11$, $bd = 3$ ಆಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $abcd = 18$ ಅಥವಾ $(ad)(bc) = 18$ ಮತ್ತು $ad + bc = 11$ ಆಗುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧ 18 ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ 11 ಇರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $ad = 9$, $bc = 2$ ಅಥವಾ $ad = 2$, $bc = 9$ ಆಗುವಂತೆ ಮಧ್ಯಪದ ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$6x^2 + 11x + 3 = (6x^2 + 2x) + (9x + 3)$$

$$= 2x(3x + 1) + 3(3x + 1)$$

$$= (2x + 3)(3x + 1)$$

ಇದು ಮೂಲ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ನಿಯಮ : $x^2 + px + q$ ರೂಪದ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಬೇಕಾದರೆ, $a.b = q$ & $a + b = p$ ಆಗಿರುವಂತೆ a & b ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ : $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$

ಘಾತ ಎರಡಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿಯು, ಆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಘಾತ ಒಂದು ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಘಾತ ಎರಡಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ರಚನೆ ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಉದಾ 11 : ಅಪವರ್ತಿಸಿ : $x^2 - 9x + 20$

$a \times b = 1 \times 20$ (x^2 ನ ಸಹಗುಣಕ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ) ಮತ್ತು $a + b = -9$ ಇರುವಂತೆ a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = 20 ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ = -9 ಆಗುವುದರಿಂದ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಋಣ ಇರಬೇಕು. ಹಾಗಾಗಿ $a = -5$, $b = -4$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$x^2 - 9x + 20 = (x^2 - 5x) + (-4x + 20)$$

$$= x(x - 5) - 4(x - 5)$$

$$= (x - 4)(x - 5)$$

ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು :

$a^2 + 2ab + b^2$ ಅಥವಾ $a^2 - 2ab + b^2$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದು **ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾ : $x^2 + 2x + 1$.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$ ಅಥವಾ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾ 12 : ಅಪವರ್ತಿಸಿ : $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2\ (2x)(3y) + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$

ಆದ್ದರಿಂದ $(2x + 3y)$ ಮತ್ತು $(2x + 3y)$ ಎರಡು ಸಮ ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ 1 : $x^2 - 6xy + 36y^2$ ಒಂದು ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯೆ?

$x^2 - 6xy + 36y^2 = (x^2) - (x)(6y) + (6y)^2$

ಇದು $a^2 - 2ab + b^2$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. $x^2 - 6xy + 36y^2$ ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಯೋಚಿಸಿ!
$x^2 + 1$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಮೊತ್ತ '0' ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 1 ಆಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧ pq ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ p + q ಕೊಟ್ಟಿದೆ. p ಮತ್ತು q ಗಳ ಬೆಲೆ ನಿರ್ಧರಿಸಿ:–

   (*i*) $pq = 18$ ಮತ್ತು $p + q = 11$

   (*ii*) $pq = 32$ ಮತ್ತು $p + q = -12$

   (*iii*) $pq = -24$ ಮತ್ತು $p + q = 2$

   (*iv*) $pq = -12$ ಮತ್ತು $p + q = +11$

   (*v*) $pq = -6$ ಮತ್ತು $p + q = -5$

   (*vi*) $pq = -44$ ಮತ್ತು $p + q = -7$.

2. ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

   (*i*) $x^2 + 6x + 8$ (*ii*) $x^2 + 4x + 3$

   (*iii*) $a^2 + 5a + 6$ (*iv*) $a^2 - 5a + 6$

   (*v*) $a^2 - 3a - 40$ (*vi*) $x^2 - x - 72$

3. ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

   (*i*) $x^2 + 14x + 49$ (*ii*) $4x^2 + 4x + 1$

(*iii*) $a^2 - 10a + 25$ (*iv*) $2x^2 - 24x + 72$

(*v*) $p^2 - 24p + 144$ (*vi*) $x^3 - 12x^2 + 36x$

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ : ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಪ್ರತಿ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಪವರ್ತನವು (ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಚರಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಎರಡೂ)ಎಲ್ಲಾ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ : ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

* ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆ.
* ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಗುಂಪು ಮಾಡುವಿಕೆಯಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ಪದಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. (i) $x(x+y)$ (ii) $3x(x-2)$

   (iii) $0.8a\,(2a-1)$ (iv) $5(1-2m-4n)$.

2. (i) $(a+x)\,(a+b)$ (ii) $(3a+7b)\,(c-d)$

   (iii) $(x-2z)(3y-3t)$ (iv) $(y-3)\,(y^2+2-x)$

3. (i) $(2a+5)\,(2a-5)$ (ii) $\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

   (iii) $(x^2+y^2)\,(x+y)\,(x-y)$ (iv) $\frac{1222}{25}$

   (v) 0.4 (vi) $(7a-3b)(3a-b)$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. (i) $p = 9, q = 2$ (ii) $p = -8, q = -4$

   (iii) $p = 6, q = -4$ (iv) $p = 12, q = -1$

   (v) $p = -6, q = 1$ (vi) $p = -11, q = 4$

2. (i) $(x+4)(x+2)$ (ii) $(x+3)(x+1)$

   (iii) $(a+3)(a+2)$ (iv) $(a-3)(a-2)$

   (v) $(a-8)(a+5)$ (vi) $(x-9)(x+8)$

3. (i) $(x+7)(x+7)$ (ii) $(2x+1)(2x+1)$

   (iii) $(a-5)(a-5)$ (iv) $2(x-6)(x-6)$

   (v) $(p-12)(p-12)$ (vi) $x(x-6)(x-6)$

ಘಟಕ – 5
ವರ್ಗ, ವರ್ಗಮೂಲಗಳು, ಘನ, ಮತ್ತು ಘನ ಮೂಲಗಳು

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ನೀವು ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ :

- ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅರ್ಥ.
- ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು.
- ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ಮತ್ತು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು.
- ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳು.
- ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕೆಲವು ವಿಧಾನಗಳು.
- ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

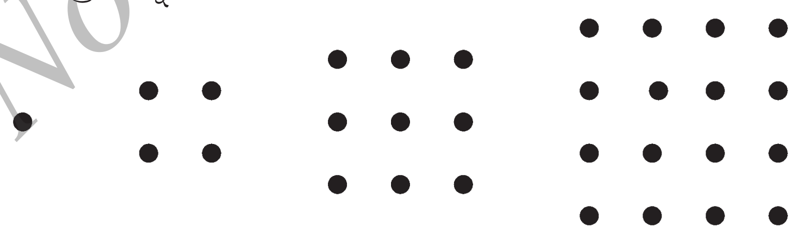
ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

1, 4, 9, 16, 25 ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ರೂಪವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವಿರಿ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ $4 = 2 \times 2$, $25 = 5 \times 5$. ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಸಮವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

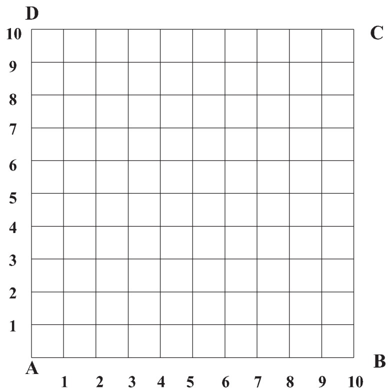
ಇದೇ ರೀತಿ $8 = 2 \times 2 \times 2$, $64 = 4 \times 4 \times 4$. ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂರು ಸಮವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿಶೇಷವಾದ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನೂ ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ: ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಸಮವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಥವಾ ಮೂರು ಸಮವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದರೆ, ಆ ಸಮವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಪ್ರತಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಚುಕ್ಕೆಗಳಿವೆ? ಅವುಗಳನ್ನು 1, 4, 9, 16 ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸುವಿರಿ.



10 ಮೂಲಮಾನದ ಒಂದು ವರ್ಗ ABCD ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ವರ್ಗವನ್ನು, ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಮಾನದ ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ. ಒಂದು ಮಾನದ 100 ವರ್ಗಗಳಿರುವುದನ್ನು ಎಣಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 :

ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 8, 12, 15 ಮಾನಗಳಿರುವಂತೆ ಇದೇ ರೀತಿ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ.

a ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $b = a \times a$ ಆದರೆ, b ಯನ್ನು ಒಂದು **ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.**

$1 = 1 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$, $100 = 10 \times 10$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹೀಗಾಗಿ, 1, 4, 9, 16, 100 ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳು. $0 = 0 \times 0$, ಆದುದರಿಂದ, 0 ಯನ್ನೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

a ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, $a \times a = a^2$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. (ಇದನ್ನು a ನ **ವರ್ಗ,** ಅಥವಾ a**–ಸ್ಕ್ವೇರ್** ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.) ಹೀಗೆ, $36 = 6^2$, $81 = 9^2$. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವು m^2 ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು m ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚಿನದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $4 = 2 \times 2$ ಮತ್ತು $4 = (-2) \times (-2)$; ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ, ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿದ್ದರೂ, ಅವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾದುದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಈ ಗುಣವು ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿನ ಭಾಗವೇ ಆಗಿದೆ: ಎರಡು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ, ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m ಗೆ, $m^2 = m \times m = (-m) \times (-m)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ವಭಾವದ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲ ಅಂಶಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. m ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $m^2 = m \times m$ ಸಹ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ ಗುಣದಿಂದ) ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ m^2 ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ. $m = 0$ ಆದರೆ, $m^2 = 0 \times 0 = 0$. m ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, ಆಗ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, $m = -n$. ಹೀಗಾಗಿ, $m^2 = (-n) \times (-n) = n^2$, ಪುನಃ ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಹೀಗೆ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವು 0 ಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಇಲ್ಲವೆ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ.

$1 = 1^2$ ಮತ್ತು $4 = 2^2$, ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. 2 ಮತ್ತು 3 ಇವುಗಳನ್ನೂ ಎರಡು ಸಮವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೇ? ನಿಮ್ಮ ಸಹಜಜ್ಞಾನ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದೇ? m ಮತ್ತು n ಗಳು $m < n$ ಇರುವಂತೆ, ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $m^2 < n^2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬಹುದು (ಏಕೆ?).

ಒಂದು ವೇಳೆ, 2 ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆಗ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, $2 = n^2$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆಗ, $1 < 2 < 4$, $1 = 1^2 < n^2 < 2^2 = 4$ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದು $1 < n < 2$ ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ (ಏಕೆ?). ಹೀಗೆ n ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ, 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಒಂದು ದತ್ತ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ k ಗೆ, k ಮತ್ತು ಅದರ ತಕ್ಷಣದ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ $k + 1$ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಹೀಗೆ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ 2 ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ, 3 ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲದಿರುವುದಕ್ಕೆ ನೀವು ಕಾರಣವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m ಗೆ, m^2 ಮತ್ತು $(m + 1)^2$ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಅನ್ವಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

a	1	2	3	8	–7	–12	20	–15
a^2	1	4	9	64	49	144	400	225

2, 8, –12, 20 ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳೆಲ್ಲವು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು 1, 3, –7, –15 ರ ವರ್ಗಗಳೆಲ್ಲವೂ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಾ? ಇದರಿಂದ ನಿಮಗೆ ಏನು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ?

ಹೇಳಿಕೆ 1. ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಕಠಿಣವೇನಲ್ಲ. m ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ಗೆ $m = 2n$ ಮತ್ತು $m^2 = (2n) \times (2n) = 4n^2$ ಕೂಡ ಒಂದು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. m ಒಂದು ಬೆಸ

ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ k ಗೆ $m = 2k + 1$, ಹೀಗಾಗಿ $m^2 = (2k + 1)(2k + 1)$

$= [(2k + 1) \times (2k)] + (2k + 1) \times 1$ (ವಿತರಣಾ ಗುಣ)

$= (2k) \times (2k) + (1 \times 2k) + (2k \times 1) + (1 \times 1)$ (ವಿತರಣಾ ಗುಣ)

$= 4k^2 + 4k + 1$. ಇದೂ ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ.

1^2	$= 1$
2^2	$= 4$
3^2	$= 9$
4^2	$= 16$
5^2	$= 25$
6^2	$= 36$
7^2	$= 49$
8^2	$= 64$
9^2	$= 81$
10^2	$= 100$

ಪಕ್ಕದ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಅವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0 ಆಗಿವೆ. ಹೀಗೆ, ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳು 0, 1, 4, 5, 6, 9. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಅದರ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ (ನಿಮ್ಮ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಿ) 0, 1, 4, 5, 6, 9 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗದ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2, 3, 7, 8 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದೇ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಾ?. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಔಪಚಾರಿಕ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು.

ಹೇಳಿಕೆ 2. ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವು ಯಾವಾಗಲೂ 0, 1, 4, 5, 6, 9 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂಕಿಯಿಂದ ಪೂರ್ಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯು 2, 3, 7 ಅಥವಾ 8 ಆದರೆ ಅದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಯೋಚಿಸಿ! ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು 0, 1, 4, 5, 6 ಅಥವಾ 9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಂಡರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು *ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದೇನಿಲ್ಲ.*

ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಒಂದು ನಿಬಂಧನೆಯೆಂದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 0, 1, 4, 5, 6 ಅಥವಾ 9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕು, ಆದರೆ ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಇದಿಷ್ಟೇ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. ಇವುಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ:

   (i) 4 ರ ವರ್ಗ 16 (ii) 8 ರ ವರ್ಗ 64 (iii) 15 ರ ವರ್ಗ 225

2. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

   1, 2, 3, 8, 36, 49, 65, 67, 71, 81, 169, 625, 125, 900, 1000, 100000.

3. 1 ರಿಂದ 500 ರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿರಿ.

4. 0, 1, 4, 5, 6, 9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ 3–ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಾರದು.

5. 100 ರಿಂದ 400 ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 0, 1, 4, 5, 6 ಅಥವಾ 9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳು

ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಲವು ಉತ್ತಮ ಗುಣಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

a) **ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:**

a	4	10	20	25	100	300	1000
a^2	16	100	400	625	10000	90000	1000000
a^2 ನ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸೊನ್ನೆಗಳು	0	2	2	0	4	4	6

ಇದರಲ್ಲಿ ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿನ ಸೊನ್ನೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಅದು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬಹುದು, ಆದರೂ ಅದು ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯೆ). ಮುಂದುವರಿದು, ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆಯೋ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಎರಡರಷ್ಟು ಸೊನ್ನೆಗಳು ಅದರ ವರ್ಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಹೇಳಿಕೆ 3. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು k ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದರ ವರ್ಗವು 2k ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದ ಕೊನೆಗೊಂಡರೆ ಅದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿರಲಾರದು. ಇದು ನಮಗೆ, ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊರಗಿಡಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

b) **ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:**

a	a^2	3 ರಿಂದ a^2ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ	4 ರಿಂದ a^2ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ
1	1	1	1
2	4	1	0
3	9	0	1
5	25	1	1
8	64	1	0
11	121	1	1
–6	36	0	0

ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷವು 0 ಅಥವಾ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಾ? ಅದೇ ರೀತಿ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷವು 0 ಅಥವಾ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ 0, 1 ಮತ್ತು 2. ಆದರೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಶೇಷವು 0 ಅಥವಾ 1, ಹೊರತು 2 ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ. ಇದೇ ರೀತಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ 0, 1, 2 ಮತ್ತು 3. ಆದರೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಶೇಷವು 0 ಅಥವಾ 1 ಹೊರತು 2 ಮತ್ತು 3 ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ.

ಹೇಳಿಕೆ 4. ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು 0 ಅಥವಾ 1, ಹೊರತು 2 ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ. ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು 0 ಅಥವಾ 1, ಹೊರತು 2 ಮತ್ತು 3 ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ.

ಯೋಚಿಸಿ ! ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು 0 ಅಥವಾ 1 ಅಥವಾ 4, ಹೊರತು 2, 3, 5, 6, 7 ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ.

ಚಟುವಟಿಕೆ : 2

ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿರಿ. ಅದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಆಗುವುದೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದನ್ನೇ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದನ್ನೇ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿ. ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು 0 ಆದರೆ, ಏನನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

$(1 \times 2 \times 3 \times 4) + 1 = 24 + 1 = 25 = 5^2$;

$(8 \times 9 \times 10 \times 11) + 1 = 7920 + 1 = 7921 = 89^2$.

ಹೇಳಿಕೆ 5. ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ, ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

c) ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

$$1 = 1 = 1^2,$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2.$$

ಇದೇ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸುತ್ತುಗಳು, ಹಿಂದಿನ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಮುಂದಿನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡುತ್ತಾ ಮುಂದುವರೆಸಿ, ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 4^2; ಮೊದಲ ಐದು ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 5^2. ಇದನ್ನು ಮೊದಲ 8 ಮತ್ತು 12 ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ಹೊಸ ಹೇಳಿಕೆಯೊಂದನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದೆ?

ಹೇಳಿಕೆ 6. ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು n^2 ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3

11, 101, 1001, 10001 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿರಿ. ಇದನ್ನೇ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಮುಂದುವರೆಸಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $11^2 = 121$

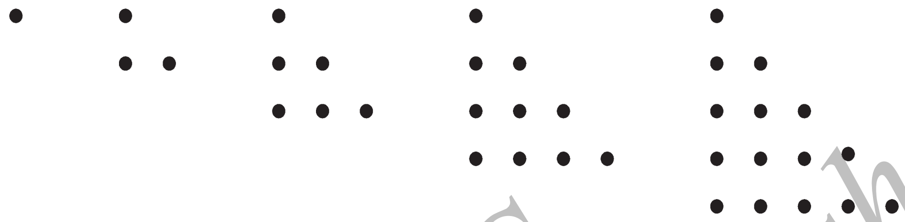
$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ವರ್ಗದ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 2 ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ; 2 ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳು 0 ಆಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಗಳು 1 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. 2 ರ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿನ 0 ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಹೇಳಿಕೆ 7. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ N = 1000 . . .01 ನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗಳು k ಬಾರಿ ಇರುವಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಿ. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, k = 6 ಆದರೆ, N = 10000001 ದೊರೆಯುತ್ತದೆ; ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ 6 ಸೊನ್ನೆಗಳಿವೆ) ಆಗ N^2 = 1000 . . .02000 . . .01, ಇಲ್ಲಿ 2 ರ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿನ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ k ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

f) **ಈ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :**



ಈ ರೀತಿಯ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಮೂಡಿಸಲು, 1 ನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 1, 2 ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 2, 3 ನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 3 ಹೀಗೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನಿಡಿ. ಈಗ ಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಆಯೋಜಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಣಿಸಿ. (ಒಂದು ಚುಕ್ಕಿ ಇರುವುದನ್ನು ಕ್ಷೀಣವಾದ ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.) ಅವುಗಳು 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 ಇತ್ಯಾದಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು **ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. (ಕಾರಣ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.) ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೇಗೆ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು. n–ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ, n ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡ ಸಾಲು ಅದೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸೂಚ್ಯಂಕದಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. 8 ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, 8ನೇ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 ಆಗಿರಬೇಕು.

ಮೊದಲ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲಿವೆ:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $10 + 15 = 25 = 5^2$; $28 + 36 = 64 = 8^2$; $55 + 66 = 121 = 11^2$; $36 + 45 = 81 = 9^2$. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಬಹುದು. 7ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 28 ಮತ್ತು 8 ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 36; ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವು $64 = 8^2$. ಅದೇ ರೀತಿ, 11 ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ 66 ಮತ್ತು 12 ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ 78; ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವು $144 = 12^2$. ಈ ಗುಣವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಹೇಳಿಕೆ 8. n ನೇ ಮತ್ತು $(n + 1)$ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n + 1)^2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. 1 + 3 + 5 + ... + 51 (1 ರಿಂದ 51 ರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ) ಕೂಡದೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. 144 ನ್ನು 12 ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.
3. 14 ಮತ್ತು 15 ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 8 ನೇ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
4. ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷಗಳೇನು?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳು

ಬಹಳಷ್ಟು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ನೈಜವಾಗಿ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೆ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. 42^2 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. $42^2 = (40 + 2)^2$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, $42^2 = (40 + 2)(40 + 2)$

$= 40^2 + (40 \times 2) + (2 \times 40) + 2^2$

$= 40^2 + (2 \times 40 \times 2) + 2^2$.

ಇಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿತರಣಾ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ $40^2 = 1600$; $4 \times 40 = 160$ ಮತ್ತು $2^2 = 4$. ಆದ್ದರಿಂದ, $42^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$. ($40^2$, $2 \times 40 \times 2$ ಮತ್ತು 2^2 ನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೂಡಿ.)

> **ಗಮನಿಸಿ.** ಈ ಕ್ರಮದ ಮೂಲ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ಸೂತ್ರ, ಇದನ್ನು ನೀವು ಮುಂದೆ ಅಭ್ಯಸಿಸುವಿರಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 4 :
ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು 89, 68, 96 ಇವುಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಸುಲಭ ಕ್ರಮವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 35^2 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿ 5ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. 25 ($= 5^2$) ನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆಯಿರಿ. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು, ಉಳಿದ ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, (ಇಲ್ಲಿ ಅದು 3.) 3 ಮತ್ತು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ; $3 \times 4 = 12$. 12 ನ್ನು 25 ರ ಹಿಂದೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಆಗ 1225 ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ $35^2 = 1225$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ, 105^2 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಯನ್ನು ತೆಗೆದ ನಂತರ ಉಳಿದ ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ಮತ್ತು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 11. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $10 \times 11 = 110$. ಈಗ ನೀವು $105^2 = 11025$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ಹೇಳಿಕೆ 9. $n = \overline{a_1a_2\cdots a_k5}$ (ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 10ರಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವುದು) ಆದರೆ, n^2, 25ರ ಹಿಂದೆ $(\overline{a_1a_2\cdots a_k}) \times (\overline{a_1a_2\cdots a_k}+1)$ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   i) 31 ii) 72 iii) 37 iv) 166

2. ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   i) 85 ii) 115 iii) 165

3. 1468ರ ವರ್ಗವನ್ನು 1465 + 3 ಎಂದು ಬರೆದುಕೊಂಡು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಮೂಲಗಳು

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ವರ್ಗ ABCD ಯ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು l ಆದರೆ, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು l^2 ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಹಿಮ್ಮುಖಗೊಳಿಸಬಹುದೆ? ಅಂದರೆ ಒಂದು ವರ್ಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅದರ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಒಂದು ವರ್ಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 16 cm^2 ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $l^2 = 16 = 4^2$ ಎಂದು ಬರೆದು, $l = 4$ cm ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು ನಾವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು ಹಿಮ್ಮುಖವಾಗಿ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರಲ್ಲವೆ?

N ನ್ನು ಪುನಃ ಈ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಪರಿಗಣಿಸಿ $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $49 = 7^2$, $81 = 9^2$, $196 = 14^2$ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ 1 ನ್ನು 1 ರ ವರ್ಗ ಮೂಲ; 2 ನ್ನು 4 ರ ವರ್ಗ ಮೂಲ; 7 ನ್ನು 49 ರ ವರ್ಗಮೂಲ ಇತ್ಯಾದಿ ಆಗಿ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

N ನ್ನು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, $N = m^2$ ಆಗುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ m, ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು N ನ ವರ್ಗಮೂಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಹಿಂದೆ, $m^2 = m \times m = (-m) \times (-m)$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ m^2 ಎರಡು ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ: m ಮತ್ತು $-m$. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು? ಉದಾಹರಣೆಗೆ $16^2 = 4^2 = (-4)^2$. ಹೀಗೆ 4 ಮತ್ತು -4 ಎರಡೂ 16 ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು.

ಇವುಗಳನ್ನು ಯಾವ ಒಂದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದರ ಸ್ಪಷ್ಟತೆಯಿಲ್ಲ. ಬಹಳಷ್ಟು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಭೌತ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ, ಒಂದು ವರ್ಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 16 ಮಾನಗಳಾದರೆ, ಅದರ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು 4 ಮಾನಗಳು. (–4 ಉದ್ದವಲ್ಲ, ಹಾಗಾಗಿ ಅದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗದು). ಅದರೂ, ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ 4 ಮತ್ತು –4 ಎರಡನ್ನೂ 16ರ ವರ್ಗಮೂಲವಾಗಿ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದ ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು.

ವರ್ಗಮೂಲ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಬಳಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ, ಅದನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲ ಎಂದೇ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. N ನ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು $\sqrt{N}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 5 :

ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಖಾಲಿ ಇರುವ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

$1^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$

$2^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$

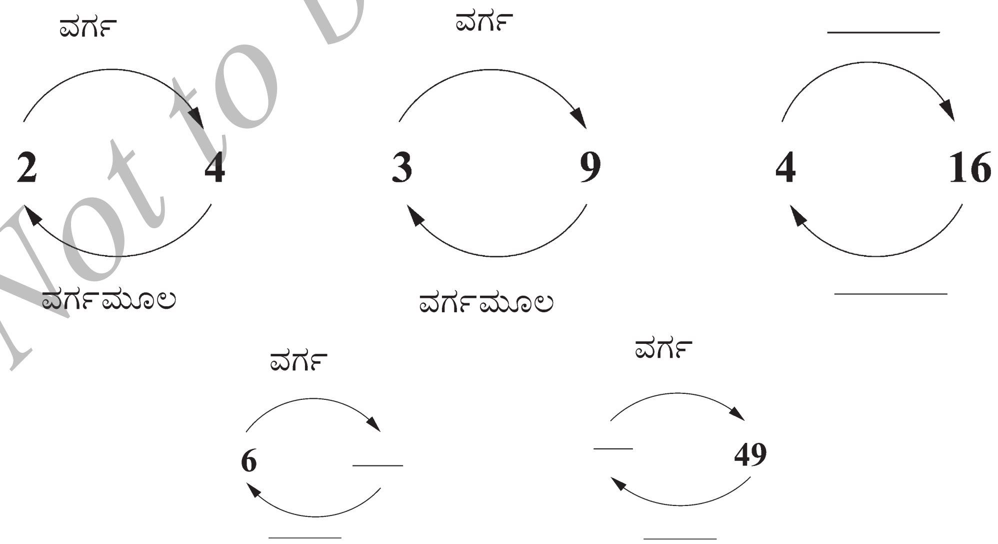
$5^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$

$11^2 = 121 \Rightarrow$ _ _ _ _ $= 11$

--- $= 225 \Rightarrow$ _ _ _ _ $= 15$

ಚಟುವಟಿಕೆ 6 :

ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಖಾಲಿ ಇರುವ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಪದ ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.



ಈಗಾಗಲೇ, ನಾವು ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗಮೂಲವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ವರ್ಗಮೂಲ ಎಂಬುದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಅಥವಾ ಬಹುಶಃ 0 (ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿದೆ) ಗೆ ಮಾತ್ರ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಪವರ್ತನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗದ ವರ್ಗಮೂಲ

$3 = \sqrt{9}$ ಮತ್ತು $4 = \sqrt{16}$. ಆದರೂ, $9 = 3 \times 3$ ಮತ್ತು $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 4$ ಹೀಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬರೆದು, ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸಿ, ಎರಡು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಇದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪೂರ್ಣವರ್ಗದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: 5929ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇದನ್ನು ನಾವು ಕೆಲವು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1. 5929 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5929 \\ \hline 7 & 847 \\ \hline 11 & 121 \\ \hline & 11 \end{array}$$

ಹೀಗೆ, $5929 = 7 \times 7 \times 11 \times 11$

ಹಂತ 2. ಈ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿ,

$5929 = (7 \times 11)\ (7 \times 11) = 77 \times 77$ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 3. $5929 = 77 \times 77$, ಎರಡು ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಆದುದರಿಂದ, $\sqrt{5929} = 77$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: 6724 ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: 6724 ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ 2 ರ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ $6724 = 2 \times 3362$. ಪುನಃ 3362 ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ, ಹೀಗಾಗಿ, $3362 = 2 \times 1681$. ಈಗ 1681 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸುಲಭ ವಿಧಾನವಿಲ್ಲ. 1681 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದೆ ಎಂಬುದನ್ನು 3 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಬೇಕು. ಇದು 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ, ಆದರೆ ಇದು 41 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $1681 = 41 \times 41$.

ಹೀಗೆ $6724 = 2 \times 2 \times 41 \times 41 = (2 \times 41) \times (2 \times 41) = 82 \times 82$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ, $\sqrt{6724} = 82$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸುಲಭ ಪದ್ಧತಿ ಇಲ್ಲ. ಕೆಲವು ಕ್ರಮವಿಧಿ (algorithm)ಗಳಿದ್ದು, ಇವುಗಳನ್ನು ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೀಗಾದರೂ, ಈ ಕ್ರಮವಿಧಿಗಳು ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಮಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸುಲಭ ಮಾರ್ಗವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು, ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಹಣಕಾಸಿನ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಸುರಕ್ಷತಾ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಲು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇಕೆ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಲ್ಲ?

ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 1296 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅದನ್ನು $1296 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಇದು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 2 ಮತ್ತು 3 ನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ 2 ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಮತ್ತು 3 ಸಹ ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಬಂದಿದೆ.

ಇದು 1296 ನ್ನು $1296 = (2 \times 2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3 \times 3) = 36 \times 36$ ಎಂದು ಎರಡು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ, $\sqrt{1296} = 36$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಯಶಸ್ಸು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು, ಎರಡು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲೇ ಬರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 7 :

1000 ಮತ್ತು 1500ರ ಒಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಿ. ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲೇ ಬರುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಈಗ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗದಿರಲು ಕಾರಣವೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬರದಿರಬಹುದು. ಆಗ, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ, ಬರೆಯಲು ಯಾವ ಮಾರ್ಗವೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 48ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ 2 ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ, ಆದರೆ 3 ಒಂದು ಬಾರಿ ಮಾತ್ರ ಬಂದಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಜೋಡಣೆಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದರೆ, 48 ನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ,

$48 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3) = 12 \times 12$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

48 ನ್ನು $3 \times 2 \times 2$ ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ,

$48 \times 12 = (2 \times 2 \times 3 \times 2) \times (2 \times 2 \times 3 \times 2) = 24 \times 24$ ನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು, ಇದೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಅಂಶವೆಂದರೆ, 48 ನ್ನು $3k^2$ ನಿಂದ, (ಇಲ್ಲಿ k ಯಾವುದೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಗುಣಿಸಿ, ಈ ಹಿಂದಿನಂತೆ $48 \times 3k^2 = (12k) \times (12k)$ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ 3, 48 ನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಅತಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: 9408 ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಕೊಡುವ ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: 9408 ನ್ನು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವವರೆಗೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತಾ ಮುಂದುವರೆಯಿರಿ.

$9408 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 147$.

ಈಗ $147 = 3 \times 49 = 3 \times 7 \times 7$. ಹೀಗೆ

$9408 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$

ಇಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 7 ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಂದಿವೆ, 3 ಒಮ್ಮೆ ಮಾತ್ರ ಬಂದಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ 9408 ನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. $[9408 \times 3 = (168)^2]$

ಪುನಃ $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$. 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರ ಬದಲು, 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲೂಬಹುದು.

$$\frac{48}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{3} = 4 \times 4$$

ಇದರಿಂದಲೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. 48ನ್ನು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗಲೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯಲು 336ನ್ನು ಭಾಗಿಸಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ 3 ಮತ್ತು 7 ಒಮ್ಮೆ ಬಂದಿದೆ. ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಇವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. 336ನ್ನು $3 \times 7 = 21$ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. $\frac{336}{21} = 16 = 4^2$ಆದ್ದರಿಂದ ಅಗತ್ಯವಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ 21

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) 196 ii) 256 iii) 10404 iv) 1156 v) 13225

2. ಸರಳ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:

   i) $\sqrt{100} + \sqrt{36}$ ii) $\sqrt{1360 + 9}$

   iii) $\sqrt{2704} + \sqrt{144} + \sqrt{289}$ iv) $\sqrt{225} - \sqrt{25}$

   v) $\sqrt{1764} - \sqrt{1444}$ vi) $\sqrt{169} \times \sqrt{361}$.

3. ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಯಾರ್ಡ್‌ನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 1764 m^2 ಇದೆ. ಈ ಯಾರ್ಡ್‌ನ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಿಂದ 784 m^2 ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಮತ್ತೊಂದು ವರ್ಗಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು (ಯಾರ್ಡ್‌ನ್ನು) ಸಾರ್ವಜನಿಕರ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಮೀಸಲಿರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು 5 ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರತಿ ಸಮ ಭಾಗದ ಸುತ್ತಳತೆ ಏನು?

4. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಗುಣಿಸಬೇಕಾದ ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   i) 847 ii) 450 iii) 1445 iv) 1352

5. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) 48 ii) 11280 iii) 729 iv) 1352

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು

ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ 72, ಇದರಿಂದ ಆರಂಭಿಸೋಣ. $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$, ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, 2 ಮೂರು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. 3 ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. 72ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $72 \times 2 = 144 = 12^2$ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಅಥವಾ, 72 ನ್ನು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\frac{72}{2} = 36 = 6^2$ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ 6^2 ಮತ್ತು 12^2 ನಡುವೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$ ಮತ್ತು $11^2 = 121$. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ, ಯಾವುದು 72 ಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿದೆ? $8^2 = 64 < 72 < 81 = 9^2$ ಮತ್ತು $72 - 64 = 8 < 9 = 81 - 72$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ 64, 72 ಕ್ಕೆ 81 ಕ್ಕಿಂತ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ, 72ಕ್ಕೆ 64 ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ.

ಒಂದು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪವಾದ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುತ್ತದೆ. N ಒಂದು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಅದನ್ನು ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರಿಸಬಹುದು. ಆಗ $n^2 < N < (n+1)^2$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಇರುತ್ತದೆ. (ಏಕೆ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?). n ಮತ್ತು $(n+1)$ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಒಂದು ಸಮ ಮತ್ತೊಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ N, n^2 ಮತ್ತು $(n + 1)^2$ ಗಳ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರಲಾರದು;

$N - n^2 = (n + 1)^2 - N$ ಆದರೆ, ಆಗ $2N = n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ 2N ಸಮ ಮತ್ತು $2n^2 + 2n + 1$ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹೀಗಾಗಿ n^2, N ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪವಿರುವ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ $(n + 1)^2$ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ. n^2, N ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದರೆ, n ಸರಿಸುಮಾರು $\sqrt{N}$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ; $(n + 1)^2$ N ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ್ದಾದರೆ, $(n + 1)$ ಸರಿಸುಮಾರು $\sqrt{N}$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ, N ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ (ಅಂದರೆ $\sqrt{N}$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ) $\sqrt{N}$ ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರಾದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ವರ್ಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 90 cm^2 ಆದರೆ, ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದವನ್ನು ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$A = l^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $l^2 = 90$. ಆದರೆ $81 < 90 < 100$ ಮತ್ತು 81, 90ಕ್ಕೆ, 100ಕ್ಕಿಂತ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ, $\sqrt{90}$ ಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $\sqrt{81} = 9$.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಚೌಕಾಕಾರವಿರುವ ಒಂದು ಜಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 112 m^2 ಇದೆ. ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರಾದ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚೌಕದ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದ l ಆದರೆ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ $4l$. ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $l^2 = 112$ ಆದುದರಿಂದ, $(4l)^2 = 16\ l^2 = (16) \times (112) = 1792$.

ಆದರೆ, $42^2 = 1764 < 1792 < 1849 = 43^2$ ಮತ್ತು 1764, 1849 ಕ್ಕಿಂತ 1792 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ, $\sqrt{1792}$ ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 42. ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸರಿಸುಮಾರು 42 m ಇದೆ.

ಗಮನಿಸಿ!

$\sqrt{112}$ ನ್ನು ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅದು 11 ಆಗುವುದು ಮತ್ತು ನೀವು ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಸರಿಸುಮಾರು 44 (= 4 × 11) ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಪ್ರೇರಿತರಾಗಬಹುದು. $\sqrt{112}$ ನ್ನು 11ರಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸುವುದರಿಂದ, ತಪ್ಪು ಮಾಡಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ತಪ್ಪು 4 ರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿಯೇ 112 ನ್ನು ಮೊದಲು 16 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದ್ದೇವೆ ಮತ್ತು ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅತಿ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಆಶ್ಚರ್ಯವಿಲ್ಲ. $r = \frac{1}{4}$ ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 0. ಆದರೆ 3r = $\frac{3}{4}$ ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು 1 ಹೊರತು 3 × 0 = 0 ಅಲ್ಲ.

ಈಗ ನೀವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. $\sqrt{90}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಅದನ್ನು 9 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು; $\sqrt{94}$ ಬೇಕಾದರೆ ಅದನ್ನು 10 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಎರಡರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನೈಜ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ನೀಡಲಾರವು. ಈ ಮಿತಿಗೆ ಕಾರಣವೆಂದರೆ: n ಮತ್ತು $n + 1$ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿಲ್ಲದಿರುವುದು. ಆದರೂ, ಈ ಗುಣವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನ್ವಯವಾಗದು. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲಕ್ಕೆ ಅತಿ ಸಮೀಪವಾದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಷಯವನ್ನು ಉನ್ನತ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

1. ಇವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   i) 232 ii) 600 iii) 728 iv) 824 v) 1729

2. ಒಂದು ತುಂಡು ಭೂಮಿಯು ವರ್ಗದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿದ್ದು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 1000 m^2 ಆಗಿದೆ. ಮುಳ್ಳು ತಂತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಬೇಕಾಗಿದೆ. ಮುಳ್ಳು ತಂತಿಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಲಭ್ಯವಿದೆ. ಈ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ಅಗತ್ಯವಾದ ಮುಳ್ಳು ತಂತಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

3. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು $\sqrt{961}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೇಳಲಾಯಿತು. ಅದನ್ನು ತಪ್ಪಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಿ $\sqrt{691}$ ನ್ನು ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಸರಿ ಉತ್ತರದಿಂದ ಅವನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿತ್ತು?

ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳು

ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಓದಿ:

$$1 = 1 \times 1 \times 1$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3$$
$$125 = 5 \times 5 \times 5$$

ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ಸಮವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ.

ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ N ನ್ನು, ಮೂರು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕ N ನ್ನು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. $N = m \times m \times m$ ಆದರೆ, m ನ ಘನ N ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $N = m^3$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಇದನ್ನು m ನ ಘನ ಅಥವಾ m ಘಾತ 3 ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.)

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$$(-4) \times (-4) \times (-4) = -64 = (-4)^3$$
$$(-5) \times (-5) \times (-5) = -125 = (-5)^3$$
$$(-8) \times (-8) \times (-8) = -512 = (-8)^3$$

ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿ. ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಆದರೂ, ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 7: 6 ರ ಘನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 36 \times 6 = 216$

ಉದಾಹರಣೆ 8: 20 ರ ಘನ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: $(20)^3 = 20 \times 20 \times 20 = (400) \times 20 = 8000.$

ಘನಾಕೃತಿಯ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಅದು ಸಮನಾದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಘನ. ಒಂದು ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದ 'l' ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲ $V = l^3$ ಘನ ಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಒಂದು ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದ 10 cm ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವೇನು?

ಪರಿಹಾರ: $V = 10 \times 10 \times 10 = 1000\ cm^3$

ಉದಾಹರಣೆ 10: 1 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಆದರೆ, ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ n ನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅದನ್ನು 6 ಬಾರಿ ಗುಣಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆ N ಪಡೆಯಿರಿ.

$N = n \times n \times n \times n \times n \times n$

$= (n \times n) \times (n \times n) \times (n \times n)$

$= (n^2) \times (n^2) \times (n^2) = (n^2)^3$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ N, n^2 ನ ಘನ. ಅದೇ ರೀತಿ

$N = n \times n \times n \times n \times n \times n = (n \times n \times n) \times (n \times n \times n)$

$= (n^3) \times (n^3) = (n^3)^2.$

ಇಲ್ಲಿ N ಸಹ n^3 ನ ವರ್ಗ. ಹೀಗೆ, N ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಕೂಡ. n = 2 ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$N = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$. $64 = 4^3$ ಮತ್ತು $64 = 8^2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 11: 6 ಒಂದು ಪೂರ್ಣಘನ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $1 < 6 < 8$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ , ಆದ್ದರಿಂದ $1^3 < 6 < 2^3$. 1 ಮತ್ತು 2ರ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಇರುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, 6 ನ್ನು ಮೂರು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ 6 ಒಂದು ಪೂರ್ಣಘನವಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.6

1. ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಖಾಲಿ ಇರುವ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ:

2	3	4	–5	–	8	–
$2^3 = 8$	$3^3 =$ ___	___ $= 64$	_ = _	$6^3 =$ ___	_ = _	___ $= -729$

2. ಮೊದಲ ಐದು ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಐದು ಸಮ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಬೆಸ ಘನಗಳು ಮತ್ತು ಸಮ ಘನಗಳ ಸಮತೆ ಬಗ್ಗೆ ಏನನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?
3. 1 ರಿಂದ 100 ರವರೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಘನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು? –100 ರಿಂದ 100ರವರೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಘನಗಳಿವೆ?
4. 1 ರಿಂದ 500ರವರೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳಿವೆ? ಈ ಘನಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಿವೆ?
5. 10, 30, 100, 1000 ಇವುಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿನ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಏನನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?
6. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ರ ಘನಗಳಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಳು ಯಾವುವು? ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೇಳಿದಂತೆ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣ ಘನವೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ (1887–1920) ನಿಸ್ಸಂದೇಹವಾಗಿ ಸರ್ವಕಾಲಿಕ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರು. ಅವರು ಸ್ವಯಂ ಕಲಿಕೆಯುಳ್ಳವರಾಗಿದ್ದು, ಅನನ್ಯ ಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರು. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಅವರು ಶಾಲಾ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಲಿಲ್ಲ, ಹೀಗಾಗಿ ಮದ್ರಾಸಿನ ಪೋರ್ಟ್ ಟ್ರಸ್ಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಗುಮಾಸ್ತರ ಹುದ್ದೆಗೆ ತೃಪ್ತಿ ಪಡಬೇಕಾಯಿತು. ಆದರೂ, ಅವರು ತಮ್ಮದೇ ಗಣಿತವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವುದನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಿ, ಬಹಳಷ್ಟು ತಿಳಿಯದಿದ್ದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಜಿ.ಎಚ್ ಹಾರ್ಡಿಯವರಿಗೆ ಕಳುಹಿಸಿದರು. ರಾಮಾನುಜನ್‌ರಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿದ್ದ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದ ಹಾರ್ಡಿಯವರು, ಕೇಂಬ್ರಿಡ್ಜ್‌ಗೆ ತೆರಳಲು ಅವಕಾಶ ಕಲ್ಪಿಸಿದರು.

ಔಪಚಾರಿಕ ತರಬೇತಿಯ ಕೊರತೆಯಿದ್ದ ರಾಮಾನುಜನ್‌ಗೆ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಔಪಚಾರಿಕ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸತ್ಯ ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಅವರ ಅಂತಃದೃಷ್ಟಿ ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯದಿಂದಾಗಿ, ಔಪಚಾರಿಕವಾಗಿ ಇತ್ತೀಚಿನವರೆಗೆ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದ ಅಸಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.

ರಾಮಾನುಜನ್‌ಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತ ನಂಟಿತ್ತು ಮತ್ತು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಬಗ್ಗೆ ಉತ್ಕೃಷ್ಟವಾದ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರು. ಜೆ. ಲಿಟ್ಲ್‌ವುಡ್ (ಜಿ.ಎಚ್. ಹಾರ್ಡಿಯವರ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿ) ಅವರು ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ರಾಮಾನುಜನ್‌ರ ಸ್ನೇಹಿತ ಎಂದು ಉದ್ಘೋಷಿಸಿದ್ದರು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗಿನ ಅವರ ನಂಟನ್ನು ಈ ಘಟನೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಅನಾರೋಗ್ಯ ಪೀಡಿತರಾಗಿದ್ದಾಗ, ಹಾರ್ಡಿಯವರು ರಾಮಾನುಜನ್‌ರನ್ನು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಭೇಟಿ ಮಾಡಿದರು. ತಾವು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ಕಾರಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು 1729 ಆಗಿದ್ದು ಅದೊಂದು ಜಡ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಹೇಳಿದರು. ಇದಕ್ಕೆ ಕೂಡಲೇ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಿಸಿದ ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರು, ಅದೊಂದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ, ಅದನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಎರಡು ಬಗೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದರು. $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ (ಹಾರ್ಡಿ–ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆ).

ದುರಾದೃಷ್ಟವಶಾತ್, ರಾಮಾನುಜನ್‌ರ ಆರೋಗ್ಯವು ಲಂಡನ್‌ನಲ್ಲಿ ತೀವ್ರವಾಗಿ ಕ್ಷೀಣಿಸಿತ್ತು. ಅಪರಿಚಿತ ವಾತಾವರಣ, ಆಹಾರ ಮತ್ತು ಏಕಾಂಗಿತನದಿಂದಾಗಿ, ಅವರ ಆರೋಗ್ಯವು ಕೆಟ್ಟಿತು. ಅಲ್ಲಿನ ವಿದೇಶಿ ವಾತಾವರಣ, ಅವರ ಭಾರತೀಯ ಸಂಪ್ರದಾಯಗಳಿಗಿಂತ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದುದೇ ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಿರಬಹುದು. ಅವರು ಮೊದಲಿನ ಚೈತನ್ಯವನ್ನು ಪಡೆಯಲೆಂದು 1919 ರಲ್ಲಿ ಭಾರತಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸಲಾಯಿತು, ಆದರೆ ದುರಾದೃಷ್ಟವಶಾತ್ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷವೇ 33 ನೇ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಮರಣ ಹೊಂದಿದರು.

ಚಟುವಟಿಕೆ 8 :

(ಹಾರ್ಡಿ–ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ) 4104 ಮತ್ತು 13832 ಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ. ಈ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಘನ ಮೂಲ

ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಹಿಮ್ಮುಖಗೊಳಿಸಬಹುದೆ? ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆ?

ಒಂದು ಘನದ ಘನಫಲವು 125 cm^3 ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. l ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದ ಆದರೆ, $l^3 = 125$ ಮತ್ತು $l = 5$ cm ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. 5 ನ್ನು 125 ರ ಘನಮೂಲ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $5 = \sqrt[3]{125}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

> **N ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು $N = n^3$ ಆಗುವಂತೆ n ಎಂಬುದು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, n ನ್ನು N ನ ಘನಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $n = \sqrt[3]{N}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.**

ಷರಾ: ವರ್ಗಮೂಲ ಮತ್ತು ಘನಮೂಲಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. (ವರ್ಗಮೂಲಕ್ಕೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಾರದು.) ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ವರ್ಗಮೂಲದೊಂದಿಗೆ ಘನಮೂಲದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸಂಭವನೀಯ ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ; ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ. ಇದು ಏಕೆಂದರೆ, ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ಗೆ, $(-n)^2 = n^2$ ಘನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. n ಧನಾತ್ಮಕವಾದರೆ, n^3 ಸಹ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ; n ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ n^3 ಕೂಡ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ ಎಂಬುದನ್ನಾಧರಿಸಿ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನದ ಘನಮೂಲವು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು, ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನದ ಘನಮೂಲವನ್ನು ನಿಸ್ಸಂದೇಹವಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ. ವರ್ಗಮೂಲಗಳಂತೆ ಘನಮೂಲಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯತೆಯಿಲ್ಲ.

ವರ್ಗಮೂಲಗಳಂತೆ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನದ ಘನಮೂಲವನ್ನೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 12: 216 ರ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $216 = 2 \times (108) = 2 \times 2 \times (54) = 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt[3]{216} = 6$

ಉದಾಹರಣೆ 13: –17576ರ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು 17576ರ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಹಿಂದಿನಂತೆ,

$$17576 = 2 \times (8788) = 2 \times 2 \times (4394)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times (2197)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 13 \times (169)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 13 \times 13 \times 13$$
$$= (2 \times 13) \times (2 \times 13) \times (2 \times 13)$$
$$= 26 \times 26 \times 26$$

ಇದು $-17576 = (-26) \times (-26) \times (-26)$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ, $\sqrt[3]{-17576} = -26$.

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಪೂರ್ಣಘನವನ್ನು ಪಡೆಯಲು 243 ನ್ನು ಯಾವ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು?

ಪರಿಹಾರ: 243 ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸೋಣ.

$243 = 3 \times (81) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

243 ನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ

$243 \times 3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 \times 9$

ಪೂರ್ಣಘನವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಉತ್ತರ 3.

ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣ ಘನವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ಬಾರಿ ದೊರೆಯುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 3 ರ ಗುಣಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. (ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2ರ ಗುಣಕಗಳಿದ್ದಂತೆ). ಒಂದು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಪೂರ್ಣಘನವಾಗುವಂತೆ, ಗುಣಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯವು ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ, ಪೂರ್ಣಘನದ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ ಬೇಕಾಗಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಸುಲಭ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಘನಮೂಲವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು, ಒಂದು ಘನದ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಯ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. (1, 2, 3,

4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದರಿಂದ ಕೊನೆಯಾಗುವ ಘನದ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನವನ್ನು ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.)

ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

n ನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n^3 ನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0

ಮೊದಲ 9 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನೂ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

ಇದು ಹೇಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 15: 103823ಯ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: 103823 ನಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿ ಸಂಖ್ಯೆ 3. $n^3 = 103823$ ಆದರೆ, n ನಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು 7 ಆಗಬೇಕು. ಈಗ 103823ಯನ್ನು 103 ಮತ್ತು 823 ಆಗಿ ವಿಭಾಗಿಸೋಣ. $4^3 = 64 < 103 < 125 = 5^3$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ, $40^3 = 64000 < 103283 < 125000 = 50^3$.

ಹೀಗಾಗಿ n, 40 ಮತ್ತು 50ರ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು. n ನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು 7 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅಂತಹ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸಂಖ್ಯೆ 47, $47^3 = 103823$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣಘನ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣಘನವಲ್ಲದಿರುವಾಗ ಈ ವಿಧಾನವು ಉಪಯೋಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಘನಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಸಮೀಪ ಬರುವ ಘನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 16: 12345ರ ಘನಮೂಲಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $20^3 = 8000 < 12345 < 27000 = 30^3$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt[3]{12345}$, 20 ಮತ್ತು 30 ರ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು. 12345 ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನವೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ, ನಮ್ಮ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು: $23^3 = 12167$ ಮತ್ತು $24^3 = 13824$, ಆದುದರಿಂದ, $\sqrt[3]{12345}$, 23 ಮತ್ತು 24ರ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು. ಅಲ್ಲದೆ, 12167, 12345ಕ್ಕೆ 13824ಕ್ಕಿಂತ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ $\sqrt[3]{12345}$ ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 23.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.7

1. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಇವುಗಳ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) 1728 ii) 3375 iii) 10648 iv) 46656 v) 15625

2. ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಂದಾಜು ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಸಿ ಇವುಗಳ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) 91125 ii) 166375 iii) 704969

3. ಇವುಗಳ ಘನಮೂಲಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) 331776 ii) 46656 iii) 373248

✦✦✦✦✦

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

ಪೂರ್ಣವರ್ಗ : ಎರಡು ಸಮವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು n–ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ವರ್ಗಮೂಲ : $b = a^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ a ಯು b ನ ವರ್ಗಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪೂರ್ಣ ಘನ : ಮೂರು ಸಮವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

ಘನಮೂಲ : ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ c ಇದರ ಘನವು d ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು c ಯ ಘನಮೂಲ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ : ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ a ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ.

ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ : ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲದ, ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವು ಎರಡು ಸಮವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ; ಒಂದು ಪೂರ್ಣಘನವು ಮೂರು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.
- ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವು ಯಾವಾಗಲೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ(0 ಯೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ); ಒಂದು ಪೂರ್ಣಘನವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲೂಬಹುದು, 0 ಯೂ ಆಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕವೂ ಆಗಿರಬಹುದು.

- ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎರಡು ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ, ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತೊಂದು ಋಣಾತ್ಮಕ. ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಘನಮೂಲವಿರುತ್ತದೆ.
- ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ನಡುವೆ ಸೇರಿಸಬಹುದು.

✦✦✦✦✦

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. **i)** $4^2 = 16$; **ii)** $8^2 = 64$; **iii)** $15^2 = 225$
2. 1, 36, 49, 81, 169, 625, 900, 100,
3. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484.
4. 200, 201, 204, 205, 206, 209, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.
   ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 196 ಮತ್ತು 225ರ ನಡುವೆ ಬರುವ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.
5. 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. $1 + 3 + 5 + \ldots + 51 = 26^2 = 676$.
2. $144 = 12^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 23$.
3. 105 ಮತ್ತು 120. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ $225 = 15^2$.

4. 0, 1 ಅಥವಾ 4.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. **i)** 961 **ii)** 5184 **iii)** 1369 **iv)** 27556
2. **i)** 7225 **ii)** 13225 **iii)** 27225

3. i) 2155024

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. **i)** 14 **ii)** 16 **iii)** 102 **iv)** 34 **v)** 115.
2. **i)** 16 **ii)** 37 **iii)** 81 **iv) 10** **v)** 4 **vi)** 247.
3. **i)** 56 m

4. **i)** 7 **ii)** 2 **iii)** 5 **iv)** 2.
5. **i)** 16 **ii)** 16 **iii)** 729 **iv)** 676.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

1. i) 15 ii) 24 iii) 27 iv) 29 v) 42.

2. 127m **3.** 5

ಅಭ್ಯಾಸ 5.6

1.

2	3	4	–5	6	8	–9
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$(-5)^3 = -125$	$6^3 = 216$	$8^3 = 512$	$(-9)^3 = -729$

2.

1^3	3^3	5^3	7^3	9^3	2^3	4^3	6^3	8^3	10^3
1	27	125	343	729	8	64	216	512	1000

ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನವು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3. 1 ರಿಂದ 100ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 4 ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ; –100 ರಿಂದ 100 ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 9 ಪೂರ್ಣಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ [‘0’ ಸಹ ಪೂರ್ಣ ಘನ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನೆಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ]
4. 1ರಿಂದ 500ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 7 ಪೂರ್ಣಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 64 ಮಾತ್ರ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಹಾಗೂ ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ $64 = 4^3 = 8^2$.
5. ಪೂರ್ಣಘನದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸೊನ್ನೆಗಳು ಮೂರು ಅಥವಾ ಮೂರರ ಅಪವರ್ತ್ಯದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.
6. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಿಯು ಇದ್ದು ಆ ಬಿಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಧರಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣಘನವಲ್ಲವೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.(ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಹೋಲಿಸಿ)

ಅಭ್ಯಾಸ 5.7

1. **i)** 12 **ii)** 15 **iii)** 22 **iv)** 36 **v)** 25

2. **i)** 45 **ii)** 55 **iii)** 89.

3. **i)** 69 **ii)** 36 **iii)** 72.

ಘಟಕ – 6
ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ನೀವು ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ :

* ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು.
* ಬಾಹು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದು.
* ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.
* ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು.
* ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಮತ್ತು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.
* ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು.
* ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಪೀಠಿಕೆ :

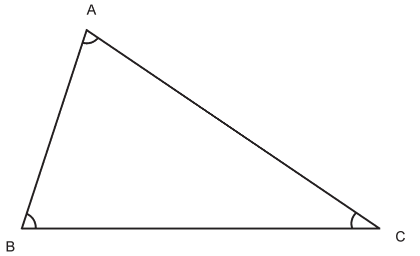
ಈ ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಕೋನ ಮತ್ತು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವಹಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಆವೃತ ಸಮತಲಾಕೃತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ.

ತ್ರಿಭುಜ: ಮೂರು ಏಕೀಭವಿಸದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಆವೃತ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಒಂದು ವಿವರಣೆಯ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಅಂದರೆ **ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ** ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. AB, BC ಮತ್ತು CA ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಹೀಗೆ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಮೂರು ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ತಮ್ಮ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿ, ಒಂದು ರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ಆವೃತ ರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. A,B ಮತ್ತು C ಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ **ಶೃಂಗ**ಗಳಾಗಿವೆ. AB, BC ಮತ್ತು CA ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ **ಬಾಹು**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\angle BAC$, $\angle ABC$, ಮತ್ತು $\angle ACB$ ಗಳನ್ನು ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಅಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜ ABCಯ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು)

ತ್ರಿಭುಜವು ಒಂಭತ್ತು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅವು

ಶೃಂಗಗಳು	ಬಾಹುಗಳು	ಕೋನಗಳು
A	AB	$\angle BAC$ ಅಥವಾ $\angle A$
B	BC	$\angle ABC$ ಅಥವಾ $\angle B$
C	AC	$\angle ACB$ ಅಥವಾ $\angle C$



ಸೂಚನೆ :
ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಬಾಹುಗಳನ್ನು AB, BC ಮತ್ತು AC ಎಂದೂ ಸಹ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಸಹ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಆಯಾ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಸೂಚಿತವು ಬಾಹುಗಳೇ ಅಥವಾ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

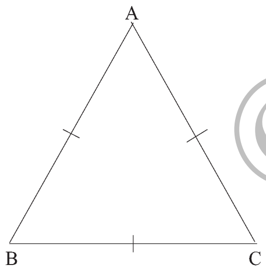
ತಿಳಿಯಿರಿ:

(i) ಒಂದು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದರೆ, ಅದನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯ ಹಾಳೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಅದು ತ್ರಿಭುಜವಲ್ಲ. ಕೇವಲ 3 ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.

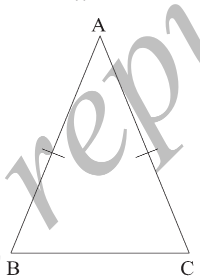
ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಧಗಳು :

(i) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ



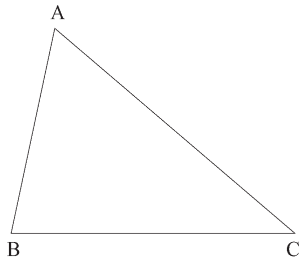
(i) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ : ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ
AB = BC = CA.

(ii) ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ



(ii) ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ : ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC.

(iii) ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.



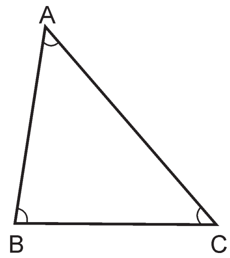
(iii) ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ : ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಭಿನ್ನ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ
$AB \neq BC \neq CA \neq AB$

ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಕೋನಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಧಗಳು :–

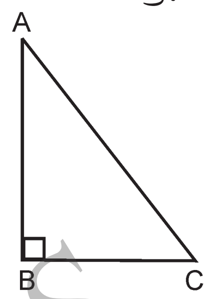
(1) ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ (2) ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ (3) ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ

ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ



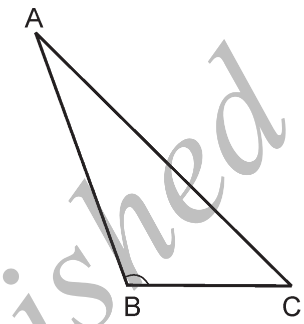
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು 90^0 ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನೀಡಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ABCಯಲ್ಲಿ $\angle ABC < 90^0$, $\angle BCA < 90^0$, $\angle CAB < 90^0$

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ



ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಕೋನವು 90^0 ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನೀಡಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle ABC = 90^0$

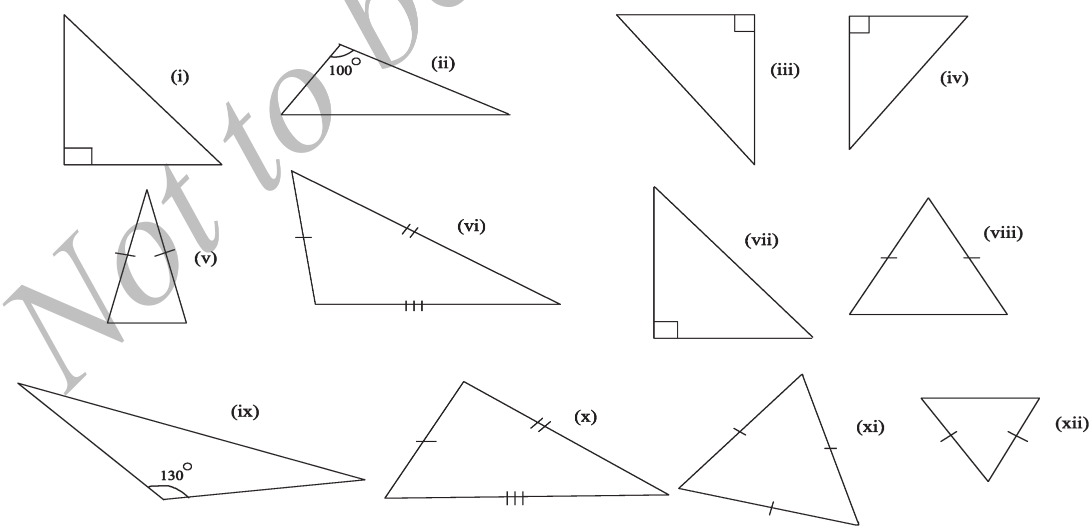
ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ



ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವು 90^0 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle ABC > 90^0$

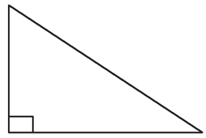
ಚಟುವಟಿಕೆ 1 :

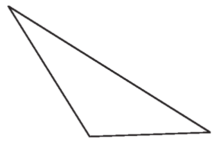
ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಧಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.

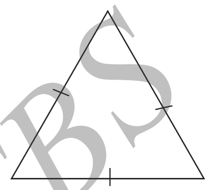


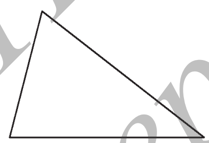
ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1) ಹೊಂದಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :

i)  (A) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

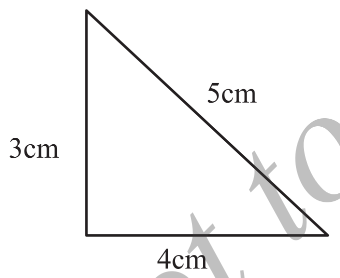
ii)  (B) ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

iii)  (C) ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

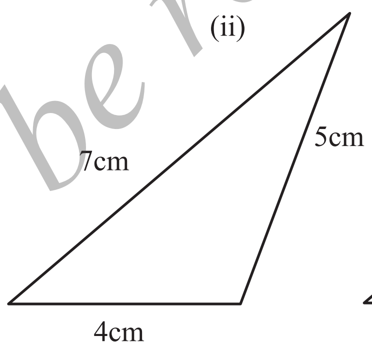
iv)  (D) ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

2) ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ. (ಚಿತ್ರಗಳು ಅಳತೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ):

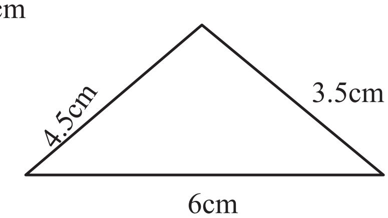
(i)



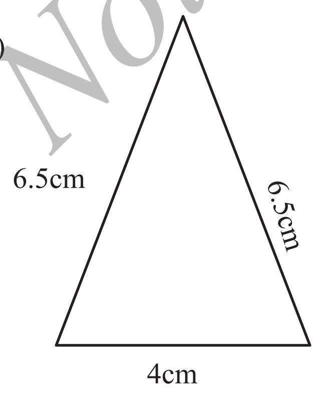
(ii)



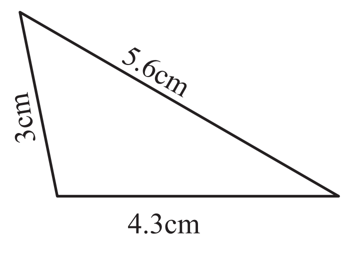
(iii)



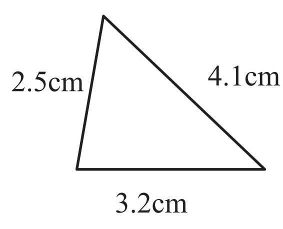
(iv)

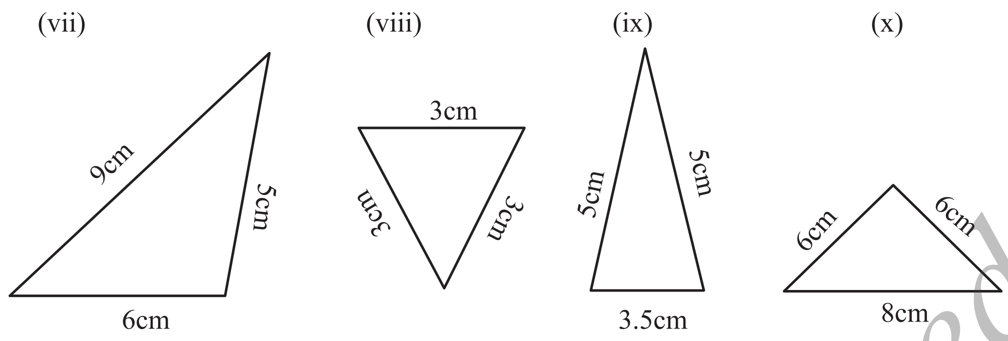


(v)



(vi)



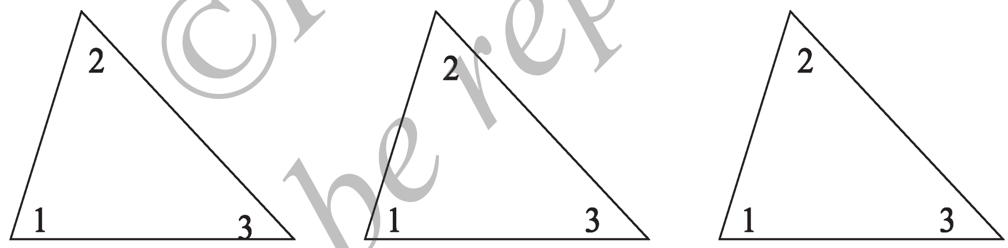


ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ (ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ) :–

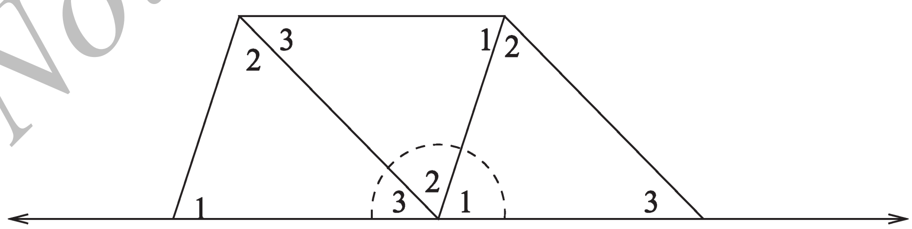
ರೇಖಾಗಣಿತದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಕಾಗದದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 2 :

ಒಂದು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು 4 ಮಡಿಕೆಗಳಾಗಿ ಮಡಿಚಿ. ಅದರ ಒಂದು ಮಡಿಕೆ ಮೇಲೆ ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಬಳಿ 4 ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 3ನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೇಲೆ , $\angle 1, \angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 3$ ಎಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಗುರುತು ಹಾಕಿ.



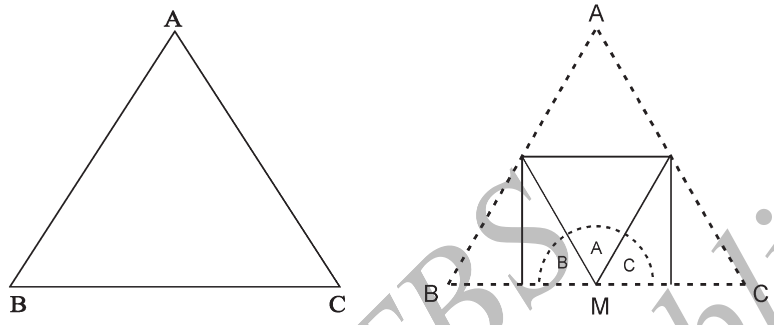
ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಮೊದನೆಯ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನ 1, ಎರಡನೆಯ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನ 2 ಹಾಗೂ ಮೂರನೆಯ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನ 3 ಇವುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ)



ಕೋನ $\angle 1, \angle 2,$ ಮತ್ತು $\angle 3$ ರ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಸರಳಕೋನವಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಅವಲೋಕಿಸಿದಾಗ ಈ ಮೂರೂ ಕೋನಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದು ದೃಢಪಡುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ **ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ** ಎಂದು ಊಹಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3 :

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದುಹಾಕಿ. ತ್ರಿಭುಜದ A ಶೃಂಗವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವನ್ನು ತಾಕುವಂತೆ ಮಡಚಿ. ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು 'M' ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿ, ನಂತರ ಇದೇ ರೀತಿ B ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳು ಸಹ M ನಲ್ಲಿ ತಾಗುವಂತೆ ಮಡಿಚಿ. A ,B C ಗಳು ಒಂದು ಸರಳಕೋನ ಏರ್ಪಡಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ).



$\angle 2=90^0$ **ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿ).**

ಈಗ $\angle 1$, $\angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 3$ ರ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ

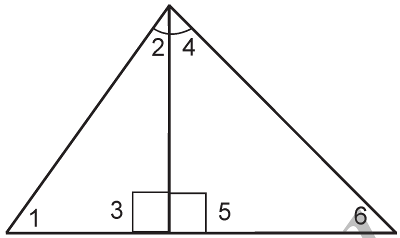
ಈಗ $\angle 3$ ಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವ $\angle 4$ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ $\angle 1 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 = 90^0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + (\angle 1 + \angle 3) = 90^0 + 90^0 = 180^0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅದರ ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು, ಎಳೆದಾಗ ಅದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.



ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ,

$\angle 1+\angle 2+\angle 3 = 180^0$ ———— (1)

$\angle 4+\angle 5+\angle 6= 180^0$ ———— (2)

ಈಗ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6 =360^0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 5$ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ $\angle 3+\angle 5 = 180^0$

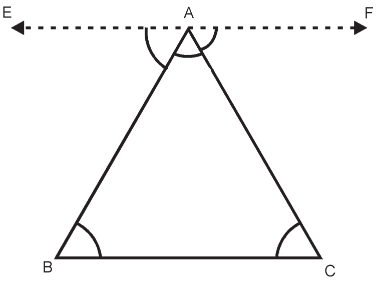
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle 1+\angle 2+\angle 4+\angle 6 =360^0-(\angle 3+\angle 5) =360^0-180^0= 180^0$

$\angle 2+\angle 4$ ರ ಮೊತ್ತವು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಶೃಂಗಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ 3 ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಅದರ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು **ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ** ಅನ್ವಯಿಸಿದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದೆ?

ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ವಿಧಾನದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.



ಪ್ರಮೇಯ – 1 (ಒಳಕೋನಗಳ ಪ್ರಮೇಯ): ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : ABC ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ.

ಸಾಧನೀಯ : $\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB=180^0$

ರಚನೆ : EF || BC ಯನ್ನು ಶೃಂಗಬಿಂದು A ಮೂಲಕ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವೊಂದು ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೇಳಿಕೆಯ ಸತ್ಯಾಂಶಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿ ಅಂತಿಮವಾಗಿ ನಾವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದಾಗಿದೆ.

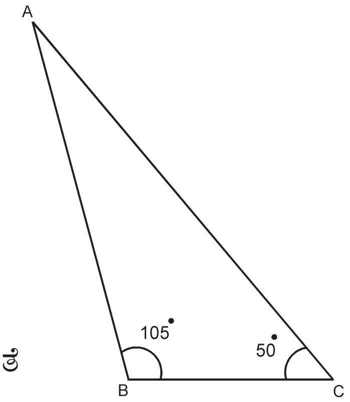
ಹೇಳಿಕೆಗಳು	**ಕಾರಣ**
$\angle ABC = \angle EAB$;	BC ಮತ್ತು EF ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ AB ಛೇದಕದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು.
$\angle BCA = \angle FAC$;	BC ಮತ್ತು EF ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ AC ಛೇದಕದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು
$\angle EAB+\angle BAC+\angle FAC=180^0$;	EF ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲುಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

ಇದರಲ್ಲಿ $\angle EAB = \angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle BCA=\angle FAC$ ಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, $\angle ABC+\angle BAC+\angle BCA=180^0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ 1 : ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B=105^0$ ಮತ್ತು $\angle C=50^0$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ $\angle A$ ನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ (ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಿಂದ)



$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$

$\angle A+105^0+50^0=180^0$

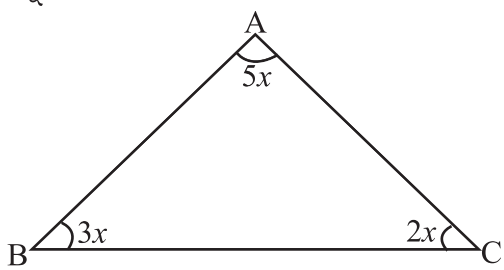
$\angle A+155^0=180^0$

$\angle A=180^0-155^0$

$\angle A=25^0$ ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A=25^0$

ಉದಾ 2 : ನೀಡಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯ 1ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ,



$\angle A+\angle B+\angle C= 180^0$,

ಆದ್ದರಿಂದ $5x + 3x + 2x = 180^0$

$10x = 180^0$

$x = \frac{180^0}{10}$

$x = 18^0$

ಆದ್ದರಿಂದ,

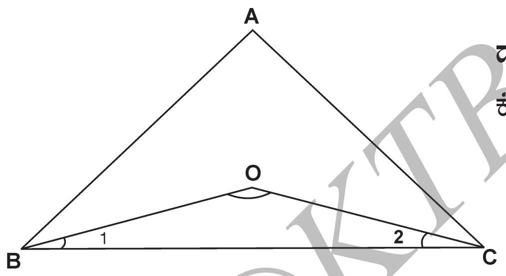
$\angle A = 5x = 5(18) = 90^0$

$\angle B = 3x = 3(18) = 54^0$

$\angle C = 2x = 2(18) = 36^0$

ಉದಾ 3 : ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿನ $\angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle ACB$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದಾಗ $\angle BOC = 90^0 + \frac{1}{2} \angle BAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ :



ದತ್ತ : ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle ACB$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೀಯ : $\angle BOC = 90^0 + \frac{1}{2} \angle BAC$

ಸಾಧನೆ : ತ್ರಿಭುಜ BOC ಯಲ್ಲಿ

$\angle 1 + \angle 2 + \angle BOC = 180^0$ .... (1)

ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

ಕ್ರಮವಾಗಿ BO, CO ಗಳು $\angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle ACB$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$\angle B = 2\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle C = 2\angle 2$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle A + 2\angle 1 + 2\angle 2 = 180^0$, 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$\frac{\underline{|A}}{2} + \underline{|1} + \underline{|2} = 90^0$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ $\underline{|1} + \underline{|2} = 90^0 - \frac{\underline{|A}}{2}$ .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$90^0 - \frac{\underline{|A}}{2} + \underline{|BOC} = 180^0$ ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BOC = 90^0 + \frac{1}{2} \angle BAC$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

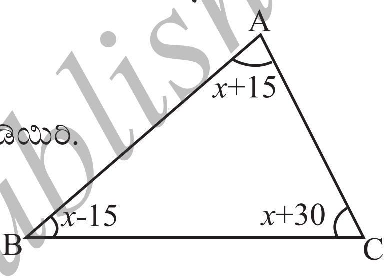
1) ತ್ರಿಭುಜ ABCಯಲ್ಲಿ $\angle A=55^0$ ಮತ್ತು $\angle B=40^0$ ಆದರೆ $\angle C$ ಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ 35^0 ಆದರೆ, ಉಳಿದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯೇನು?

3) ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಕೋನವು 50^0 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4) ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳು 1:2:3ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

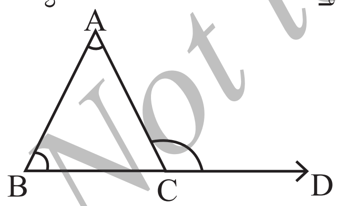
5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ $\triangle$ABCಯಲ್ಲಿ 'x' ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



6) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ಕ್ರಮಾನುಗತ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 10^0 ಆದರೆ, ಆ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳು (ಬಹಿರ್ ಕೋನಗಳು):

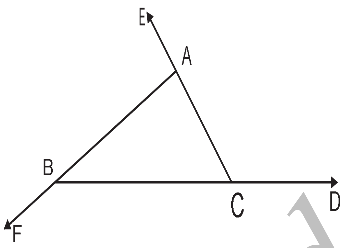
$\triangle$ABCಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿ ಪಾದ BC ಯನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ. $\overrightarrow{BD}$ ಕಿರಣ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ $\angle ACD$ ಯು C ಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜದ **ಬಾಹ್ಯಕೋನ**ವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಬಾಹ್ಯ $\angle C$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಬಾಹ್ಯ $\angle C$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ ABCಯಲ್ಲಿ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಗಳು ಪಾರ್ಶ್ವವಲ್ಲದ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

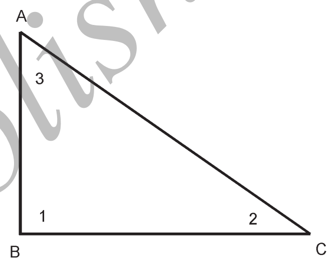
ಸೂಚನೆ : BC ಬಾಹುವಿನ ಬದಲಿಗೆ, AC ಯನ್ನು E ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ $\angle BCE$ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $\angle ACD = \angle BCE$ ಏಕೆಂದರೆ ಅವೆರಡೂ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ BC ಅಥವಾ AC ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಾಹುವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೂ ಬಾಹ್ಯ $\angle C$ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದು ಕೇವಲ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ $\angle C$ ಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಭುಜ ABCಯಲ್ಲಿ, CA, BC, ಮತ್ತು AB ಬಾಹುಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BD}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AF}$ ಕಿರಣಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಆಗ $\angle$BAE, $\angle$ACD ಮತ್ತು $\angle$CBF ಗಳು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಬಹಿರ್‌ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

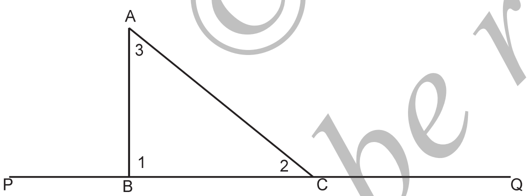


ಚಟುವಟಿಕೆ 4 :

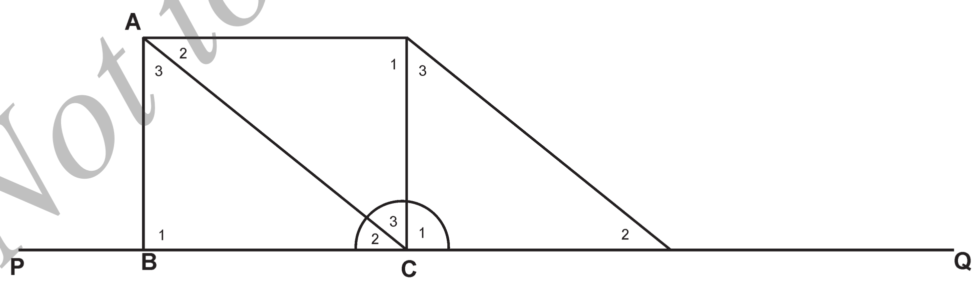
8 × 10cm ಅಳತೆಯ 3 ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದಿರಿಸಿ, ಪ್ರತಿ ಹಾಳೆಯ ಒಂದು ಶೃಂಗವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವಂತೆ ಇರಿಸಿ ಮೂರು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ. ಈಗ ಮೂರು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿವೆ.ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ 1, 2, 3 ಎಂದು ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.



ಇನ್ನೊಂದು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ PQ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು. ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಇಡಿ. ಆಗ $\angle$ACQ ಯು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವಾಗುತ್ತದೆ.



ನಂತರ, ಉಳಿದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಹಾಳೆಗಳನ್ನು $\angle$3 ಮತ್ತು $\angle$1 ನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿ. $\angle$ACQ=$\angle$3 ಮತ್ತು $\angle$1 ರ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಾ?



ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ಅಳತೆಯು ಅನುರೂಪವಾದ ಎರಡು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

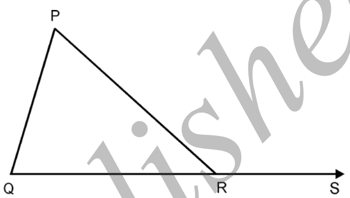
ಪ್ರಮೇಯ – 2 :

ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಬಾಹ್ಯ ಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ)

ದತ್ತಾಂಶ: ತ್ರಿಭುಜ PQR ನಲ್ಲಿ QR ನ್ನು S ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. ಆಗ $\angle PRS$ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯಕೋನವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ $\angle PQR$ ಮತ್ತು $\angle QPR$ ಗಳು ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಧನೀಯ : $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$

ಸಾಧನೆ:



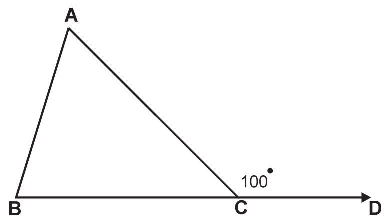
ಹೇಳಿಕೆಗಳು	**ಕಾರಣ**
$\angle QPR+\angle PQR+\angle PRQ = 180^0$	: ಒಳ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮೇಯ
$\angle PRQ+\angle PRS = 180^0$	: ಸರಳಯುಗ್ಮ
$\angle QPR+\angle PQR+\angle PRQ=\angle PRQ+\angle PRS$	: ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 1(ಅಧ್ಯಾಯ–3, ಘಟಕ 1ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ)
$\angle QPR+\angle PQR = \angle PRS$	: ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 3 (ಘಟಕ 11ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ)

ಇದು ಪ್ರಮೇಯದ ಪೂರ್ಣ ಸಾಧನೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ – 4 :

ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯಕೋನವು 100^0 ಹಾಗೂ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಕೋನವು 45^0 ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $\angle ACD$ ಯು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಪಾದ BC ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಬಾಹ್ಯಕೋನವಾಗಿರಲಿ.



ಬಾಹ್ಯ $\angle C=100^0$, $\angle B=45^0$, ಆದಾಗ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ,

$\angle ACD = \angle B + \angle A$

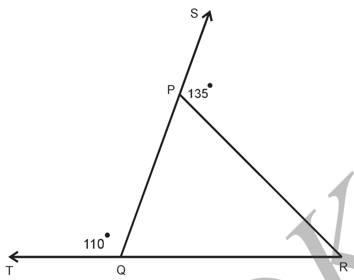
$100^0 = 45^0 + \angle A$

$\angle A = 100^0 - 45^0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle A = 55^0$ ಹಾಗೂ $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B) = 180^0 - (55^0 + 45^0)$

ಹೀಗೆ, $\angle C = 80^0$

ಉದಾಹರಣೆ – 5 :



ನೀಡಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ PQRನ QP ಮತ್ತು RQ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ S ಮತ್ತು T ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. $\angle SPR = 135^0$ ಮತ್ತು $\angle PQT = 110^0$, ಆದರೆ $\angle PRQ$ ನ ಅಳತೆಯೇನು?

ಪರಿಹಾರ : Q, P ಮತ್ತು S ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ, $\angle QPR + \angle SPR = 180^0$ ಆದ್ದರಿಂದ $\angle QPR + 135^0 = 180^0$

ಅಥವಾ $\angle QPR = 180^0 - 135^0 = 45^0$

ಬಾಹ್ಯಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ತ್ರಿಭುಜ PQR ನಲ್ಲಿ $\angle PQT = \angle QPR + \angle PRQ$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $110^0 = 45^0 + \angle PRQ$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು

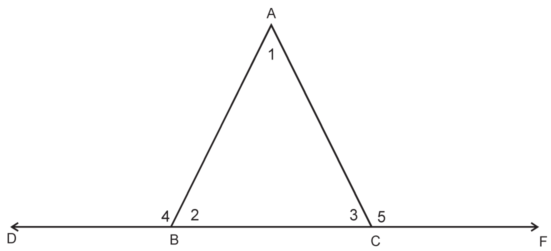
ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, $\angle PRQ = 110^0 - 45^0 = 65^0$

ಉದಾಹರಣೆ 6 :

ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ ಬಾಹು BC ಯನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. ಉಂಟಾದ ಎರಡು ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $\angle A$ ಗಿಂತ 180^0ಯಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ :

ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ BC ಯನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ D ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ $\angle 4 + \angle 5 = \angle 1 + 180^0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$\angle 4 = \angle 1 + \angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 5 = \angle 1 + \angle 2$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಇವೆರಡನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$\angle 4 + \angle 5 = (\angle 1 + \angle 3) + (\angle 1 + \angle 2) = \angle 1 + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = \angle 1 + 180^0$

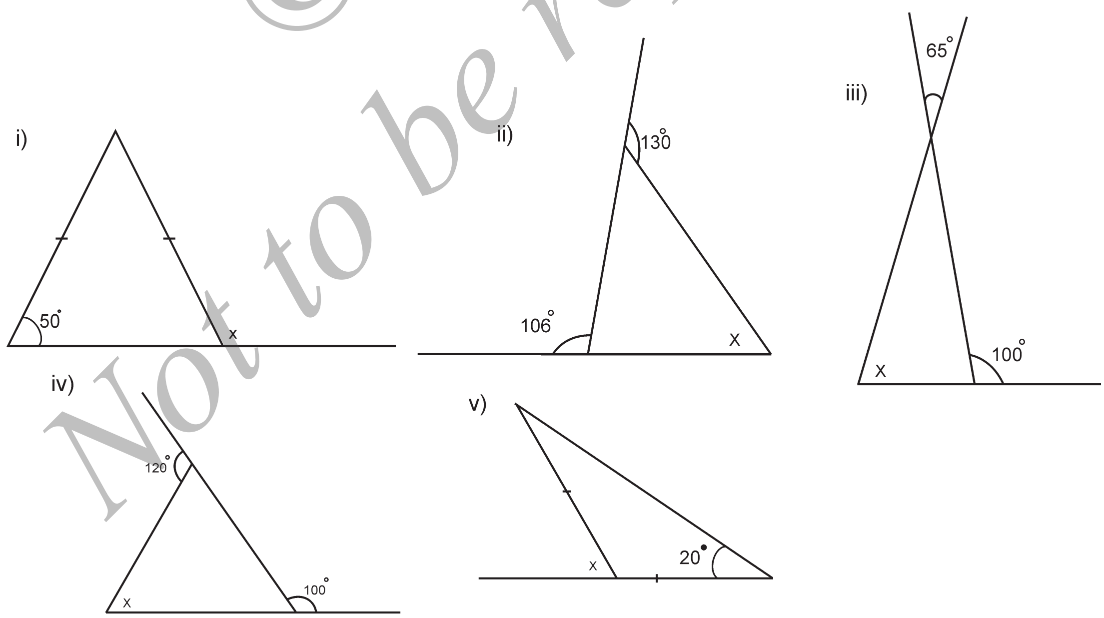
(ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0)

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

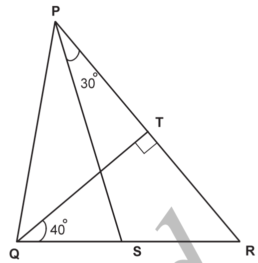
1) ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 104^0 ಮತ್ತು 136^0 ಇವೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಾದ BC, CA ಮತ್ತು ABಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle ACD, \angle BAE$, ಮತ್ತು $\angle CBF$ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳಾಗುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. $\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 360^0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3) ಕೆಳಕಂಡ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ 'x' ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, QT⊥PR, ∠TQR=40^0 ಮತ್ತು ∠SPR=30^0 ಆದರೆ ∠TRS ಮತ್ತು ∠PSQ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



5) ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು 120^0 ಇದೆ ಹಾಗೂ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಇತರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು :

ಬಾಹ್ಯಕೋನ (Exterior angle) : ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ತ್ರಿಭುಜದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು (Interior opposite angles) : ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಒಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1) ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.

2) ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಇರುತ್ತದೆ.

3) ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯಕೋನವು ಅದರ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

✦ ✦ ✦ ✦ ✦

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1. i) →(C) ii) →(D) iii) →(A) iv) →(B)

2. i) ವಿಷಮ ii) ವಿಷಮ iii) ವಿಷಮ iv) ಸಮದ್ವಿಬಾಹು v) ವಿಷಮ vi) ವಿಷಮ vii) ವಿಷಮ viii) ಸಮಬಾಹು ix) ಸಮದ್ವಿಬಾಹು x) ಸಮದ್ವಿಬಾಹು.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

(1) 85^0 (2) 55^0 (3) 65^0 ಪ್ರತಿಯೊಂದು (4) 30^0, 60^0 ಮತ್ತು 90^0

(5) $x = 50^0$, $\angle A = 65^0$, $\angle B = 35^0$, $\angle C = 80^0$, (6) 50^0, 60^0 ಮತ್ತು 70^0.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1) ಬಾಹ್ಯ $\angle B = 136^0$ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯ $\angle C = 104^0$ ಆದರೆ, ಆಗ

$\angle A = 60^0$, $\angle B = 44^0$, ಮತ್ತು $\angle C = 76^0$.

3. (i) 130^0 (ii) 56^0 (iii) 35^0 (iv) 40^0 (v) 40^0.

4. $\angle TRS = 50^0$, $\angle PSQ = 80^0$,

5. ಇನ್ನೊಂದು ಒಳ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನ 90^0 ಮತ್ತು 3ನೇ ಕೋನವು 60^0.

ಘಟಕ – 7
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ನೀವು ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ :

- ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ.
- ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದು ಮತ್ತು ಗುಣಿಸುವುದು.
- ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಹವರ್ತನೀಯ, ಪರಿವರ್ತನೀಯ, ವಿತರಣೆಯ ನಿಯಮ, ಅನನ್ಯತಾಂಶ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮಾಂಶಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು.
- ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಕ್ರಮ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣ.
- ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೋದಾಗ ಆಗುವ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು.

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಈಗಾಗಲೇ ನೀವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. {1, 2, 3......} ಈ ಗಣವನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಎನ್ನುವರು. ಈ ಗಣವನ್ನು ಈ ಗಣವನ್ನು N ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಅದೇ ರೀತಿ, ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $5 + 13 = 18$; $12 \times 15 = 180$ ಇದರಿಂದ, ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆವೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. (ಅಥವಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ). ಅಲ್ಲದೆ,

$8 + 12 = 12 + 8$; $13 + (9 + 21) = (13 + 9) + 21$;

$15 \times 7 = 7 \times 15$; $3 \times (5 \times 6) = (3 \times 5) \times 6$ ಎಂಬುದನ್ನೂ ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m, n, p ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಈ ಗುಣಗಳು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ನೀವು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ:

$m + n = n + m$ (ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$m + (n + p) = (m + n) + p$ (ಸಂಕಲನದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$m \times n = n \times m$ (ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$m.(n.p) = (m.n).p$ (ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸಿ, **ವಿತರಣಾ ಗುಣ**ವನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನೂ ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$5 \times (7 + 8) = 5 \times 15 = 75 = 35 + 40 = (5 \times 7) + (5 \times 8).$

ಹೀಗೆ, ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m, n, p ಗಳಿಗೆ,

$m.(n + p) = m.n + m.p$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಇದನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$(n + p).m = n.m + p.m$

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ 1, $1 \times 8 = 8 \times 1$ ಈ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನೂ ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ; ಇಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ ಮತ್ತು $1.\ m = m.1$

ಈ ಸಂಬಂಧವು ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ 'm' ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

u ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, $m + u = u + m = m$ ಆಗುವಂತೆ, ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಏಕೆ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ನೀವು ಆಶ್ಚರ್ಯ ಪಟ್ಟಿರಬಹುದು. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿಯೇ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ '0' ಯನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿ, **ಪೂರ್ಣ** ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ 'W' ವನ್ನು ಪಡೆದಿರುವುದು. ಹೀಗೆ, $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ಸಂಖ್ಯೆ 0, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $8 + 0 = 0 + 8 = 8$ ಮತ್ತು $9 \times 0 = 0 \times 9 = 0$ ಈ ಗುಣವನ್ನೂ ಹೊಂದಿದೆ. ಹೀಗೆ 0 ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m ಗಳಿಗೆ; $m + 0 = 0 + m = m$

$$m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0$$

W ಗಣದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $14 \times 6 \neq 0$. ಹೀಗೆ, W ನಲ್ಲಿ m ಅಥವಾ n, (ಅಥವಾ m ಮತ್ತು n ಎರಡೂ 0 ಆದಾಗ) 0 ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $mn = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನೂ ಅಭ್ಯಸಿಸಿರುವಿರಿ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ 12 ಮತ್ತು 81 ನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ತಿಳಿಸಿದರೆ, ನೀವು ತಕ್ಷಣ 81, 12 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು; ಅಥವಾ 12, 81 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೀರಿ. ಇದನ್ನು $12 < 81$ ಅಥವಾ $81 > 12$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m, n ಗಳಿಗೆ $m < n$ ಅಥವಾ $m = n$ ಅಥವಾ $m > n$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ; ಮತ್ತು ಈ ಮೂರರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಮಾತ್ರ ಸರಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಬದ್ಧಗೊಳಿಸುವುದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ; ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $1 < 2 < 3 < 4 \ldots\ldots$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ 1 ರ ಹಿಂದೆ 0 ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, $\mathbb{W}$ ನ ಕ್ರಮಬದ್ಧತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು; $0 < 1 < 2 < 3 < 4 \ldots\ldots$ ಈ ಕ್ರಮಬದ್ಧತೆಗೆ ಒಂದು ಮೂಲ ಸತ್ಯಾಂಶವಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 3 ರ ಗುಣಕಗಳ ಗಣ, $E = \{3, 6, 9 \ldots\ldots\}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಇದರಲ್ಲಿ 3 ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಗಣಾಂಶ. ಆದರೆ ಈ ಗಣವು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಕಿರು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕವು ಕನಿಷ್ಠ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದಾದರೂ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ $\mathbb{N}$ ಗಣದ ಉಪಗಣವನ್ನು $\mathbb{N}$ ನ **'ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ'** ಉಪಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎಲ್ಲಾ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $\mathbb{N}$ ನ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣ. ಸಮ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಗಣವು $\mathbb{N}$ ಗಣದ ಶೂನ್ಯ ಗಣ, ಏಕೆಂದರೆ ಸಮ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಎರಡೂ ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಶೂನ್ಯಗಣವಲ್ಲದ, ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $\mathbb{N}$ (ಅಥವಾ $\mathbb{W}$)ನ ಉಪಗಣವು ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಕ್ರಮಬದ್ಧ ವಿನ್ಯಾಸ (well ordering property)** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 :

ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, $\mathbb{N}$ ಗಣದ 5 ಪರಿಮಿತ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆದು, ಅದರಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ. $\mathbb{W}$ ಗಣದ ಎರಡು ಅಪರಿಮಿತ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆದು, ಇವುಗಳಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

$\mathbb{N}$ ಅಥವಾ $\mathbb{W}$ ನಲ್ಲಿ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಒಂದು ಅನಾನುಕೂಲವಿದೆ. $x + 5 = 3$. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. $m + 5 = 3$ ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m ಇಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $m + 5 > 5 > 3$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈ ಅನಾನುಕೂಲತೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ $\mathbb{Z}$ ನಲ್ಲಿ ನಿವಾರಿಸಲಾಗಿದೆ. $\mathbb{W}$ ನ ಜೊತೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ವರ್ಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m ನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ $-m$ ನೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಕಲ್ಪಿಸಬಹುದು. $-m$ ನ್ನು m ನ ಋಣಾಂಕ (ಅಥವಾ m ನ ವಿರುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ) ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $\mathbb{Z}$ ಮೂರು

ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ; 0 ; ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots \}$$

ಇಲ್ಲಿ $\mathbb{Z}$, ಜರ್ಮನ್ ಪದ ಜಲೆನ್ (**Zahlen**) (ಅಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ನಿಂದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

$\mathbb{Z}$ ನಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನೂ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. m ಮತ್ತು n ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

(i) $(-m) + (-n) = -(m + n)$

(ii) $(-m) + 0 = -m = 0 + (-m)$

(iii) $(-m) + n = \begin{cases} -(m-n), & m > n \text{ ಆದಾಗ} \\ n-m, & m < n \text{ ಆದಾಗ} \\ 0, & m = n \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$

(iv) $(-m)\cdot n = m\cdot(-n) = -(m\cdot n)$

(v) $(-m)\cdot(-n) = m\cdot n$

(vi) $(-m)\cdot 0 = 0\cdot(-m) = 0$

m ಮತ್ತು n ಎರಡು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಅದೇ ರೀತಿಯ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅವುಗಳಿಗೆ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಮುಂದುವರಿದ ಭಾಗವಾಗಿ, $\mathbb{Z}$ ಹಲವಾರು ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

1. **ಆವೃತ ಗುಣ:** ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a, b ಗಳಿಗೆ $a + b$ ಮತ್ತು $a.b$ ಎರಡೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು;
2. **ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:** ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a, b ಗಳಿಗೆ,
   $a + b = b + a$ ಮತ್ತು $a . b = b. a$;
3. **ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:** ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a, b, c ಗಳಿಗೆ
   $a + (b+c) = (a+b) + c$ ಮತ್ತು $a . (b.c) = (a . b) . c$
4. **ವಿತರಣಾ ಗುಣ:** ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a, b, c ಗಳಿಗೆ $a . (b + c) = a .b + a.c$;
5. **ರದ್ಧತಿ ಗುಣ:** a, b, c ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $c \neq 0$ ಮತ್ತು $a.c = b.c$ ಆದರೆ ಆಗ $a = b$ (ಎರಡೂ ಕಡೆ a ಮತ್ತು b ಯನ್ನು ರದ್ದುಗೊಳಿಸಬಹುದು)

ರದ್ಧತಿ ನಿಯಮವು, $c \neq 0$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಪಾಲಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $3\cdot 0 = 5\cdot 0$ ಎಂದು ಬರೆದು, ಎರಡೂ ಕಡೆ 0 ಯನ್ನು ರದ್ದುಪಡಿಸಿದಾಗ $3 = 5$ ಎಂಬ ಅಸಂಬದ್ಧ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು ಎಂಬುದಾಗಿ ನೀವು ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಹಲವಾರು ಅಸಂಬದ್ಧ ತೀರ್ಮಾನಗಳು ಈ ರೀತಿಯ ತಪ್ಪಾದ ರದ್ದುಪಡಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

$\mathbb{N}$ ಗಣದಿಂದ $\mathbb{Z}$ ಗಣಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಯುವುದರ ಅನುಕೂಲತೆ ಏನು? 0 ಗೆ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನವಿರುವುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ: ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ $a + 0 = 0 + a = a$. '0' ಯನ್ನು $\mathbb{Z}$ ನಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ (ಅಥವಾ ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ '0' ಅನನ್ಯತಾಂಶ). ಅಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ $-a$ ಇದ್ದು, $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ; $a = m$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $-a$ ಒಂದು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $-m$; $a = 0$ ಆದರೆ, $-a = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ. a ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ $a = -n$ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $-a = n$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ;

ಆಗ $a + (-a) = (-m) + m = 0$, ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. $-a$ ನ್ನು a ನ **ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕ a, b ಗಳಿಗೆ $x + a = b$, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. $x = b + (-a)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಆಗ, $x + a = b + (-a) + a = b + [(-a) + a)] = b + 0 = b$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. (–a) ಯು a ನ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶ ಮತ್ತು 0 ಯು ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ. $\mathbb{Z}$ ನ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಹ ನಾವು ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, $-n < 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. m ಮತ್ತು n ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $m < n$ ಆದರೆ, $-n < -m$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ $\mathbb{Z}$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತೀರಿ. ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯವಕಲನದ ಸ್ಥಾನಮಾನ ಏನು ಎಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸುತ್ತಿರಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ. ಈ ಹಿಂದೆ, $12 - 7 = 5$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಈಗ –7, +7ರ ವಿಲೋಮಾಂಶ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರಿ. ಹೀಗೆ, 12 ಮತ್ತು –7ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ, $12 - 7 = 12 + (-7)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು.

ಸಂಕಲನ ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮುಂದುವರೆದ ಭಾಗವಾಗಿ, ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳಲು, **'ವ್ಯವಕಲನ'** ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೆಸರಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ಇದು ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದಾಗಲೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. $-8-13$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದಾಗ, $(-8) + (-13) = -(8 + 13) = -21$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ, ಎರಡು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ $15 - 21$ ಎಷ್ಟು? 15 ಮತ್ತು (–21) ನ್ನು ಕೂಡುವುದು ಎಂಬುದು ನಿಮ್ಮ ಸ್ಪಷ್ಟ ಉತ್ತರವಾಗಿದೆ. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು, $15 + (-21) = -(21 - 15) = -6$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. $-m$ ನ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶ ಯಾವುದು? $m + (-m) = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, m, $-m$ ನ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶ ಆಗಿದೆ; ಹೀಗೆ $-(-m) = m$ ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಇದು, – ಚಿಹ್ನೆಯು ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದೆಂಬುದಕ್ಕೆ ಒತ್ತು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಏನನ್ನಾದರೂ ಗಳಿಸಿದಾಗ ಅದಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿ ಏನನ್ನಾದರೂ ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬುದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ನಿಯಮ. $\mathbb{Z}$ ನಲ್ಲಿನ ಗಳಿಕೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ; ಅದೆಂದರೆ a ಮತ್ತು b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ, $x + a = b$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $b > a$ ಆಗದ ಹೊರತು $\mathbb{N}$ ನಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವು ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕೆಂಬುದೇನಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. {......–5, –4, –3, –2, –1} ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಇದು ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ (ಏಕೆ?). ಆದರೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪಡೆದಿರುವುದರಿಂದ ಆಗಿರುವ ಲಾಭವು ಉಂಟಾಗಿರುವ ನಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು.

$\mathbb{Z}$ ನ್ನು ಪುನಃ ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $ax = b, a \neq 0$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. (a, b ಯನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು). ಹಾಗಾಗಿ $\mathbb{Z}$ ಕೂಡ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಎದುರು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಇದು $\mathbb{Z}$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಲ್ಲದೆ, ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನದನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕೆಂದು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪವನ್ನಾದರೂ ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ. ಗಳಿಕೆ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ ಏನು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ನೋಡೋಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿನ ಗುಣವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ:
   i) $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$
   ii) $2 \cdot 8 = 8 \cdot 2$
   iii) $8 \cdot (6 + 5) = (8 \cdot 6) + (8 \cdot 5)$.
2. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ, ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:
   6, 9, 123, –76, –85, 1000.
3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕ m ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:
   i) $m + 6 = 8$ ii) $m + 25 = 15$
   iii) $m - 40 = -26$ iv) $m + 28 = -49$.
4. ಇವುಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:
   21, –8, –26, 85, 33, –333, –210, 0, 2011.
5. ಇವುಗಳನ್ನು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:
   85, 210, –58, 2011, –1024, 528, 364, –10000, 12

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ; p ಮತ್ತು q ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $\frac{p}{q}$ ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{3}$ ಇತ್ಯಾದಿ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೂಡುವುದು ಎಂಬುದನ್ನೂ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 1. $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{8}{5}$ ನ್ನು ಕೂಡಿ ಮತ್ತು ಗುಣಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ,

$$\frac{1}{3} + \frac{8}{5} = \frac{(1 \times 5) + (8 \times 3)}{3 \times 5} = \frac{5 + 24}{15} = \frac{29}{15}$$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, $\frac{1}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{1 \times 8}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\frac{10}{4}$ ನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{10}{4} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2} = \frac{5}{2}$$

ಅಂಶದಲ್ಲಿನ ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿನ 2ನ್ನು ರದ್ದುಪಡಿಸುವುದರಿಂದ $\frac{5}{2}$ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಶವಿದ್ದರೆ, ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು ರದ್ದುಪಡಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ $\frac{10}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{5}{2}$ ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲೂಬಹುದು: ನೀವು $\frac{1}{3}$ ನ್ನು $\frac{8}{5}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಫಲಿತಾಂಶವು,

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{5}} = \frac{1 \times 5}{3 \times 8} = \frac{5}{24}$$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಇವುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದು ಔಪಚಾರಿಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೇ? ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಋಣಾತ್ಮಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದೆ?

p ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು q ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ $\frac{P}{q}$ ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು **ಭಾಗಲಬ್ಧ** ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. q ನ್ನು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವುದರಿಂದ, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $q > 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. $\frac{P}{q}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, p ಯನ್ನು **ಅಂಶ** ಎಂದೂ q ನ್ನು **ಛೇದ** ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಛೇದವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, ಆದರೆ ಅಂಶವು ಧನ, ಋಣ ಅಥವಾ 0 ಯೂ ಆಗಿರಬಹುದು. $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ,

$a \times d = c \times b$ ಆದಾಗ, ಅವೆರಡನ್ನೂ ಸಮ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $\frac{10}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{5}{2}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $10 \times 2 = 20 = 5 \times 4$. ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. 1 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}$ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪ ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲಾಗದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ, $\frac{5}{2}$ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ, ಆದರೆ $\frac{10}{4}$ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 2 :

$\frac{3}{4}$ ಗೆ ಸಮನಾದ 10 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. $\frac{3}{4}$ ಗೆ ಸಮನಾದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?

ಹೀಗೆ, $\frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \frac{7}{10}, \frac{-5}{8}, \frac{-6}{11}$ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು: ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ಅದನ್ನು $\frac{a}{1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ 7 ಮತ್ತು $\frac{7}{1}$ ರ ನಡುವೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

$\frac{3}{4}$ ಎಂಬ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (ಅಥವಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು) ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರುವಂತೆಯೇ $\frac{3}{4}$ ರ ಋಣಾತ್ಮಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{-3}{4}$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ ಇದನ್ನು $-\frac{3}{4}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು $\mathbb{Q}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / \text{ p,q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು } q > 0. (p,q) \text{ ನ ಮ.ಸಾ.ಅ } = 1 \right\}.$$

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಛೇದದಲ್ಲಿ ಏಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಅನಿಸುತ್ತಿರಬಹುದು. ಪೂರ್ಣಾಂಕ $q > 0$ ಇರುವಂತೆ, ಒಂದು $\frac{p}{-q}$ ರೂಪದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇದು $\frac{-p}{q}$ ರೂಪದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ $p \times q = (-p) \times (-q)$.

ಹೀಗೆ ಛೇದಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳೇ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಛೇದ ಮತ್ತು ಅಂಶಗಳೆರಡೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿದ್ದಾಗ, ಆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ(rational number) ಎಂಬ ಪದವು ಅನುಪಾತ (ratio) ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅನುಪಾತವಾಗಿದ್ದು, ಛೇದವು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. ಛೇದವು 80ನ್ನು ಮೀರದಂತೆ, $\frac{5}{7}$ ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಹತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. ಛೇದವು 180ನ್ನು ಮೀರದಂತೆ, $\frac{11}{5}$ ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಹದಿನೈದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
3. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ಮೊತ್ತವು 11 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಹತ್ತು ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ.
4. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು –2 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಹತ್ತು ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ.
5. $\frac{3}{-2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆ? ಹೌದಾದರೆ, ಅದನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಡುವಂತೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವಿರಿ? (ಅಂದರೆ ಛೇದವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗುವಂತೆ)
6. 0.9, 0.8 ಈ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲಿರಾ?

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಗಳು

ಆವೃತ ಗುಣ : ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣಗಳು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಆವೃತ ಗುಣ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ, ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ ಮತ್ತು ವಿತರಣ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಇದೇ ಗುಣಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿಯೂ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದೇ? ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳಿಂದಲೇ ಆರಂಭಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1. $\frac{5}{6}$ ಮತ್ತು $\frac{11}{13}$ ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಇದು,

$$\frac{5}{6}+\frac{11}{13} = \frac{(5\times 3)+(11\times 6)}{6\times 13}$$

$$= \frac{65+66}{78}$$

$$= \frac{131}{78}$$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\frac{4}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{-3}{5}$ ರ ಮೊತ್ತವು

$$\frac{4}{7} + \frac{-3}{5} = \frac{(4\times5)+[(-3\times7)]}{7\times5}$$

$$= \frac{20+(-21)}{35} = \frac{-1}{35}$$

$\frac{-7}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{-3}{7}$ ಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$\frac{-7}{4} + \frac{-3}{7} = \frac{(-7)\times7+(-3)\times4}{4\times7}$$

$$= \frac{(-49)+(-12)}{28}$$

$$= \frac{-61}{28}$$

ಉದಾಹರಣೆ 2. $\frac{2}{11}$ ಮತ್ತು $\frac{8}{7}$ ರ ಗುಣಲಬ್ಧವು:

$$\frac{2}{11} \times \frac{8}{7} = \frac{2\times8}{11\times7} = \frac{16}{77}$$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\frac{-3}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{-7}{2}$ ರ ಗುಣಲಬ್ಧವು:

$$\frac{-3}{5} \times \frac{-7}{2} = \frac{(-3)\times(-7)}{5\times2} = \frac{21}{10}$$

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಬಹುದು. $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಎರಡು ದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

b > 0 ಮತ್ತು d>o ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, bd ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ad + cb ಮತ್ತು ac ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\frac{ad+cb}{bd}$ ಮತ್ತು $\frac{ac}{bd}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ, ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3 :

ಹತ್ತು ಜೋಡಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಮೊತ್ತವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಹೀಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆವೃತ ಗುಣ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದೇ ರೀತಿ, ಪ್ರತಿ ಜೋಡಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆಯೂ ಆವೃತ ಗುಣವು ಪಾಲಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ:

$p + (q + r) = (p + q) + r$ ಮತ್ತು $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(3 + 5) + 8 = 3 + (5 + 8)$ ಮತ್ತು $3 \times (5 \times 8) = (3 \times 5) \times 8$. ಇದೇ ಗುಣಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆಯೆ?

ಉದಾಹರಣೆ : $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{-6}{7}$ ಈ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{5} + \frac{-6}{7}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{7 \times 4 + (-6) \times 5}{5 \times 7}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{28 - 30}{35}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{-2}{35}$$

$$= \frac{35 \times 1 + (-2) \times 2}{70} = \frac{31}{70}$$

ಅದೇ ರೀತಿ,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\right) + \frac{-6}{7} = \left(\frac{5 + 8}{10}\right) + \frac{-6}{7}$$

$$= \frac{13}{10} + \frac{-6}{7}$$

$$= \frac{91 - 60}{70}$$

$$= \frac{31}{70}$$

ಇದರಿಂದ, $\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{5} + \frac{-6}{7}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\right) + \frac{-6}{7}$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದಲ್ಲವೆ?

ಇದು ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ಮತ್ತು $\frac{e}{f}$ ಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$ ಮತ್ತು $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬಹುದು.

ಇದರಿಂದ, $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cf + ed}{df}$

$= \frac{adf + (cf + de)b}{bdf} = \frac{adf + cfb + deb}{bdf}$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ, $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + cb}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}$

ಅದರೆ, adf + cfb + deb = adf + cbf + ebd ಅಲ್ಲವೆ? ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಯಾವ ಗುಣಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ? ಹೀಗೆ ಎರಡೂ ಮೊತ್ತಗಳು ಒಂದೇ.

ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು.

$\frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{11}{13}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{7}{8}\times\frac{11}{13}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{77}{104} = \frac{154}{312}$$

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\right)\times\frac{11}{13} = \frac{14}{24}\times\frac{11}{13} = \frac{154}{312}$$

ಇದರಿಂದ, $\frac{2}{3}\times\left(\frac{7}{8}\times\frac{11}{13}\right) = \left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\right)\times\frac{11}{13}$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ಗಳಿಗೆ

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\cdot\frac{ce}{df} = \frac{ace}{bdf}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f} = \frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.$$

ಅದ್ದರಿಂದ, $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}$

ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: ಈ ಹಿಂದೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಎರಡು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕ m ಮತ್ತು n ಗಳಿಗೆ m + n = n + m ಮತ್ತು m.n = n.m.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : 3 + 5 = 5 + 3 ಮತ್ತು 3 × 5 = 5 × 3 ಇದನ್ನೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದೆ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 4 : ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{8}{11}$ ಮತ್ತು $\frac{-16}{9}$ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{8}{11}+\frac{-16}{9} = \frac{8\times9+(-16)\times11}{11\times9}$$

$$= \frac{72-176}{99} = \frac{-104}{99}.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $-\frac{16}{9}+\frac{8}{11} = \frac{(-16)\times11+8\times9}{9\times11}$

$$= \frac{-176+72}{99} = -\frac{104}{99}.$$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

ಹೀಗೆ, $\frac{8}{11}+\frac{-16}{9} = \frac{-16}{9}+\frac{8}{11}$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 5 : ಇದೇ ರೀತಿ, $\frac{8}{11}\cdot\frac{-16}{9}=\frac{-16}{9}\cdot\frac{8}{11}$, ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ನಾವು ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿಡಬಹುದೇ? $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{cb+ad}{db}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದರೆ, ad + cb = cb + ad ಮತ್ತು bd = db ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ (ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಯಾವ ಗುಣವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದೆ?) ಆದ್ದರಿಂದ, ನೀವು

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

ಇದು ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯ ವೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆಯೂ ಮಾಡಬಹುದು:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b},$$

ಇದು ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.

ವಿತರಣಾ ಗುಣ: $\frac{2}{3},\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{9}$ ಈ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{18}=\frac{22}{54}=\frac{11}{27}\cdot$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇದೇ ರೀತಿ, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{6}+\frac{2}{27}=\frac{66}{162}=\frac{11}{27}.$

ಇಲ್ಲಿ ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇದರಿಂದ, $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}.$ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

ಚಟುವಟಿಕೆ 4 : ಹಲವಾರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವಿತರಣಾ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಹಾಗೂ $\frac{p}{q},\frac{r}{s}$ ಮತ್ತು $\frac{u}{v}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳ ನಿರೂಪಣೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{r}{s}+\frac{u}{v}\right)=\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\cdot\frac{u}{v}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ, ಗುಣಾಕಾರವು, ಸಂಕಲನದೊಂದಿಗೆ ವಿತರಣಾ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಯೋಚಿಸಿ!

ದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ಗಳಿಗೆ $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{e}{f}\right)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದೇ? ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ಸಂಕಲನವು ಗುಣಾಕಾರದೊಂದಿಗೆ ವಿತರಣಾ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆಯೆ?(ಅಂದರೆ, ಮೇಲಿನ ವಿತರಣಾ ಗುಣದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದೆ?)

ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ:

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{0}{1}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. $\frac{7}{8} + \frac{0}{1} = \frac{7 \times 1 + 0 \times 8}{8 \times 1} = \frac{7}{8}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}$ ಗೆ,

$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \times 1 + 0 \times b}{b \times 1} = \frac{a}{b}$. ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ, $\frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{0}{1}$ ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತೆಯಾಗಿ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ 0 ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ '0' ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ r ಗಳಿಗೆ r + 0 = 0 + r = r ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ

ಪುನಃ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{1}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$\frac{11}{12} \times \frac{1}{1} = \frac{11}{12}$. ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}$ ಗೆ,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} \text{ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.}$$

ಹೀಗೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{1}$ (ಇದನ್ನು ಪುನಃ 1 ರಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ) ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು 1 ನ್ನು ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶವಾಗಿ ಹೊಂದಿದೆ; ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ r ಗಳಿಗೆ r.1=1. r = r. ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ

$\frac{8}{13}$ ಮತ್ತು $\frac{-8}{13}$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ $\frac{8}{13}+\frac{-8}{13}=\frac{8\times 13+(-8)\times 13}{13\times 13}=\frac{0}{169}=0.$ ಇದು ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}$ ಗೆ, - $\frac{a}{b}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab+(-a)b}{b^2}=\frac{0}{b^2}$$

ಆದರೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{0}{b^2}$ ಮತ್ತು $\frac{0}{1}$ ಎರಡೂ ಒಂದೇ. ಏಕೆಂದರೆ, ಅವು ಸಮಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಹೀಗೆ $\frac{-a}{b}$ ಯು $\frac{a}{b}$ ನ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ.

$\mathbf{r}+(-\mathbf{r})=\mathbf{0}=(-\mathbf{r})+\mathbf{r}$ ಆಗುವಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ r ಗೆ -r ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಾಂಶ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 8ಕ್ಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಾಂಶ ಇಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಗೆ, $8\times a=1$ ಆಗುವಂತೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ $\frac{7}{5}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$\frac{7}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{35}{35}=1$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದು ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ $a\neq 0$, ಅದರಿಂದಾಗಿ $\frac{b}{a}$ ಸಹ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{1}{1}.$$

ಇದು ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $\frac{1}{1}$ ಮತ್ತು $\frac{ab}{ba}$ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ r ಗೆ, $\mathbf{r}\neq 0, \mathbf{r}^{-1}$ (ಅಥವಾ $\frac{1}{r}$) ರಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುವ ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಿದ್ದು, $\mathbf{r.r^{-1}=1=r^{-1}.r}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ, **ರದ್ಧತಿ ನಿಯಮವೆಂಬ** ಮತ್ತೊಂದು ಗುಣವನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರುವಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $8 \times a = 48$ ಆದರೆ $8 \times a = 8 \times 6$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡೂ ಕಡೆ 8ನ್ನು ರದ್ದು ಪಡಿಸಿದಾಗ, $a = 6$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $a \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ a, b, c ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ $ab = ac$ ಆದರೆ, ಆಗ $b = c$. ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಾನತೆಯ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ರದ್ದುಪಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಅಂಶವು $\mathbb{Q}$ ನಲ್ಲೂ ಪಾಲಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\frac{4}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{2}$ ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\frac{4}{4} = \frac{2}{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.ಆದರೆ, $\frac{4}{4} = 2 \times \frac{2}{4}$, ಮತ್ತು $\frac{2}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$. ಹೀಗೆ,
$2 \times \frac{2}{4} = 2 \times \frac{1}{2}$. 2 ನ್ನು ಎರಡು ಬದಿ ರದ್ದು ಪಡಿಸುವುದರಿಂದ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದು ಸತ್ಯ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{2}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $\frac{a}{b} \neq 0$ ಮತ್ತು $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ

$\frac{a}{b} \neq 0$ ಆದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ $\frac{b}{a}$ ಇರುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಬದಿ $\frac{b}{a}$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ: $\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right)$

ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸಿ, ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ,

$$\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{e}{f}$$

$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\frac{a}{b}$ ಯನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ರದ್ದುಗೊಳಿಸಬಹುದು.

ಈಗ $\mathbb{Q}$ ನಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸೋಣ. **ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ.** $\frac{4}{13}$ ಮತ್ತು $\frac{12}{7}$ ಈ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, $\left(\frac{4}{13} - \frac{12}{7}\right)$ ಗೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡಬೇಕಿದೆ. $\frac{12}{7}$ ರ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ $\frac{-12}{7}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\frac{4}{13} - \frac{12}{7} = \frac{4}{13} + \frac{-12}{7}$$

$$\frac{4}{13} + \frac{-12}{7} = \frac{4 \times 7 + (-12) \times 13}{13 \times 7} = \frac{-128}{91}.$$

ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ವ್ಯವಕಲನವು ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕೂಡುವುದಾಗಿರುತ್ತದೆ. $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.

ಅದೇ ರೀತಿ, $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಗಳ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$\frac{a}{b}$ ನ್ನು $\frac{c}{d}$ ಯ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$\frac{c}{d}$ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. $\frac{8}{15}$ನ್ನು $\frac{-7}{11}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಸರಳವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡಬಹುದು.

$$\frac{8}{15} \div \frac{-7}{11} = \frac{8}{15} \times \frac{-11}{7} = \frac{-88}{105}$$

ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳೆರಡೇ ಗಣಿತದ ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಗಳು. ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು $\mathbb{Z}$ ನಿಂದ $\mathbb{Q}$ ವರೆಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಏನನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ 'a' ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, a=1 ಅಥವಾ a=−1 ಆಗದ ಹೊರತು, a . b = b . a = 1 ಆಗುವಂತೆ b ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ, 1 ಮತ್ತು −1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಇತರೆ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಪ್ರತಿ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು $\mathbb{Q}$ ನಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಇದು $rx = s$, ($r \neq 0$ ಮತ್ತು s ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

$\frac{3}{8}x = \frac{5}{9}$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಎರಡೂ ಕಡೆ $\frac{8}{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ $\frac{8}{3} \times \frac{3}{8}x = \frac{8}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{40}{27}$. ಇದರಿಂದ $x = \frac{40}{27}$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಈ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಬಹುದು.

r = $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $s = \frac{u}{v}$, a, u ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು b, v ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿರಲಿ. $r \neq 0$ ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, r ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ $\frac{b}{a}$ ನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಎರಡೂ ಬದಿ $\frac{b}{a}$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ, $\frac{b}{a}.\left(\frac{a}{b}.x\right) = \frac{b}{a}.\frac{u}{v}$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು $x = \frac{bu}{av}$ ನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿತವಾಗಿರುವ ಗುಣವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.

   i) $315 + 115 = 430$ ii) $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{5} = \frac{27}{20}$ iii) $5 + 0 = 0 + 5 = 5$

   iv) $\frac{8}{9}\times 1 = \frac{8}{9}$ v) $\frac{8}{17} + \frac{-8}{17} = 0$ vi) $\frac{22}{23}\cdot\frac{23}{22} = 1.$

2. ಮುಂದೆ ನೀಡಿರುವ ಜೋಡಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

   i) $\frac{102}{201}, \frac{3}{4}$ ii) $\frac{-8}{13}, \frac{23}{27}$ iii) $\frac{-7}{9}, \frac{-18}{19}$

3. ಮುಂದೆ ನೀಡಿರುವ ಜೋಡಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

   i) $\frac{22}{45}, \frac{3}{4}$ ii) $\frac{-7}{13}, \frac{25}{27}$ iii) $\frac{-8}{9}, \frac{-17}{19}$

4. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿವಳಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿತರಣಾ ಗುಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ:

   i) $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ ii) $\frac{-4}{9}, \frac{6}{5}, \frac{11}{10}$ iii) $\frac{3}{8}, 0, \frac{13}{7}$

5. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   $\frac{8}{5}, \frac{6}{10}, \frac{-3}{8}, \frac{-16}{3}, \frac{-4}{1}.$

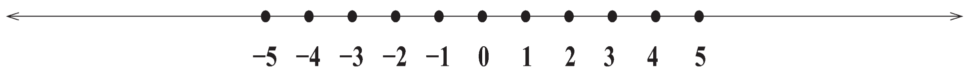
6. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   $2, \frac{6}{11}, \frac{-8}{15}, \frac{19}{18}, \frac{1}{1000}.$

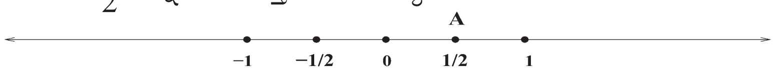
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸುವುದು

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸುವುದನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಒಂದು ಅನಂತ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಮಾನದ ಉದ್ದವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ, 0 ಯ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ. ಬಲ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ 1 ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಅಲ್ಲಿಂದ ಒಂದು ಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ 2 ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ ಇದೇ ರೀತಿ ಇತರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಎಡ ಬದಿಗೆ ಒಂದು ಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ –1 ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಮಾನ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಎಡ ಬದಿಗೆ ಚಲಿಸಿದರೆ –2 ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

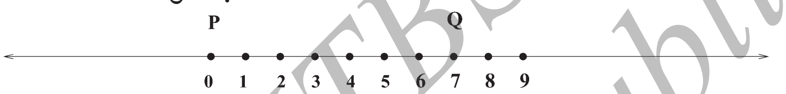
ಇತರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



ಇದೇ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{2}$ ನ್ನು 0 ಮತ್ತು 1 ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



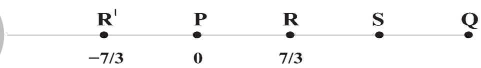
0 ಯಿಂದ 1 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ A ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ, $\frac{-1}{2}$ ನ್ನು –1 ರಿಂದ 0 ವರೆಗಿನ ಉದ್ದದ ಮಧ್ಯಭಾಗವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. $\frac{7}{3}$ ನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವುದು?



0 ಯಿಂದ 7 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಭಾಗ PQ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. PQ ನ್ನು 3 ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ; PR = RS = SQ (ಇಲ್ಲಿ ಕೆಲ ಜಾಮಿತೀಯ ರಚನೆಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಕಲಿಯುತ್ತೀರಿ.)

ಆಗ PR = $\frac{7}{3}$. ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ R, $\frac{7}{3}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. $-\frac{7}{3}$ ನ್ನು, P ಯ ಎಡಬದಿಗೆ

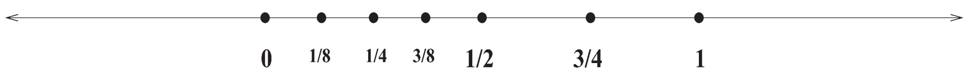
R^1P = PR ಆಗುವಂತೆ R^1ನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.



ಚಟುವಟಿಕೆ 5 :

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಮೇಲೆ $\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{-3}{8}$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ, ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. $\frac{2}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು (ಏಕೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?) ಒಂದು ದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸೂಚಿತವಾಗುತ್ತವೆ.



ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದಾಗ ಏನಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿರುವಿರಾ? ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ 0 ಮತ್ತು 1 ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿ $\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರುವಿರಾ? 0 ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ $\frac{1}{4}$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ; ಹಾಗೂ $\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು 1ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\frac{3}{8}$.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಾ? ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು Z ನಲ್ಲಿನ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕ್ರಮಬದ್ಧಗೊಳಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ad < bc ಆದರೆ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$ ಏಕೆಂದರೆ 48 < 49. ಅದೇ ರೀತಿ, $-\frac{7}{8} < -\frac{6}{7}$ ಏಕೆಂದರೆ, –49 < – 48.

$\frac{2}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{5}{8}$ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, $\frac{2}{7} < \frac{5}{8}$ ಇವುಗಳ ಸರಾಸರಿ, $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{5}{8}}{2} = \frac{51}{112}$

ಈಗ $\frac{51}{112}$, $\frac{2}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{5}{8}$ ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ $\frac{2}{7} < \frac{51}{112} < \frac{5}{8}$ ಇದನ್ನು

ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಇದು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸತ್ಯ. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ಇರುವಂತೆ $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿದರೆ, $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

$\left(\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}\right) = \dfrac{ad+bc}{2bd}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದೂ ಸಹ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆ. ನೀವು ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d}$. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ,

$\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} \implies a \times (2bd) < b(ad+bc)$

$\Rightarrow$ 2ad< ad+bc (b ರದ್ದುಪಡಿಸುವುದರಿಂದ)

$\Rightarrow$ ad < bc

$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (ಇದೇ ದತ್ತ)

ಇದೇ ರೀತಿ, ಮತ್ತೊಂದು ಅಸಮಾನತೆ (inequality) $\frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d}$ ಯನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{ad+bc}{2bd}$ ಯು $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಗಳ ನಡುವೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ, ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ. ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ m ಮತ್ತು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ m + 1ರ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಜವಲ್ಲ. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ನಂತರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಆದರೆ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಂತರದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಯುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಒಂದು ಸ್ಪಷ್ಟ ನಷ್ಟ.

ಆದ್ದರಿಂದ **ಲಾಭ:** ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು, ಇದು $rx = s$, (ಇಲ್ಲಿ $r \neq 0$ ಮತ್ತು s ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. **ನಷ್ಟ:** ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ **ಮುಂದಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವುದಿಲ್ಲ.**

ಅಭ್ಯಾಸ 7.4

1. ಈ ಮುಂದಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿ.
   $\frac{-8}{5}; \frac{3}{8}; \frac{2}{7}; \frac{12}{5}; \frac{45}{13}$
2. ಈ ಮುಂದಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:
   $\frac{3}{4}, \frac{7}{12}, \frac{15}{11}, \frac{22}{19}, \frac{101}{100}, \frac{-4}{5}, \frac{-102}{81}, \frac{-13}{7}.$
3. $\frac{2}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{5}$ ರ ನಡುವೆ ಒಂದೇ ಛೇದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 5 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
4. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ಮೊತ್ತ 10ನ್ನು ಮೀರದಂತೆ, 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಎಷ್ಟು ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?
5. $\frac{m}{n}$ ಮತ್ತು $\frac{p}{q}$ ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, $\frac{m}{n}$ ಮತ್ತು $\frac{p}{q}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\frac{m+p}{n+q}$ ಎಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ?
6. ಛೇದವು 80 ಆಗಿರುವಂತೆ, 0 ಮತ್ತು 1ರ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?
7. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ಮೊತ್ತವು 70 ಆಗಿರುವಂತೆ 0 ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?

ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಚಯ

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 2 ಆಗುವ ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರುವಿರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾದ ವಾದವೆಂದರೆ, $1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$ ಮತ್ತು 1 ಹಾಗೂ 2 ರ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿಲ್ಲ. ಆದರೂ, 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಅನೇಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಅನಂತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಹೀಗೆ, 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ರ ವರ್ಗವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದೇ ಎಂಬ ಆಲೋಚನೆ ಬರುವುದುಂಟು. ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ **ಇಲ್ಲ!** $r^2 = 2$ ಆಗುವಂತೆ, ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ r ಇಲ್ಲ.

ಇದರ ವಾದವೂ ಸರಳ. ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದಾದರೆ, $r^2 = 2$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ r ಇರಲಿ. r ನ್ನು $r = \frac{p}{q}$ ಆಗುವಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ, ಇದು ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರಲಿ. ಹೀಗೆ p ಮತ್ತು q ಗಳೆರಡೂ 1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. $p^2 = 2q^2$.

ಇದು p^2 ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ತೋರಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ p ಯು ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಏಕೆಂದರೆ, p ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ p^2 ಸಹ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಗೆ $p = 2a$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$p^2 = 2q^2$ ನಲ್ಲಿ $p = 2a$ ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ, $4a^2 = 2q^2$ ಅಂದರೆ $q^2 = 2a^2$. ಆಗ q ಸಹ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹೀಗೆ p ಮತ್ತು q ಗಳೆರಡೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 2ನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅದರೆ p ಮತ್ತು q ಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ $\frac{p}{q}$ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 2 ಆಗುವ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವೂ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? $\mathbb{Q}$ ಗಣದಲ್ಲಿ $x^2 = 2$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, ಗಣಿತಜ್ಞರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪದ್ಧತಿಗಿಂತಲೂ ಉತ್ತಮವಾದ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿದರು. ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, $r^2 = n$ ಆಗುವಂತೆ, ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ r ಇಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, $\sqrt{n}$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯತೆ ಇದೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ, $\sqrt{2}$ ಅಥವಾ ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನ 2 ಆಗುವ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. 2ರ ಘನ ಮೂಲವೆಂದು ಕರೆಯುವ ಇದನ್ನು $\sqrt[3]{2}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಪುನಃ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. $\mathbb{Q}$ ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದು $\mathbb{Q}$ ನ ರಚನೆಯ ಉತ್ತಮ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ: **ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಮತ್ತು **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.** ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳು ಅನಂತ. ಆದರೂ, ಒಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ವಿಭಿನ್ನ ಅನಂತಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದು ಕ್ರಮಣಿಕೆಯಿದೆ. ಅನಂತದ ಒಂದು ಅದ್ಭುತ ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೆ ನೀವು ಪ್ರವೇಶಿಸುವಿರಿ.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸುವುದು: ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹೋಲಿಕೆ ಕ್ರಮ.

ಉತ್ತಮ ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸುವ ಗುಣ: ಪ್ರತಿ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವು ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು: ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು: ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಗಳು.

ರದ್ಧತಿ ನಿಯಮ: ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿನ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ರದ್ದುಗೊಳಿಸಲು ಅವಕಾಶ ನೀಡುವ ನಿಯಮ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : p ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು q ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂತೆ, $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪ ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲಾಗದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರೂಪ: p ಮತ್ತು q ಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲದ $\frac{p}{q}$ ರೂಪ.

ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ: ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗದಂತೆ ಅದಕ್ಕೆ ಕೂಡಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ: ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶವು ಬರುವಂತೆ, ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೂಡಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ

ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ: ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗದ ಹಾಗೆ ಅದನ್ನು ಗುಣಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ: ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶವು ಬರುವಂತೆ, ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸಾಂದ್ರತಾ ಗುಣ: ಬೇರ್ಪಡಿಸಲಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿನ ದಟ್ಟವಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು: ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ; ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ, ಆದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ಗುಣವಿಲ್ಲ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅನುಪಾತ, ಇಲ್ಲಿ p ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು q ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ.
- ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆವೃತವಾಗಿದೆ.
- ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ, ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಮುಂದುವರಿದು, ಗುಣಾಕಾರವು, ಸಂಕಲನದ ಮೇಲೆ ವಿತರಣಾ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.
- ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ; 1 ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ.
- ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಪ್ರತಿ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.
- ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ, ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.
- ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೂ ಒಂದು ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿದೆ, ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮುಂದಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂಬುದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

✦✦✦✦✦

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. (i) Z ನಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ.
   (ii) Z ನಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ.
   (iii) Z ನಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನದ ಮೇಲೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ಗುಣ.
2. –6, –9, –123, 76, 85, –1000.
3. **i)** m = 2; **ii)** m = –10; **iii)** m = 14; **iv)** m =–77.
4. –333, –210, –26, –8, 0, 21, 33, 85, 2011.
5. 2011, 528, 364, 210, 85, 12, –58, –1024, –10000.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. $\frac{10}{14}, \frac{15}{21}, \frac{20}{28}, \frac{25}{35}, \frac{30}{42}, \frac{35}{49}, \frac{40}{56}, \frac{45}{63}, \frac{50}{70}, \frac{55}{77}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.
2. $\frac{22}{10}, \frac{33}{15}, \frac{44}{20}, \frac{55}{25}, \frac{66}{30}, \frac{77}{35}, \frac{88}{40}, \frac{99}{45}, \frac{110}{50}, \frac{121}{55}, \frac{132}{60}, \frac{143}{60}, \frac{154}{70}, \frac{165}{75}, \frac{176}{80}$.
3. $\frac{10}{1}, \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{10}$.
4. $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \frac{7}{9}, \frac{8}{10}, \frac{9}{11}, \frac{10}{12}$.
5. $\frac{3}{-2}$ ಮತ್ತು $\frac{-3}{2}$ ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಏಕೆಂದರೆ ಇವು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು. [ಛೇದವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ]
6. $0.9 = \frac{9}{10}$; $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1. i) ಸಂಕಲನದ ಆವೃತಗುಣ. ii) ಗುಣಾಕಾರದ ಆವೃತಗುಣ.
   iii) '0'ಯು ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ. iv) '1' ಇದು ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ.
   v) '0' ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ vi) '1' ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ

5. $\frac{-8}{5}, \frac{-6}{10}\left(=\frac{-3}{5}\right), \frac{3}{8}, \frac{16}{3}, \frac{4}{1}.$

6. $\frac{1}{2}, \frac{11}{6}, \frac{-15}{8}, \frac{18}{19}, 1000.$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.4

2. $\frac{-13}{7} < \frac{-102}{81} < \frac{-4}{5} < \frac{7}{12} < \frac{3}{4} < \frac{101}{100} < \frac{22}{19} < \frac{15}{11}.$

3. $\frac{13}{30}, \frac{14}{30}, \frac{15}{30}, \frac{16}{30}, \frac{17}{30}.$ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. (ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು ಸಮನಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು)

4. 15 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{5}.$

5. $\frac{m}{n}$ ಮತ್ತು $\frac{p}{q}$ ಪರಸ್ಪರ ಭಿನ್ನವಾದಾಗ $\frac{m+p}{n+q}$ವು , $\frac{m}{n}$ ಮತ್ತು $\frac{p}{q}$ ಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ ಆದಾಗ, $\frac{m+p}{n+q} = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

6. 79

7. 69.

✦ ✦ ✦

ಘಟಕ – ೮
ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ನೀವು ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ :

- ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣದ ಅರ್ಥ.
- ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.
- ಒಂದು ವಿವರವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು.
- ದೊರೆತ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡುವುದು.

ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಹಗುಣಕವಿರುವ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸುವ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಮತ್ವವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಗಣಿತ ವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ ನಿರೂಪಣೆಯು ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $3x-5=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತಹ 'x'ನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿದಾಗ ನಾವು ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಇಲ್ಲದಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಬದಲಾಗಿ, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $x=\frac{5}{3}$, ಎನ್ನುವುದು $3x - 5 = 0$ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು **ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುವರು.

$2x-5=x+6$ ಗಳಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಇದು ಕೂಡ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವೇ. ಆದರೇ ಇದು ಆದರ್ಶರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು $x-11=0$ ಎಂದು ಆದರ್ಶ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬಹುದು.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯಾಗಣದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಮೂಲಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯದಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಬೇರೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾಗಣದಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು, ಇದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. $x^2-2=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲದಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸಬಹುದು. ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದರ ಒಂದು ಉದ್ದೇಶವೇನೆಂದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಸಮೀಕರಣ $x^2 + 1 = 0$ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಇನ್ನೂ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಾದ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿ (ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ)ಯಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ನೀವು ಕಲಿಯುವಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿಂದ ಪಡೆಯುವಿರಿ ಎಂದು ನಮೂದಿಸುವುದು ಬಹಳ ಪ್ರಮುಖವಾದ ವಿಷಯ.

ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದರೆ; ಆ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದೆಯೆಂದರ್ಥ. ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಘಾತವು ಒಂದು ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು **ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ**ವೆನ್ನಬಹುದು. ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದ ಇದ್ದು, ಅದರ ಘಾತ ಒಂದು ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. **ಅಥವಾ** ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಚರಾಕ್ಷರದಿಂದಾದ ಸಮೀಕರಣವೇ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ. ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶರೂಪವು $ax + b = 0, (a \neq 0)$ ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ x ಚರಾಕ್ಷರ ಮತ್ತು a, b ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $x - 9 = 0$; $5x - 30 = 0$; $\frac{3}{5}x + \frac{1}{3} = 0$

ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಎಂದರೇನು?

ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆ ಚರಾಕ್ಷರದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸಮ ಆಗದೇ ಇರಬಹುದು. ಚರಾಕ್ಷರದ ಕೆಲವೇ ಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಬೆಲೆಗಳು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿಸಬಹುದು. ಚರಾಕ್ಷರದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ **ಮೂಲಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಅಥವಾ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮತ್ವವು ನಿಜ ಆಗುವುದೊ ಅದನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಅಥವಾ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ **ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದಂತೆ, ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ $ax + b = 0$ ನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲದ ಅಸ್ತಿತ್ವವು ಹುಡುಕುತ್ತಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. a, b ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ 'b' ಯು 'a'ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದೇ ಇದ್ದಾಗ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮೂಲಗಳಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸುವ ಮೂಲ ಉದ್ದೇಶವೇ ಇದು. ಈ ಹಿನ್ನೆಲೆಯನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಹಗುಣಕವಿರುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾದ $ax + b = 0$, $a \neq 0$ ವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆದಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದಹಾಗೆ, ಇದರ ಮೂಲವನ್ನು $x = -b\,a^{-1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು, ಇಲ್ಲಿ a^{-1}, 'a' ನ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ. ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣದಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳು ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾದಲ್ಲಿ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಇದು ನಿಜವೆಂದು ನೀವು ನಂತರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಿರಿ. (ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಗುಣಲಬ್ಧ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಇದು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ).

ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷವುಳ್ಳ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ

$5x - 15 = 0$ ಸಮೀಕರಣ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದರಲ್ಲಿ $5x - 15 = 0$ ಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಥವಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಿರಿ.

1. ಸಮವಾದ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಮೊತ್ತವು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$a = b$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, ಯಾವುದೇ c ಗೆ, $a + c = b + c$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $x - 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಮಪದ 5ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಸಮತೆಯನ್ನು ಕಾಪಾಡುತ್ತವೆಯೆಂದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳೇ ಹೇಳುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $(x - 5) + 5 = 0 + 5$; $x = 5$. ಇಲ್ಲೂ a, b, c ಗಳು ಬೀಜಾಕ್ಷರ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿರಬಹುದೆಂಬುದು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಮತ್ತು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶ.

ಆದ್ದರಿಂದ $3x + 2 = 5 - x$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ;

$(3x + 2) + (x - 5) = (5 - x) + x - 5 = 0$ ಅಥವಾ $4x - 3 = 0$. ಈ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಹಾಗೂ ಇತರ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರ ವಹಿಸುತ್ತವೆ.

2. ಸಮವಾದ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಸಮ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಉಳಿದ ಭಾಗಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $a = b$ ಆದರೆ $a - c = b - c$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ. $x + 5 = 2x - 6$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, $(x - 6)$ ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ಕಳೆದರೆ, ನಮಗೆ $11 = x$ ಬರುತ್ತದೆ.

ವ್ಯವಕಲನವು ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಲ್ಲಿ, ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ **1** ಮತ್ತು **2** ರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದಂತೆ, ಬಹುಪದಗಳಿಗೂ

ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅಂತೆಯೇ ಯಾವ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆಯೋ ಅವು ಬಹುಪದಗಳಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ: $x - 15 = 0$.

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ, 15ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 1ರ ಪ್ರಕಾರ

$(x - 15) + 15 = 0 + 15 \Rightarrow x - 15 + 15 = 15 \Rightarrow x = 15$ ಇದು x ನ್ನು 15ಕ್ಕೆ ಮಿತಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $x + 9 = 20$.

ಪರಿಹಾರ : ಇದು ಆದರ್ಶರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಎರಡೂ ಕಡೆ 20ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಆದರ್ಶರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $(x + 9) - 20 = 20 - 20$ ಅಥವಾ $x + 9 - 20 = 0$; ಅಥವಾ $x - 11 = 0$. ಈಗ ಇದು ಆದರ್ಶರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ 11ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ, $x - 11 + 11 = 0 + 11$; ಅಥವಾ $x = 11$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡೂ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಇನ್ನೂ ಕಡಿಮೆ ಸಾಲುಗಳಿಗೆ ಇಳಿಸಬಹುದು. ಅದು ಹೇಗೆಂದರೆ,

ಎರಡೂ ಕಡೆ 9ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, $(x + 9) - 9 = 20 - 9$; $x + 9 - 9 = 11$. ಅಥವಾ $x = 11$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $2x - 3 = (x + 8)$.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಇರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ $(x - 3)$ ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆಯಿಂದ ಕಳೆದರೆ,

$(2x - 3) - (x - 3) = (x + 8) - (x - 3)$ ಇದು $x = 11$ ಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ.

3. ಸಮವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಮ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ $a = b$ ಇದ್ದಾಗ $ac = bc$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $\frac{x}{2} = 1$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$\frac{x}{2} \times 2 = 1 \times 2$; $x = 2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

4. ಸಮವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಸಮ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದು ಹೇಳುವುದೇನೆಂದರೆ, $a = b$ ಮತ್ತು $c \neq 0$ ಆದಾಗ, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ಭಾಗಾಕಾರವು ಗುಣಲಬ್ಧ ವಿಲೋಮಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ ಹೇಳಿಕೆ 4, ಹೇಳಿಕೆ 3 ರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : $\frac{x}{3} = 9$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಎರಡೂ ಕಡೆ 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, $\frac{x}{3} \times 3 = 9 \times 3$

$x = 27$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $\frac{2x}{9} = 5$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಎರಡೂ ಕಡೆ $\frac{9}{2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅಥವಾ ಮೊದಲು 9 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ನಂತರ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ, $\frac{2x}{9} \times \frac{9}{2} = 5 \times \frac{9}{2}$; $x = \frac{45}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $15x = 120$.

ಪರಿಹಾರ : $15x = 120$ರ ಎರಡೂ ಕಡೆ 15ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$\frac{15x}{15} = \frac{120}{15} \Rightarrow x = 8$ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $13y=100$.

ಪರಿಹಾರ : ಎರಡೂ ಕಡೆ 13ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\frac{13y}{13} = \frac{100}{13}$ ಇದರಿಂದ

$y = \frac{100}{13}$ ನ್ನು ಪಡೆಯುವೆವು.

ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಹಂತ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು. ಉತ್ತರವಾಗಿ ಪಡೆದದ್ದನ್ನು ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಸರಿಹೊಂದುವುದೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಹೇಳಿಕೆಯ ನೈಜತೆಯನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 8 : 2 ಎಂಬುದು $3x - 5 = 19$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x = 2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ನಮಗೆ ಸಿಗುವುದು. ಎಡಗಡೆಯ ಬೆಲೆ (*LHS*) $3x - 5 = 3(2) - 5 = 6 - 5 = 1$, ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಗಡೆಯ ಬೆಲೆ (*RHS*) 19 ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ, $1 \neq 19$. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 2$ ಆದರೆ, ಎಡಬೆಲೆಯು ಬಲಭಾಗದ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 2$ ಎಂಬುದು $3x - 2 = 19$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 9 : 7 ಎಂಬುದು $2x - 4 = 10$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x = 7$ ಎಂಬುದನ್ನು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ.

(*LHS*) ಎಡಬೆಲೆ $\Rightarrow$ $2x - 4 = 2 \times 7 - 4 = 14 - 4 = 10$ ಮತ್ತು ಬಲಬೆಲೆ $= 10$

(ದತ್ತಾಂಶ) ಈಗ, ಎಡಬೆಲೆ = ಬಲಬೆಲೆ ಸಮವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 7$, $2x - 4 = 10$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ :$2x - 3 = 7$.

ಪರಿಹಾರ : $2x - 3 + 3 = 7 + 3$ ಸಿಗುತ್ತದೆ. $2x = 10$ ಈಗ, ಎರಡೂ ಬದಿ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\frac{2x}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ಉತ್ತರ ಸರಿ ಇದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡೋಣ. $x = 5$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $2x - 3 = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$; ಬಲಬದಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಅನೇಕ ಹಂತಗಳನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. $2x - 3 = 7$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದನ್ನು $2x = 7 + 3$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಬೆಲೆ 3ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ಕೂಡಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆಯಷ್ಟೆ. ಈ ಹಂತವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸದೇ, ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿ ಬರೆಯಬಹುದು $2x - 3 + 3 = 2x$ $- 3$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವುದೇ ಈ ಹಂತ. ಅತೀ ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ಸುಲಭ ವಿಧಾನವೇ ಇದು. ಬೈಜಿಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $4x - 3 = 3x + 2$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, $3x$ ನ್ನು ಎಡಬದಿಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ, ಮತ್ತು -3ನ್ನು ಬಲಬದಿಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ $4x - 3x = 3 + 2 \Rightarrow x = 5$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $5x - 12 = 10 - 6x$

ಪರಿಹಾರ : $-6x$ಅನ್ನು ಎಡಬದಿಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ ಮತ್ತು -12ನ್ನು ಬಲಬದಿಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ

$\Rightarrow 5x + 6x = 10 + 12$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\Rightarrow 11x = 22$ ಎರಡೂ ಬದಿ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $\frac{11x}{11} = \frac{22}{11}$ $x = 2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವ ನಿಯಮ : ಒಂದು ಪದ ಅಥವಾ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಬದಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ, ಆ ಪದ ಅಥವಾ ಬೆಲೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ $-6x$ ಎಂಬುದು $+6x$ ಹಾಗೂ -12 ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು $+12$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 12 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $8x - 3 = 9 - 2x$.

ಪರಿಹಾರ : ಬೀಜಪದಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬದಿಗೂ, ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬದಿಗೂ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ, $8x + 2x = 9 + 3 \Rightarrow 10x = 12$ ಅಥವಾ 10ರಿಂದ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $\frac{10x}{10} = \frac{12}{10} \Rightarrow x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 13 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $8x + 9 = 3(x - 1) + 7$.

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಗಬಹುದು. $8x + 9 = 3x - 3 + 7 = 3x + 4$ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವುದರಿಂದ, $8x - 3x = 4 - 9 \Rightarrow 5x = -5. \Rightarrow$ 5 ರಿಂದ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $\Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{-5}{5} \Rightarrow x = -1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ತಾಳೆ ನೋಡುವುದು : ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿ $8x + 9 = 8(-1) + 9 = -8 + 9 = 1$ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿ $3(x - 1) + 7 = 3(-1-1) + 7$

$$= 3(-2) + 7$$

$$= -6 + 7 = 1$$

ಇಲ್ಲಿ, ಎಡಬೆಲೆ = ಬಲಬೆಲೆ ಇದರಿಂದ $x = -1$ ಎಂಬುದು ಉತ್ತರವೆಂದು ಖಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 14 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $\frac{2}{3}x = \frac{3}{8}x + \frac{7}{12}$.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ 3, 8, 12ರ ಲಸಾಅ 24. ಲಸಾಅ (*LCM*) 24ರಿಂದ ಎರಡೂ ಬದಿ ಗುಣಿಸಿದಾಗ $\left(\frac{2}{3}x\right)24 = \left(\frac{3}{8}x + \frac{7}{12}\right)24 \Rightarrow 16x = 9x + 14$ ಎಂದು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು.

$\Rightarrow 16x - 9x = 14$ ($9x$ನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ)

$\Rightarrow 7x = 14$

$\Rightarrow x = 2$ (7 ರಿಂದ ಎರಡೂ ಬದಿ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

$x = 2$ ಎಂಬುದು ಉತ್ತರವೆಂದು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ತಾಳೆನೋಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 15 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $\frac{2x+7}{5} - \frac{3x+11}{2} = \frac{2x+8}{3} - 5$.

ಪರಿಹಾರ : ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಛೇದದಲ್ಲಿ 2, 3, 5 ಇವೆ. ಅವುಗಳ ಲಸಾಅ 30 ಆಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಲಸಾಅ 30 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

ಹೀಗೆ, $\left(\frac{2x+7}{5}\right) \times 30 - \left(\frac{3x+11}{2}\right) \times 30 = \left(\frac{2x+8}{3}\right) \times 30 - (5 \times 30)$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಸರಳೀಕರಿಸಿದೆ;

$$\Rightarrow 6(2x + 7) - 15(3x + 11) = 10(2x + 8) - 150$$

$$\Rightarrow 12x + 42 - 45x - 165 = 20x + 80 - 150$$

ಸೂಕ್ತ ಪದಗಳನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ $12x - 45x - 20x = -42 + 165 + 80 - 150$

$\Rightarrow -53x = 53 \Rightarrow x = -1$ (–53 ರಿಂದ ಎರಡೂ ಬದಿ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = -1$ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ಎಡಬದಿಯ ಬೆಲೆಯು ಬಲಬದಿಯ ಬೆಲೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆಯೇ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 16 : ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ : $(x + 4)^2 - (x - 5)^2 = 9.$

ಪರಿಹಾರ : ಇದನ್ನು ನೋಡಿದಾಕ್ಷಣ, ಇದು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವಲ್ಲವೇನೋ ಎಂದು ಅನಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ

$x^2 + 8x + 16 - x^2 + 10x - 25 = 9$

$\Rightarrow 18x - 9 = 9$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $\Rightarrow 18x = 18$ (ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ)

$\Rightarrow x = 1$ (18ರಿಂದ ಎರಡೂ ಬದಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ), $x = 1$ ಎಂಬುದು ಉತ್ತರವೆಂದು ಅತಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಆಲೋಚಿಸಿ :

1) $ax + b = 0, a \neq 0$ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ $x = \frac{-b}{a}$ ಎಂಬುದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರ. x ಮತ್ತು y ಎಂಬ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ $ax + by + c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು ಸಹ ಒಂದು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವೇ. ಆದರೆ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಅವುಗಳಿಗೆ (x, y) ಎಷ್ಟು ಬೆಲೆಗಳಿವೆ? a, b, cಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು (x, y) ಯಾವಾಗಲೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ನ್ನು ನೀವು ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :

i) $x + 3 = 11$ *ii)* $y - 9 = 21$

iii) $10 = z + 3$ *iv)* $\frac{3}{11} + x = \frac{9}{11}$

v) $10x = 30$ *vi)* $\frac{s}{7} = 4$

vii) $\frac{3x}{6} = 10$ *viii)* $1.6 = \frac{x}{1.5}$

ix) $8x - 8 = 48$ *x)* $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{15}$

xi) $\frac{x}{5} = 12$ *xii)* $\frac{3x}{5} = 15$

xiii) $3(x + 6) = 24$ *xiv)* $\frac{x}{4} - 8 = 1$

xv) $3(x + 2) - 2(x - 1) = 7$

2. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

i) $5x = 3x + 24$ *ii)* $8t + 5 = 2t - 31$

iii) $7x - 10 = 4x + 11$ *iv)* $4z + 3 = 6 + 2z$

v) $2x - 1 = 14 - x$ *vi)* $6x + 1 = 3(x - 1) + 7$

vii) $\frac{2x}{5} - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} + 1$ *viii)* $\frac{x-3}{5} - 2 = \frac{2x}{5}$

ix) $3(x + 1) = 12 + 4(x - 1)$ *x)* $2x - 5 = 3(x - 5)$

xi) $6(1 - 4x) + 7(2 + 5x) = 53$ *xii)* $3(x + 6) + 2(x + 3) = 64$

xiii) $\frac{2m}{3} + 8 = \frac{m}{2} - 1$ *xiv)* $\frac{3}{4}(x-1) = (x-3)$

ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳು:

ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 17 : ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಳರಷ್ಟನ್ನು 11 ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ 81 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಕೆಲವು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1 : ಒಂದು ಸರಿಯಾದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಎಂದಿರಲಿ. x ನ ಬೆಲೆಯು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿಲ್ಲ. ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಬೆಲೆ x ನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸೋಣ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ x ನ ಏಳರಷ್ಟು ಎಂದಾಗ ಅದು $7x$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 11 ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ $7x + 11$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆಗ, ಸಮಸ್ಯೆಯು $7x + 11 = 81$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಇದು ಒಂದು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವಲ್ಲವೆ?

ಹಂತ 2 : ಈ ಸಮೀಕರಣ $7x + 11 = 81$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. 11 ನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ, $7x = 81 - 11$

$\Rightarrow 7x = 81 - 11 \Rightarrow 7x = 70 \Rightarrow x = 10$ (ಎರಡೂ ಕಡೆ 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

ಹಂತ 3 : ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $x = 10$ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.

ಆ ಅಂಕಿಯು 10 ಆದಾಗ, ಅದರ 7 ರಷ್ಟು $7 \times 10 = 70$ ಆಗುತ್ತದೆ. 70 ಕ್ಕೆ 11 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ 81 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ದತ್ತಾಂಶವು ಹೇಳುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 10$ ಎನ್ನುವುದು ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ.

ಉದಾಹರಣೆ 18 : ಸಿರಿಯ ತಾಯಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು, ಸಿರಿಯ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ 3 ರಷ್ಟು ಇದೆ. 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ, ಅವರ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೊತ್ತ 66 ವರ್ಷಗಳಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೂ ಅನೇಕ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಸಿರಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು x ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಆಕೆಯ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು $3x$ ಆಗುತ್ತದೆ. 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ, ಸಿರಿಯ ವಯಸ್ಸು ಮತ್ತು ಸಿರಿಯ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x + 5$ ಮತ್ತು $3x + 5$ ವರ್ಷಗಳಾಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ ಇವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೊತ್ತ 66 ವರ್ಷ ಆಗಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(x + 5) + (3x + 5) = 66$ ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ, ಇದರಲ್ಲಿ x ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭ. $4x + 10 = 66$ ನ್ನು ಸುಲಭೀಕರಿಸಿದಾಗ $4x = -10 + 66$; $4x = 56$ ಅಥವಾ $x = 14$ (ಎರಡೂ ಬದಿ 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ). ಇದರರ್ಥ, ಸಿರಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು 14 ವರ್ಷಗಳು. ಆಕೆಯ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು $14 \times 3 = 42$ ವರ್ಷಗಳು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆಯೇ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಬೇಕು. 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಸಿರಿಯ ವಯಸ್ಸು $14 + 5 = 19$ ವರ್ಷಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆಕೆಯ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು $42 + 5 = 47$ ವರ್ಷಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಈಗ $19 + 47 = 66$ ವರ್ಷಗಳು. ಇದು ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮನಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಿರಿಯ ವಯಸ್ಸು 14 ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ಆಕೆಯ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು 42 ವರ್ಷಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 19 : 3 ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 252 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಆ ಮೂರು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕದು x ಎಂದಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $x + 2$ ಮತ್ತು $x + 4$ ಆಗುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2. ದತ್ತಾಂಶದಂತೆ, ಆ ಸಮೀಕರಣವು $x + (x + 2) + (x + 4) = 252$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\Rightarrow 3x + 6 = 252$

$\Rightarrow 3x = 252 - 6$ (ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ)

$\Rightarrow 3x = 246$

$\Rightarrow x = 82$ (3 ರಿಂದ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತಹ ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ x

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $x = 82$

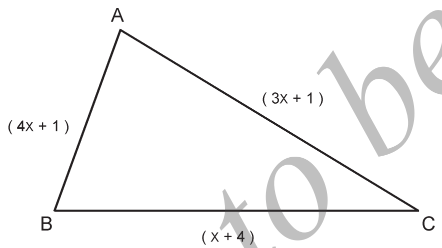
$x + 2 = 82 + 2 = 84$

$x + 4 = 82 + 4 = 86$

ಈಗ, $82 + 84 + 86 = 252$ ಎಂಬುದು ಬಂದ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 20 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ 14cm ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳು $x + 4$, $3x + 1$ ಮತ್ತು $4x + 1$ ಎಂದಾದರೆ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :



ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅವುಗಳ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳು $x + 4$, $3x + 1$ ಮತ್ತು $4x + 1$ ಎಂದಾಗಿವೆ.

ಈಗ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ $(x + 4) + (3x + 1) + (4x + 1) = 8x + 6$ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು 14 ಆದರೆ, ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ $8x + 6 = 14$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$8x = 14 - 6$ (+ 6ನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ)

$8x = 8$, $x = 1$ (8 ರಿಂದ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ಬಾಹುಗಳು $x + 4 = 1 + 4 = 5cm$

$3x + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4\ cm$

$4x + 1 = 4 \times 1 + 1 = 5\ cm$ ಆಗಿವೆ.

$\therefore$ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಬಾಹುಗಳು 5 cm 4 cm ಮತ್ತು 5 cm ಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಮಸ್ಯೆಯ ಗಣಿತ ಸೂತ್ರೀಕರಣವು ಭೌತಿಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯ. ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ x, $x + 1$ ಮತ್ತು $x + 3$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ 10 ಮಾನಗಳು ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಕೇಳಿದ್ದೇ ಆದಲ್ಲಿ, $x + (x + 1) + (x + 3) = 10$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ ಬರೆದು $x = 2$ ಎಂದು ಬಿಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2, 3, 5 ಆಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ, ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ 2, 3, 5 ಮಾನಗಳ ತ್ರಿಭುಜವೇ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು **ತ್ರಿಭುಜ ಅಸಮತೆ**ಯನ್ನು ಸರಿಹೊಂದಬೇಕು. ಆ ತ್ರಿಭುಜ ಅಸಮತೆಯು **"ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು"** ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಂದಂತಹ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೂಲಂಕಶವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿ ಅವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಸಮಂಜಸವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯ. ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯುವಾಗ ಇದು ಬಹಳ ಪ್ರಮುಖವಾದುದು.

ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳು ವಿಸ್ಮಯಕಾರಿಯೇನಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವೇ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಆಟ. ಗಣಿತದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಿಯಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೋ ಅಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೊನೆಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಫಲಿತಾಂಶವು ಸರಿಯೇ ತಪ್ಪೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಯಾವ ನಿಯಮವೂ ತಿಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಪುನಃ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಅವಲೋಕಿಸಿ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಬಂದ ಉತ್ತರವು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಉತ್ತರವೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 21 : P ಬಿಂದು AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $AP = 3PB$ ಆಗಿದೆ. $AB = 10$ cm ಆದರೆ AP ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

P ಯು A ಮತ್ತು Bಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $AB = AP + PB$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, $3PB + PB = 4PB = 10$

$$\therefore PB = \frac{10}{4}$$

$$PB = \frac{5}{2}$$

$$\therefore AP = 3\ PB$$

$$= 3 \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{15}{2}\ cm$$

(ಇಲ್ಲಿ, $PB = x$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ, ನೇರವಾಗಿ PB ಯನ್ನೇ ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿ ತೆಗೆದು PB ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ.)

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 :

ಈ ಹಿಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವು A ಹಾಗೂ B ಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವು A ಯ ಎಡಗಡೆಯಲ್ಲಿರಬಹುದು ಅಥವಾ B ಯ ಬಲಗಡೆಯಲ್ಲಿರಬಹುದು. ಈ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ. ಒಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರಬಹುದು. ಆದರೆ ಉದ್ದವು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಇದು ಬರುವ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 22 : ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತವು 12 ಆಗಿದೆ. ಮೂಲ ಅಂಕೆಯ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 54ರಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದಾದಲ್ಲಿ, ಆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯು x ಎಂದಿರಲಿ. ಹತ್ತಿರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯು y ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು $10y + x$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, $x + y = 12$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ, ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು $10x + y$ ಆಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ,

$10x + y = 10y + x + 54$

$\Rightarrow 10x + y - 10y - x = 54$

$\Rightarrow 9x - 9y = 54$

$\Rightarrow 9(x - y) = 54$ (ಎರಡೂ ಕಡೆ 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ)

$\Rightarrow x - y = 6$

ಈಗ ನಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ. $x + y = 12$ ಮತ್ತು $x - y = 6$ ಕೂಡಿದಾಗ $2x = 18 \Rightarrow x = 9$ ಆಗಿದೆ. $y = x - 9$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $y = 12 - 9 = 3$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು 39 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ತಾಳೆ ನೋಡಿದಾಗ, ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 93 ಆಗುತ್ತದೆ. $93 = 39 + 54$ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆನೋಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 22 : ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ: ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿ x ಮತ್ತು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿ y ಅಗಿರಲಿ. ಆಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು $10y + x$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ. $x + y = 12$ ಅಂಕಿಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆ $10x+y$ ಎರಡನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ $10x+y = 10y + x + 54$ ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದಾಗ $9(x-y) = 54$ ಅಥವಾ $x-y = 6$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$x+y=12$ ಮತ್ತು $x-y = 6$ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುವದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ $(x+y)+(x-y)=12+6=18$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $2x=88$ ಅಥವಾ $x=9$. $y = 12-x$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ 39 ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 23 : 3:2 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 75 ಆಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : 3:2 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $3x$ ಮತ್ತು $2x$ ಆಗಿರಲಿ

ನಮಗೆ $3x + 2x = 75$ ಎಂಬುದು ದತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$\therefore 5x = 75 \qquad \Rightarrow x = 15$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : $3x = 45$ ಮತ್ತು $2x = 30$ ಆಗಿವೆ.

ತಾಳೆ ನೋಡೋಣ : $\frac{45}{30} = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $45 + 30 = 75$.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ '4' ನ್ನು ಕೂಡಿ, ಬರುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ 30 ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?
2. ಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 219 ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 30 ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ, ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರರಷ್ಟರಿಂದ 14 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮವಿರುವುದು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 3ರಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 5ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 16 ಆಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 9 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವು 81 ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಪ್ರಕೃತಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು ಸಾಹಿಲ್‌ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸಿನ 6 ಪಟ್ಟು. 15 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಪ್ರಕೃತಿಯ ವಯಸ್ಸು ಸಾಹಿಲ್‌ನ ವಯಸ್ಸಿನ 3 ಪಟ್ಟು ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅವರಿಬ್ಬರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಅಹ್ಮದ್‌ನ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು, ಅಹ್ಮದ್‌ನ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೂರರಷ್ಟು ಇದೆ. 12 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ, ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?
8. ಸಂಜು ತನ್ನ ಸಹೋದರ ನಿಶುವಿಗಿಂತ 6 ವರ್ಷ ಹಿರಿಯ. ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೊತ್ತ 28 ವರ್ಷಗಳಾದರೆ, ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?
9. ವಿಜಿಯು ತನ್ನ ಸಹೋದರ ದೀಪುವಿಗಿಂತ ಎರಡರಷ್ಟು ಹಿರಿಯ. ಅವರ ವಯಸ್ಸಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 11 ವರ್ಷಗಳಾದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?
10. ಶ್ರೀಮತಿ ಜೋಸೆಫಳು ತನ್ನ ಮಗಳು ಬಿಂದುವಿಗಿಂತ 27 ವರ್ಷ ಹಿರಿಯವಳು. 8 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆಕೆಯು ತನ್ನ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ ಎರಡರಷ್ಟು ವಯಸ್ಸನ್ನು ಹೊಂದುವಳು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?
11. 16 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ, ಲೀನಾಳು ತನ್ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ 3ರಷ್ಟು ವಯಸ್ಸಿನವಳಾಗುವಳು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವಳ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

12. ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವು ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಗಿಂತ 5 *cm* ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಉದ್ದವನ್ನು 5 *cm* ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ, ಅಗಲವನ್ನು 2 *cm* ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡಿದರೆ ಆ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 74 *cm* ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೂಲ ಆಯತದ ಉದ್ದಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರ ಮೈದಾನದ ಉದ್ದವು ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ. ಆ ತೋಟದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 288 ಮೀಟರುಗಳಾದರೆ ಆ ಮೈದಾನದ ಉದ್ದಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಸೃಷ್ಟಿಯ ಸಂಬಳವು ಅಜಾರ್‌ನ 4ರಷ್ಟು ಸಂಬಳಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಿಗೂ ಬರುವ ಸಂಬಳವು ರೂ. 3750/– ಗಳಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಪಡೆಯುವ ಸಂಬಳವೆಷ್ಟು?

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

ಸಮೀಕರಣ : ಎರಡು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಮತ್ವವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಗಣಿತ ವಾಕ್ಯ.

ಪರಿಹಾರ ಅಥವಾ ಮೂಲ: ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆ.

ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ : ಚರಾಕ್ಷರದ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 1 ಇರುವ ಸಮೀಕರಣ.

ತಾಳೆ ನೋಡುವುದು : ಪರಿಹಾರವು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಕ್ರಮ.

ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವಿಕೆ : ಸಮತ್ವವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿನ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಬದಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವುದು; ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ ಆ ಪದದ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದು.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

* ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.
* ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದೇ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದದ್ದು.
* ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕನುಸಾರ ಸಿಕ್ಕ ಮೂಲಗಳು ಅಥವಾ ಉತ್ತರಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಭೌತಿಕವಾಗಿ ಸರಿಹೊಂದಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಸಿಕ್ಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಸಂದರ್ಭಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಸಮಂಜಸವಾಗಿ ಸರಿಹೊಂದುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಬೇಕು.

✦✦✦✦✦

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. (i) $x = 8$ (ii) $y = 30$ (iii) $z = 7$

 (iv) $x = \frac{6}{11}$; (v) $x = 3$ (vi) $s = 28$

 (vii) $x = 20$ (viii) $x = 2.4$ (ix) $x = 7$

 (x) $x = \frac{-8}{5}$ (xi) $x = 60$ (xii) $x = 25$

 (xiii) $x = +2$ (xiv) $x = +36$ (xv) $x = -1$

2. (i) $x = 12$ (ii) $t = -6$ (iii) $x = 7$

 (iv) $z = \frac{3}{2}$ (v) $x = 5$ (vi) $x = 1$

 (vii) $x = -25$ (viii) $x = -13$ (ix) $x = -5$

 (x) $x = 10$ (xi) $x = 3$ (xii) $x = 8$

 (xiii) $m = -54$ (xiv) $x = 9$.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. 6
2. 71, 73, 75
3. 11
4. 7
5. 45 ಮತ್ತು 36
6. ಪ್ರಕೃತಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು 60 ವರ್ಷ, ಸಾಹಿಲ್‌ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು 10 ವರ್ಷ
7. ಅಹಮದ್‌ನ ವಯಸ್ಸು 12 ಮತ್ತು ಅವನ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು 36 ವರ್ಷಗಳು.
8. ನಿಶುವಿನ ವಯಸ್ಸು 11 ಮತ್ತು ಸಂಜುವಿನ ವಯಸ್ಸು 17 ವರ್ಷಗಳು.
9. ದೀಪುವಿನ ವಯಸ್ಸು 11 ಮತ್ತು ವಿಜಿಯ ವಯಸ್ಸು 22 ವರ್ಷಗಳು.
10. ಬಿಂದುವಿನ ವಯಸ್ಸು 19 ಮತ್ತು ಶ್ರೀಮತಿ. ಜೋಸೆಫ್‌ರ ವಯಸ್ಸು 46 ವರ್ಷಗಳು.
11. 8 ವರ್ಷಗಳು
12. 25cm ಮತ್ತು 15cm
13. 96m ಮತ್ತು 48m
14. ₹ 3,000 ಮತ್ತು ₹ 750.

ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಲೆಕ್ಕಗಳು

1. ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗಿನ ಆಟ

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ:

   (a) 456 ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ

   (ಎ) $(4 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1)$ (ಬಿ) $(4 \times 100) + (6 \times 10) + (5 \times 1)$

   (ಸಿ) $(5 \times 100) + (4 \times 10) + (6 \times 1)$ (ಡಿ) $(6 \times 100) + (5 \times 10) + (4 \times 1)$

   (b) ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು ಬಳಸುವುದು

   (ಎ) ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ (ಬಿ) ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿ

   (ಸಿ) ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿ (ಡಿ) ಆಧಾರ–6 ಪದ್ಧತಿ

   (c) $\overline{abc}$ ಒಂದು 3–ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $n = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$ ಯಾವಾಗಲೂ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

   (ಎ) 8 (ಬಿ) 7 (ಸಿ) 6 (ಡಿ) 5

   (d) $\overline{abc}$ ಒಂದು 3–ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $n = \overline{abc} - \overline{acb} + \overline{bac} - \overline{bca} + \overline{cab} - \overline{cba}$ ಯಾವಾಗಲೂ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

   (ಎ) 12 (ಬಿ) 15 (ಸಿ) 18 (ಡಿ) 21

   (e) $1K \times K1 = K2K$ ಆದರೆ, 'K' ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ

   (ಎ) 1 (ಬಿ) 2 (ಸಿ) 3 (ಡಿ) 4

   (f) 345111 ನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ

   (ಎ) 15 (ಬಿ) 12 (ಸಿ) 9 (ಡಿ) 3

   (g) 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ 3AB4 ರೂಪದ (A ಮತ್ತು B ಕೆಲವು ಅಂಕಿಗಳು) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

   (ಎ) 0 (ಬಿ) 4 (ಸಿ) 7 (ಡಿ) 9

2. 2, 3, 4, 5, 6 ಈ ಪ್ರತಿ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ 5–ಅಂಕಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

3. 2, 3, 4, 5, 6 ಈ ಪ್ರತಿ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ 5–ಅಂಕಿಯ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?

4. A > 0, ಆಗಿರುವಂತೆ 49A ಮತ್ತು A49 ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. A ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 3 ಮತ್ತು 5 ನ್ನು ಒಂದು ಸಾರಿಯಾದರೂ ಬಳಸಿ, ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು 1 ರಿಂದ 10 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 7 = 5 + 5 – 3)
6. ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ 2–ಅಂಕಿಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಪುಸ್ತಕವೊಂದರ ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 216 ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪುಟಗಳಿವೆ?
8. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

• • • • • •

• • • • • • •

ಇದನ್ನು ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್‌ನ ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. 9–ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಮಧ್ಯದ ಅಂಕಿ ಯಾವುದು?

9. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಯಾ ಚೌಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ. (ಸುಳುಹು: 3 × 3 ರ ಮಾಯಾ ಚೌಕದ ಮಾಯಾ ಮೊತ್ತವು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.)

8		
3	7	

10. ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತದ 12 ಪಟ್ಟು ದೊಡ್ಡದಿರುವಂತೆ 3–ಅಂಕಿಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. 36 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತೆ $\overline{34x5y}$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿ x, y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು, ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಮತ್ತೊಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು, ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿ ಇರುವ ಹಾಗೆ ಭಾಗಿಸಿ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ನಿಮ್ಮ ಕಾರಣಗಳೇನು?
13. 11 ಮತ್ತು 25 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ 273A49B5 ರೂಪದ ಎಲ್ಲಾ 8–ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು, $2 + a$ ಮತ್ತು $35 - b$, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ, $a + b$, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15. $A8 \times 3B = 2730$, ಈ ಗುಣಾಕಾರದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ, A ಮತ್ತು B ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. A + B ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. 7 ಮತ್ತು 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶೇಷ 6 ಮತ್ತು 8 ಬರುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಮೂರು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಯಾವಾಗಲೂ 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

18. 1,00000 ವೂ 1234 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಲು ಸೇರಿಸಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. 4, 5, 6, 7 ಮತ್ತು 8 ಈ ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಒಮ್ಮೆ ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿ 264 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಒಂದು 5 ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರಗಳು

1. **(a)** ಎ **(b)** ಬಿ **(c)** ಸಿ **(d)** ಸಿ **(e)** ಎ **(f)** ಡಿ **(g)** ಡಿ

2) 24365 3)12. 4) 2, 5, 7, 8.

5. 1=3+3-5, 2=5-3, 3=5+5+5-3-3-3-3-3+3
4=3+3+3-5 5=5+5+5+5 -3-3-3-3-3
6=5+5+5+3+3-3-3-3-3-3 7=5+5-3, 8 = 5 + 3 ,
9=5+5+5+3+3+3-3-3-3-3-3 10=5+5+5+5+5-3-3-3-3-3.

6. 12, 18, 21, 24, 27, 36, 42, 45, 54, 63, 72, 81. 84,10,20,30,40,50,60,70,80,90

7. 108 ಪುಟಗಳು 8. 70

9

8	9	4
3	7	11
10	5	6

10. 108 ಏಕೈಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

11. $x = 4, y = 2$ ಅಥವಾ $x = 0, y = 6$ ಅಥವಾ $x = 9, y = 6$

12. {1,2,3,5,8,7} ಎಂಬುದು ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಗುಂಪು {4,6,10} ಆದಾಗ $\frac{(1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 8 \times 7)}{(4 \times 6 \times 10)}$ = 7, ಇದು ಕನಿಷ್ಠ ಶೇಷವಾಗಿದೆ.

13. 27314925 ಮತ್ತು 27364975   15. 8066   16. 12

2. ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ.

(*a*) ಒಂದೇ ಬೀಜ ಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಘಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ?

(ಎ) ಘಾತ   (ಬಿ) ಸಜಾತಿ ಪದಗಳು (ಸಿ) ಅಪವರ್ತನಗಳು (ಡಿ) ವಿಜಾತಿ ಪದಗಳು

(*b*) $2ab$ ಯಲ್ಲಿ ab ಯ ಸಹಗುಣಕ :

(ಎ) ab (ಬಿ) 2   (ಸಿ) $2a$ (ಡಿ) $2b$

(*c*) $a \times a \times a$ ಯ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪ :

(ಎ) $3a$ (ಬಿ) $3+a$ (ಸಿ) a^3 (ಡಿ) $3-a$

(*d*) ಎರಡು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ :

(ಎ) ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ   (ಬಿ) ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ

(ಸಿ) 0   (ಡಿ) ಅನಂತ

(*e*) a^2+2ab ಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿಸಲು ಕೂಡಬೇಕಾದ ಬೀಜಪದ :

(ಎ) b^2 (ಬಿ) $2ab$ (ಸಿ) ab (ಡಿ) $2a$

(*f*) $(x + 2)\ (x-3)$ ಯ ಗುಣಲಬ್ಧ :

(ಎ) $2x - 6$ (ಬಿ) $3x - 2$ (ಸಿ) x^2-x-6 (ಡಿ) x^2-6x

(*g*) $(7.2)^2$ ರ ಬೆಲೆ (ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಡೆದರೆ) :

(ಎ) 49.4   (ಬಿ) 14.4   (ಸಿ) 51.84   (ಡಿ) 49.04

(*h*) $(2x-3y)^2$ ನ ವಿಸ್ತರಣೆ :

(ಎ) $2x^2+3y^2+6xy$ (ಬಿ) $4x^2+9y^2-12xy$

(ಸಿ) $2x^2+3y^2-6xy$ (ಡಿ) $4x^2+9y^2+12xy$

(*i*) (ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಡೆದರೆ) 58 × 62 ರ ಬೆಲೆ :

(ಎ) 4596 (ಬಿ) 2596 (ಸಿ) 3596 (ಡಿ) 6596

2. $10x + 10y - 7p + 9q$ ಇಂದ $8x - 7y - 8p$ ಕಳೆಯಿರಿ.

3. ವಿಸ್ತರಿಸಿ:

(i) $(4x + 3)^2$ (ii) $(x + 2y)^2$ (iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ (iv) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$.

4. ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(*i*) $(2t + 5)(2t - 5)$ (*ii*) $(xy + 8)(xy - 8)$ (*iii*) $(2x + 3y)(2x - 3y)$.

5. ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ (ii) $\left(n-\frac{1}{n}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)$

(iii) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ (iv) $(2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$

6. ಸೂಕ್ತ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(*i*) $(103)^2$ (*ii*) $(96)^2$ (*iii*) 107×93 (*iv*) 1008×992

(*v*) $185^2 - 115^2$.

7. $x + y = 7$ ಮತ್ತು $xy = 12$ ಆದರೆ, $x^2 + y^2$ ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $x + y = 12$ ಮತ್ತು $xy = 32$ ಆದರೆ, $x^2 + y^2$ ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $4x^2 + y^2 = 40$ ಮತ್ತು $xy = 6$ ಆದರೆ, $2x + y$ ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $x - y = 3$ ಮತ್ತು $xy = 10$ ಆದರೆ, $x^2 + y^2$ ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $x+\frac{1}{x}=3$ ಆದರೆ, $x^2+\frac{1}{x^2}$ ಮತ್ತು $x^3+\frac{1}{x^3}$ ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $x+\frac{1}{x}=6$ ಆದರೆ, $x^2+\frac{1}{x^2}$ ಮತ್ತು $x^4+\frac{1}{x^4}$ ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ: (*i*) $(x+y)^2 + (x-y)^2$ (*ii*) $(x+y)^2 (x-y)^2$.

14. ಇವುಗಳನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ:

(*i*) $(x + 2z)(2x + z)$

(*ii*) $4(x + 2y)(2x + y)$

(*iii*) $(x+98)\ (x+102)$

(*iv*) 505×495. [*Hint.* $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

15. $a = 3x - 5y$, $b = 6x + 3y$ ಮತ್ತು $c = 2y - 4x$ ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   (i) $a + b - c$ (ii) $2a - 3b + 4c$.

16. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ $15x^2 - 23x + 9$. ಅದರ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು $5x^2 + 8x - 1$ ಮತ್ತು $6x^2 - 9x + 4$ ಆದರೆ, ಮೂರನೆ ಬಾಹುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $2x^2 - 5xy + 3z^2$ ಮತ್ತು $4xy - x^2 - z^2$ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(3x - 4y)$ ಮತ್ತು $(6x + 5y)$ ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಬಾಹುಗಳು $(2x + 3y)$ ಮತ್ತು $(3x + 2y)$ ಇರುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ $(x + y)$ ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಒಂದು ಚೌಕ ತೆಗೆದರೆ ಉಳಿದಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ?

20. a, b, c ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಗ $a = b = c$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಉತ್ತರಗಳು

1. (*a*) ಬಿ. (*b*) ಬಿ. (*c*). ಸಿ (*d*) ಎ. (*e*) ಎ. (*f*) ಸಿ. (*g*) ಸಿ. (*h*) ಬಿ. (*i*) ಸಿ.
2. $2x + 17y + p - q$.
3. (i) $16x^2 + 24x + 9$ (ii) $x^2 + 4xy + 4y^2$ (iii) $x^2 + (1/x^2) + 2$ (iv) $x^2 + (1/x^2) - 2$
4. (i) $4t^2 - 25$ (ii) $x^2y^2 - 25$ (iii) $4x^2 - 9y^2$
5. (i) $n^4 - 1$ (ii) $n^4 - (1/n^4)$ (iii) $x^8 - 1$ (iv) $16x^4 - y^4$
6. (i) 10609 (ii) 9216 (iii) 9951 (iv) 999936 (v) 21000.

7. 25. 8. 80. 9. ± 8 10. 29

11. 7 ಮತ್ತು 18. 12. 34 ಮತ್ತು 1154.

13. (i) $2(x^2 + y^2)$ (ii) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

14. (i) $\left(3\frac{(x+z)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(z-x)}{2}\right)^2$ (ii) $(x+2y)^2 - (2x+y)^2$

(iii) $(x+100)^2 - 1^2$ (iv) $500^2 - 5^2$.

15. (i) $13x - 4y$ (ii) $-28x - 11y$.

16. $4x^2 - 22x + 6$. 17. $2x^2 - 2xy + 4z^2$.

18. $\frac{18x^2 - 9xy - 20y^2}{2}$ 19. $5x^2 + 11xy + 5y^2$

3. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು, ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳು

1. ಸೂಕ್ತವಾದ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ:

(i) a = 60 ಮತ್ತು b = a ಆದರೆ, ಆಗ b = 60 ಆಗುವುದು.

ಎ) ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ– 1 ರಂತೆ ಬಿ) ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ– 2 ರಂತೆ

ಸಿ) ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ–3 ರಂತೆ ಡಿ) ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ– 4 ರಂತೆ

(ii) ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ರೇಖೆಗಳು. ____________

ಎ) ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿ) ಎರಡು ಸಿ) ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಡಿ) ಅಪರಿಮಿತ

(iii) ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಬಹುದಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ: ____________

ಎ) ಸೊನ್ನೆ ಬಿ) ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಸಿ) ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಒಂದು ಡಿ) ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು

(iv) ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾದರೆ, ಆಗ ____________

ಎ) ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 90^0 ಇರುತ್ತದೆ ಬಿ) ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಇರುತ್ತದೆ

ಸಿ) ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 270^0 ಇರುತ್ತದೆ ಡಿ) ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0 ಇರುತ್ತದೆ

(v) ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆಯು ಅದರ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನದ 5ರಷ್ಟಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು ____________

ಎ) 30^0 ಬಿ) 60^0 ಸಿ) 120^0 ಡಿ) 150^0

2. ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರಿಪೂರಕಕೋನಗಳು ಹಾಗೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪೂರಕಕೋನಗಳಿಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು ?

3. ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಸರಳರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

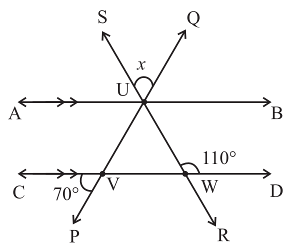
4. ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಯಾವಾಗ ಹೇಳುವಿರಿ ?

5. $\overline{AB}$ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿರಲಿ. C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳು ಅದರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿವೆ. ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳು A, C, D, B ಕ್ರಮದಲ್ಲಿದ್ದು, AD = BC ಆದಾಗ AC = DB ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು 'O' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ. $\overrightarrow{OX}$ ಕಿರಣವು $\angle BOD$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿರಲಿ. $\overrightarrow{OY} \perp \overrightarrow{OX}$ ಆಗುವಂತೆ $\overrightarrow{OD}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OA}$ ಗಳ ನಡುವೆ $\overrightarrow{OY}$ ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\overrightarrow{OY}$ ಯು $\angle DOA$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಛೇದಕ $\overleftrightarrow{PQ}$ ಆಗಿರಲಿ. $\overleftrightarrow{PQ}$ ಯು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು L ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. $\angle ALP$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವು $\overleftrightarrow{CD}$ ಯನ್ನು R ನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು $\angle PLB$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವು $\overleftrightarrow{CD}$ ಯನ್ನು S ನಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸಿದಾಗ, $\angle LRS + \angle RSL = 90^0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. ನೀಡಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ. $\overleftrightarrow{PQ}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{RS}$ ಛೇದಕಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು U ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ. $\angle DWU = 110^0$ ಮತ್ತು $\angle CVP = 70^0$ ಆದರೆ $\angle QUS$ ನ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



9. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಗಡಿಯಾರದ "ಗಂಟೆ ಮತ್ತು ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳುಗಳ" ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು ?
(i) 1. 40 ಗಂಟೆಗಳು (ii) 2.15 ಗಂಟೆಗಳು (1^0 = 60 ನಿಮಿಷಗಳು ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

10. ಸಮಯವು ಸಂಜೆ 4.24 ಗಂಟೆಯಾದಾಗ ಗಡಿಯಾರದ ಗಂಟೆಯ ಮುಳ್ಳು ಸರಿಯಾಗಿ ಮಧ್ಯಾಹ್ನ 12 ಗಂಟೆಯ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ ?

11. $\overleftrightarrow{AB}$ ಯು ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿರಲಿ. C ಯು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. B ಯು A ಮತ್ತು D ಗಳ ನಡುವೆ ಬರುವಂತೆ $\overrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಆಗ AD + BD = 2CD ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ. $\overrightarrow{OX}$ ಕಿರಣವು $\angle BOD$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. 'O' ನ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದ $\overrightarrow{OX}$ ಕಿರಣವು $\angle AOC$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

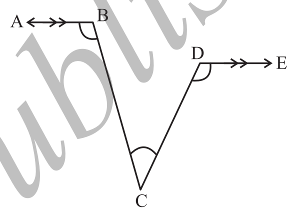
13. $\overrightarrow{OX}$ ಒಂದು ಕಿರಣವಾಗಿರಲಿ. $\overrightarrow{OA}$ ಯು $\overrightarrow{OX}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವಂತೆ $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳು $\overrightarrow{OX}$ ನ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಕಿರಣ $\overrightarrow{OC}$ ಯು $\angle AOB$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾದಾಗ, $\angle XOA + \angle XOB = 2\angle XOC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳು ಎರಡು ಕಿರಣಗಳಾಗಿರಲಿ. $\angle AOX > \angle XOB$ ಆಗಿರುವಂತೆ $\overrightarrow{OX}$ ಕಿರಣವು $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣಗಳ ನಡುವೆ ಇರಲಿ. $\overrightarrow{OC}$ ಯು $\angle AOB$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾದಾಗ $\angle AOX - \angle XOB = 2\angle COX$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15. $\overrightarrow{OC}$ ಯು $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವಂತೆ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OC}$ ಗಳು ಮೂರು ಕಿರಣಗಳಾಗಿರಲಿ. $\angle AOC$ ಮತ್ತು $\angle COB$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಾಗ B, O, A ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ ಆದರೆ,

$\angle ABC - \angle DCB + \angle CDE = 180^0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



17. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಹಾಗೂ ಒಂದು ಛೇದಕವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವ 8 ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ?

ಉತ್ತರಗಳು

1. i) ಎ. ii) ಡಿ iii) ಬಿ iv) ಬಿ v) ಡಿ

3) 3 **8)** 40^0 **9)** (i) 190^0 (ii) $22^0 30'$ **10)** 144^0

4. ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ :

(*a*) $4a + 12b$ ಗೆ ಸಮವಾದದ್ದು :

ಎ. $4a$ ಬಿ. $12b$ ಸಿ. $4(a + 3b)$ ಡಿ. $3a$

(*b*) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ ಕೇವಲ :

ಎ. ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ

ಬಿ. ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ

ಸಿ. ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತೊಂದು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ

ಡಿ. ಎರಡರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ

(*c*) $x^2 + 6x + 8$ ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು :

ಎ. $(x + 1)(x + 8)$ ಬಿ. $(x + 6)(x + 2)$

ಸಿ. $(x + 10)(x - 2)$ ಡಿ. $(x + 4)(x + 2)$

(*d*) ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದವು ಇದಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ :

ಎ. 1 ಬಿ. 0 ಸಿ. 4 ಡಿ. 7

(*e*) ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ –2 ಮತ್ತು, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ –24 ಆದಾಗ, ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು:

ಎ. 6 ಮತ್ತು 4 ಬಿ. –6 ಮತ್ತು 4 ಸಿ. –6 ಮತ್ತು –4 ಡಿ. 6 ಮತ್ತು –4

(*f*) $(0.7)^2 - (0.3)^2$ ಇದನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದಾಗ ಬರುವ ಬೆಲೆ :

ಎ. 0.4 ಬಿ. 0.04 ಸಿ. 0.49 ಡಿ. 0.56

2. ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

(*i*) $x^2 + 6x + 9$ (*ii*) $1 - 8x + 16x^2$

(*iii*) $4x^2 - 81y^2$ (*iv*) $4a^2 + 4ab + b^2$

(*v*) $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2$

3. ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

(*i*) $x^2 + 7x + 12$ (*ii*) $x^2 + x - 12$ (*iii*) $x^2 - 3x - 18$ (*iv*) $x^2 + 4x - 21$

(*v*) $x^2 - 4x - 192$ (*vi*) $x^4 - 5x^2 + 4$ (*vii*) $x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4$

4. ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

(*i*) $2x^2 + 7x + 6$ (*ii*) $3x^2 - 17x + 20$ (*iii*) $6x^2 - 5x - 14$

(*iv*) $4x^2 + 12xy + 5y^2$ (*v*) $4x^4 - 5x^2 + 1$

5. ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

(*i*) $x^8 - y^8$ (*ii*) $a^{12}x^4 - a^4x^{12}$ (*iii*) $x^4 + x^2 + 1$ (*iv*) $x^4 + 5x^2 + 9$.

6. $x^4 + 4y^4$ ಅಪವರ್ತಿಸಿ. ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $(2011)^4 + 64$ ಅನ್ನು ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. (ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ ಅಪವರ್ತಿಸಿ.)

ಉತ್ತರಗಳು

1. (*a*) ಸಿ. (*b*) ಬಿ. (*c*) ಡಿ. (*d*) ಬಿ.
   (*e*) ಡಿ. (*f*) ಎ.

2. (i) $(x+3)^2$ (ii) $(1-4x)^2$ (iii) $(2x+9y)(2x-9y)$
   (iv) $(2a+b)^2$ (v) $(a^2-b^2)(b^2-c^2)$.

3. (i) $(x+3)(x+4)$ (ii) $(x+4)(x-3)$
   (iii) $(x-6)(x-3)$ (iv) $(x+7)(x-3)$
   (v) $(x-16)(x+12)$ (vi) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
   (vii) $(x-2y)(x+2y)(x-3y)(x+3y)$.

4. (i) $(2x-3)(x+2)$ (ii) $(x-4)(3x-5)$
   (iii) $(x-2)(6x+7)$ (iv) $(2x+y)(2x+5y)$
   (v) $(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1)$.

5. (i) $(x-4)(x+4)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
   (ii) $a^4x^4(a-x)(a+x)(a^2+x^2)(a^4+x^4)$
   (iii) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
   (iv) $(x^2+x+3)(x^2-x+3)$.

6. $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.

5. ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ, ವರ್ಗಮೂಲಗಳು, ಪೂರ್ಣ ಘನ, ಘನ ಮೂಲಗಳು

1. 'ಅ' ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'ಬ' ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

'ಅ'	'ಬ'	ಉತ್ತರ:
(1) 5	(a) 25	(1) —

(2) 8	(b) 144	(2) —
(3) 2	(c) 36	(3) —
(4) –6	(d) 484	(4) —
(5) –22	(e) 64	(5) —
(6) 12	(f) 4	(6) —
	(g) 121	

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ.

(a) 1 ರಿಂದ 500 ರ ಒಳಗಿನ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:

(ಎ) 1 (ಬಿ) 16 (ಸಿ) 22 (ಡಿ) 25

(b) ಪೂರ್ಣವರ್ಗದ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರಲೇ ಬಾರದ ಸಂಖ್ಯೆ

(ಎ) 1 (ಬಿ) 3 (ಸಿ) 5 (ಡಿ) 9

(c) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 5 ಸೊನ್ನೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದರ ವರ್ಗದಲ್ಲಿರುವ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

(ಎ) 5 (ಬಿ) 8 (ಸಿ) 10 (ಡಿ) 12

(d) ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 8ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ

(ಎ) 1 (ಬಿ) 3 (ಸಿ) 5 (ಡಿ) 7

(e) 6ನೇ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು

(ಎ) 6 (ಬಿ) 10 (ಸಿ) 21 (ಡಿ) 28

3. –10 ರಿಂದ 5 ರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?

4. ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

4, 5, 9, 24, 17, 76, 34, 52, 33, 2319, 18, 3458, 3453.

5. 2, 3, 7 ಅಥವಾ 8 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ 400 ರಿಂದ 425 ರವರೆಗೆನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

6. $(111111111)^2$ ಇದರಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $x^2 + y^2 = z^2$ ನಲ್ಲಿ

(i) $x = 4$ ಮತ್ತು $y = 3$ ಆದರೆ z ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $x = 5$ ಮತ್ತು $z = 13$ ಆದರೆ y ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) $y = 15$ ಮತ್ತು $z = 17$ ಆದರೆ x ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ರೂ. 2304ನ್ನು ಹಲವಾರು ಮಂದಿಗೆ ಸಮನಾಗಿ ಹಂಚಲಾಗಿದೆ. ಎಷ್ಟು ಜನರಿದ್ದಾರೊ, ಅಷ್ಟೇ ರೂಪಾಯಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ದೊರೆಯುವ ಹಣವೆಷ್ಟು?

9. ಒಂದು ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಸಂಕಲನ * ನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ $m * n = m^2 + n^2$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದೆ.

(i) * ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ N ಆವೃತವಾಗಿದೆಯೆ?

(ii) N ನಲ್ಲಿ * ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೇ?

(iii) N ನಲ್ಲಿ * ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೆ?

(iv) N ನಲ್ಲಿ * ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನನ್ಯತಾಂಶವಿದೆಯೇ?

10. ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುವಂತೆ 1 ರಿಂದ 500ರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಪರಿಶೋಧನೆ)

11. ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಭೂಮಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 7396 m^2 ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. 1010 ನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೇ? ಕಾರಣ ನೀಡಿ.(ಸುಳಿವು:– 1010 ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ 2 ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ).

13. ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನವನ್ನು 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷಗಳೇನು?

14. 7 ಮತ್ತು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1ನ್ನು ನೀಡುವ ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

15. ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಘನವಾಗುವಂತೆ ಎರಡು ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. 48ರ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ರೀತಿಯ ಅನಂತ ಜೋಡಿಗಳು ಇವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಕಾರಣ ನೀಡಿ.

ಉತ್ತರಗಳು

1. $5 \to 25$, $8 \to 64$, $2 \to 4$, $-6 \to 36$, $-22 \to 484$, $12 \to 144$

2. (a) ಸಿ (b) ಬಿ (c) ಸಿ (d) ಎ (e) ಸಿ.

3. 11.

4. ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂಕೆಗಳು 6, 5, 1, 6, 9, 6, 6, 4, 9, 1, 4, 4, 9.

5. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿಲ್ಲ.

6. 81

7. (i) $z = \pm 5$ (ii) $y = \pm 12$ (iii) $x = \pm 8$.

8. ₹ 48

9. (i) N ಆವೃತ್ತವಾಗಿದೆ (ii) ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ

(iii) ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

(iv) N ನಲ್ಲಿ ಅನನ್ಯತಾಂಶವಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ $m^2 + k^2 = m^2 \Rightarrow k = 0$ ಮತ್ತು N ನಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಇಲ್ಲ.

11. 344 ಮೀ. 12. 1010 ಎರಡು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಲ್ಲ.

13. 0, 1, 6 14. $1156 = 34^2$ 15. 4 ಮತ್ತು 16

16. ಸಂಖ್ಯೆ 16 ರನ್ನು 48 ರ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ಮತ್ತು 48 ನ್ನು 240 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ. $16+240=256=16^2$. 48 ರ ಗುಣಕ 48 ಮತ್ತು $48l$ ಇರುವಂತೆ $l=m(3m+2)$, $m = 1,2,3$......; ಪರಿಗಣಿಸಿ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

6. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

1) ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ಭರ್ತಿಮಾಡಿ.

ಎ) ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು____________ ಇರುತ್ತದೆ.

ಬಿ) ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು ಅದರ ________ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಿ) ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನವು ಯಾವಾಗಲೂ, ಅದರ ಯಾವುದೇ ಅಂತರ್ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ______ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಡಿ) ತ್ರಿಭುಜವು ____________ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಲಂಬಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಇ) ತ್ರಿಭುಜವು ___________ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಿಶಾಲಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

2) ನೀಡಿರುವ ಪರ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತವಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ.

(a) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle A = 80°$ $AB = AC$ ಆದಾಗ $\angle B =$

ಎ) 50° ಬಿ) 60° ಸಿ) 40° ಡಿ) 70°

(b) ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle A$ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು $\angle B = 35°$ ಆದಾಗ, $\angle C =$

(ಎ) 65^0 ಬಿ) $55°$ ಸಿ) $75°$ ಡಿ) $45°$

(c) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $\angle B = \angle C = 45^0$ ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜವು ಒಂದು

ಎ) ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಭುಜ ಬಿ) ಲಘುಕೋನತ್ರಿಭುಜ

ಸಿ) ವಿಶಾಲಕೋನತ್ರಿಭುಜ ಡಿ) ಸಮಬಾಹುತ್ರಿಭುಜ

(d) ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು

ಎ) $60°$ ಬಿ) $90°$ ಸಿ) $120°$ (ಡಿ) $150°$

(e) ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು

ಎ) ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳು ಬಿ) ಮೂರು ಲಂಬಕೋನಗಳು

ಸಿ) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಡಿ) ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಕೋನಗಳು

3) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle B = 70°$ ಆದರೆ $\angle A + \angle C$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle A = 110°$ ಮತ್ತು $AB = AC$ ಆದಾಗ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5) ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು 2:3:5ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6) ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರಿಸಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $15°$ ಆದರೆ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7) ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಮೂರನೇ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಮೂರನೇ ಕೋನದ ಅಳತೆಯೇನು?

8) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $2\angle A = 3\angle B = 6\angle C$, ಆದರೆ $\angle A, \angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳ ಅಳತೆಯೇನು?

9) $x - 40°$, $x - 20°$ ಮತ್ತು $1/2\ x + 15°$ ಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ x ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle A - \angle B = 15°$ ಮತ್ತು $\angle B - \angle C = 30°$ ಆದರೆ $\angle A, \angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

11) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $80°$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $20°$ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle B = 60°$ ಮತ್ತು $\angle C = 80°$ ಆಗಿದೆ. $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು 'I' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $\angle BIC$ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

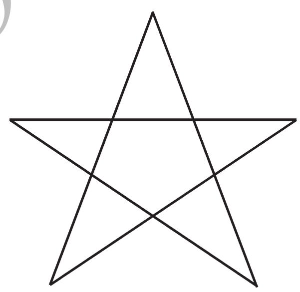
13) ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿಕ್ಕ ಕೋನವು ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14) ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದೊಡ್ಡ ಕೋನವು ಚಿಕ್ಕ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle B = 50°$ ಮತ್ತು $\angle A = 60°$ ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ, $\angle ACD$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16) ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಕೋನವು ಪಾದಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಐದು ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಉತ್ತರಗಳು

1) (ಎ) 180° (ಬಿ) ಆಂತರಿಕ (ಸಿ) ದೊಡ್ಡದು
   (ಡಿ) ಒಂದು (ಇ) ಒಂದು

2) (a) ಎ (b) ಬಿ (c) ಎ (d) ಸಿ e) ಡಿ

3) 110° 4) ಪ್ರತಿಯೊಂದು 35° 5) 36°, 54°, ಮತ್ತು 90°

6) 45°, 60°, 75°, 7) 90° 8) $\angle C = 30°, \angle B = 60°, \angle A = 90°$

9) $x = 90°$ 10) $\angle A = 80°, \angle B = 65°, \angle C = 35°$

11) 30°, 50°, 100° 12) 110° 13) 45°, 45°, 90°

14) 36°, 72°, 72° 15) 110^0 16) 30°, 30°, 120°

17) 180°.

7. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1. ಖಾಲಿ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಜಾಗಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಂದ ತುಂಬಿ;

   (ಎ) 0ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರದ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ ______________

   (ಬಿ) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ______________

   (ಸಿ) ಎಲ್ಲಾ ಸಮ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ______________

   (ಡಿ) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ 8ರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ______________

   (ಇ) ಎರಡು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು ______________

   (ಎಫ್)ಎರಡು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ______________

2. ಮುಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಗುರ್ತಿಸಿ.

   (ಎ) ಎಲ್ಲ ಸಮ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಗಣ.

   (ಬಿ) ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ, Z ನ ಪ್ರತಿ ಉಪಗಣವು ಕನಿಷ್ಠ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

   (ಸಿ) ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

   (ಡಿ) ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ, ಅದರ ಮುಂದಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

   (ಇ) ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿದೆ.

   (ಎಫ್)ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಸಮ ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ.

   (ಜಿ) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುತ್ತದೆ.

3. ಸರಳ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:

   (i) $100(100-3) - (100 \times 100 - 3)$

   (ii) $[20 - (2011 - 201)] + [2011 - (201 - 20)]$

4. $m \neq -1$ ಮತ್ತು $m \neq -2$ ಇರುಂತೆ m ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, $\frac{m}{m+1}$ ಮತ್ತು $\frac{m+1}{m+2}$ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು? ನಿಮ್ಮ ಕಾರಣಗಳೇನು?

5. $*$ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ Q ನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ r ಮತ್ತು s ಗಳಿಗೆ ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿದೆ: $r * s = r + s - (r \times s)$ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳೊಂದಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ.

   (i) $*$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ Q ಆವೃತವಾಗಿದೆಯೆ?

(ii) Q ನಲ್ಲಿ $*$ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೆ?

(iii) Q ನಲ್ಲಿ $*$ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೆ?

(iv) Q ನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ a ಗೆ, $a * 1$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(v) $a * b = 0$ ಆಗುವಂತೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕ $a \neq 0$ ಮತ್ತು $b \neq 0$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಮುಂದಿನ ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\frac{8}{13}, \frac{12}{17}, \frac{26}{23}, \frac{-13}{11}, \frac{-101}{100}$

7. ಇವುಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

$\frac{10}{13}, \frac{20}{23}, \frac{5}{6}, \frac{40}{43}, \frac{25}{28}, \frac{10}{11}.$

8. ಇವುಗಳನ್ನು ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

$\frac{21}{17}, \frac{31}{27}, \frac{41}{37}, \frac{51}{47}, \frac{9}{8}, \frac{13}{11}$

9. (ಎ) 0ಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶ ಯಾವುದು?

(ಬಿ) 1ರ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಾಂಶ ಯಾವುದು?

(ಸಿ) ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ?

10. ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ, ಮುಂದಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ತಲಾ 5 ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

(ಎ) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ (ಬಿ) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ

(ಸಿ) ಸಂಕಲನದ ಮೇಲೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿತರಣಾ ನಿಯಮ

11. ವಿತರಣಾ ಗುಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಗೊಳಿಸಿ:

(1) $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{5}\right)$ (2) $\frac{5}{12} \times \left(\frac{25}{9} + \frac{32}{5}\right)$ (3) $\frac{8}{9} \times \left(\frac{11}{2} + \frac{2}{9}\right)$

12. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಗೊಳಿಸಿ:

(1) $\left(\frac{25}{9} + \frac{12}{3}\right) + \frac{3}{5};$ (2) $\left(\frac{22}{7} + \frac{36}{5}\right) \times \frac{6}{7};$

(3) $\left(\frac{51}{2}+\frac{7}{6}\right)\div\frac{3}{5}$ (4) $\left(\frac{16}{7}+\frac{21}{8}\right)\times\left(\frac{15}{3}-\frac{2}{9}\right)$

13. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಗುಣ ಯಾವುದು?

14. ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: $1+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{1+1}\right)}$

15. ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: $\left(\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)$

16. ತನ್ನ ವಿಲೋಮಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ಬಸ್ಸು ಎರಡು ಗಂಟೆಗೆ ಒಮ್ಮೆ ಎರಡು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಪಟ್ಟಣಗಳಿಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಅದು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ 8 ಗಂಟೆಗೆ ಓಡಾಟವನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿ ಸಂಜೆ 6 ಗಂಟೆಗೆ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ದಿನ ಚಾಲಕನು, ಮೊದಲ ಟ್ರಿಪ್‌ನಲ್ಲಿ 30 ಪ್ರಯಾಣಿಕರಿದ್ದು ನಂತರ ಪ್ರತಿ ಟ್ರಿಪ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಟ್ರಿಪ್‌ಗಿಂತ ಒಬ್ಬರು ಪ್ರಯಾಣಿಕರು ಕಡಿಮೆ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆ ದಿನ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ಪ್ರಯಾಣಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

18. $q < p$ ಆಗಿರುವಂತೆ 0 ಮತ್ತು 1ರ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{p}{q}$ ಗಳಿವೆ?

19. $\frac{3n+4}{n+2}$ ಸಹ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಆವರಣಗಳನ್ನು ಹಾಕುವುದರಿಂದ, ನೀವು $2 \times 3 + 4 \times 5$ ಕ್ಕೆ ಹಲವಾರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ $[(2 \times 3) + 4] \times 5$ ಆವರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ಒಂದು ಕ್ರಮ). ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಬೆಲೆಗಳಿವೆ?

21. $\frac{p}{q}$ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p+q}$ ಸಹ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

22. ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\frac{14n+3}{21n+4}$ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

23. ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{n+3}{n-1}$ ಸಹ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರಗಳು

1. ಎ) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಿ) 0 ಸಿ) 2 ಡಿ) 9 ಇ) ಸಮ ಎಫ್) ಬೆಸ

2. ಎ) ತಪ್ಪು ಬಿ) ತಪ್ಪು ಸಿ)ಸರಿ ಡಿ) ತಪ್ಪು ಇ) ತಪ್ಪು ಎಫ್) ಸರಿ ಜಿ) ತಪ್ಪು.

3. i) 297 ii) 39.

4. $\frac{m}{(m+1)} < \frac{m+1}{m+2}$; ಈ ಎರಡು ಸಂಧರ್ಭಗಳನ್ನು ಮರೆಯಬೇಡಿ. $m < -2$ ಮತ್ತು $m > -1$.

5. i) ಹೌದು ii) ಹೌದು iii) ಹೌದು

   iv) $a * 1 = 1$; v) $a = 2,\ b = 2$.

6. $\frac{13}{8}, \frac{17}{12}, \frac{23}{26}, \frac{-11}{13}, \frac{-100}{101}$.

7. $\frac{10}{13} < \frac{5}{6} < \frac{20}{23} < \frac{25}{28} < \frac{10}{11} < \frac{40}{43}$.

8. $\frac{21}{17} > \frac{13}{11} > \frac{31}{27} > \frac{9}{8} > \frac{41}{37} > \frac{51}{47}$.

9. **a)** 0; **b)** 1; **c)** 1,–1.

11. **i)** $\frac{46}{225}$ **ii)** $\frac{413}{108}$ **iii)** $\frac{225}{6}$ **iv)** $\frac{11825}{504}$.

13. ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ± 1 ಮಾತ್ರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

14. $\frac{5}{3}$ **15.** $\frac{1}{2}$ **16.** ± 1 **17.** 140.

18. 0 ಮತ್ತು 1 ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ $q<p$ ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಯಾವುದೇ $\frac{p}{q}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.

19. $n = 0, -1, -3, -4$

20. 4 ಬೆಲೆಗಳು : 26, 46, 50, 70

23. $n = 2, 3, 5, 0, -1, -3$.

8. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ :

(*a*) ಸಮೀಕರಣ $5x - 35 = 0$ ಯಲ್ಲಿ 'x' ನ ಬೆಲೆ

ಎ. 2 ಬಿ. 7 ಸಿ. 8 ಡಿ. 11

(b) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಐದನೇ ಒಂದು ಭಾಗದಿಂದ 14 ಕಳೆದರೆ ಉತ್ತರ 20 ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಮೀಕರಣ

ಎ. $\frac{x}{5} - 14 = 20$ ಬಿ. $x - \frac{14}{5} = \frac{20}{5}$ ಸಿ. $x - 14 = \frac{20}{5}$ ಡಿ. $x + \frac{14}{5} = 20$

(c) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಐದರಷ್ಟನ್ನು, 8 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ 53 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಎ. 12 ಬಿ. 9 ಸಿ. 11 ಡಿ. 2

(d) $5(x - 2) = 3\ (x - 3)$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ 'x' ನ ಬೆಲೆ

ಎ. 2 ಬಿ. $\frac{1}{2}$ ಸಿ. $\frac{3}{4}$ ಡಿ. 0

(e) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 84 ಆಗಿ, ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 30 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಎ. -57 ಮತ್ತು 27 ಬಿ. 57 ಮತ್ತು 27

ಸಿ. 57 ಮತ್ತು -27 ಡಿ. -57 ಮತ್ತು -27

(f) ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವು ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದು, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 800 ಚ.ಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಕ್ರಮವಾಗಿ

ಎ. 60 ಚ.ಮೀ ಮತ್ತು 20 ಚ.ಮೀ ಬಿ. 40 ಚ.ಮೀ ಮತ್ತು 20 ಚ.ಮೀ

ಸಿ. 80 ಚ.ಮೀ ಮತ್ತು 10 ಚ.ಮೀ ಡಿ. 100 ಚ.ಮೀ ಮತ್ತು 8 ಚ.ಮೀ

(g) ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 249 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಎ. 81,83,85 ಬಿ. 79,81,83

ಸಿ. 103,105,107 ಡಿ. 95,97,99

(h) $\frac{x + 0.7x}{2} = 0.85$, ಆದರೆ '$x$' ನ ಬೆಲೆ

ಎ. 2 ಬಿ. 1 ಸಿ. -1 ಡಿ. 0

(i) $2x - (3x - 4) = 3x - 5$, ಆದರೆ 'x' ನ ಬೆಲೆ

ಎ. $\frac{4}{9}$ ಬಿ. $\frac{9}{4}$ ಸಿ. $\frac{3}{2}$ ಡಿ. $\frac{2}{3}$

2. ಬಿಡಿಸಿ :

(i) $\frac{3x+24}{2x+7} = 2$ (ii) $\frac{1-9y}{11-3y} = \frac{5}{8}$.

3. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 45 ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತ 7 : 8 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ?

4. ಶೋನಳ ತಾಯಿ ಅವಳಿಗಿಂತ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ದೊಡ್ಡವರು. 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ, ಅವಳ ತಾಯಿ, ಅವಳಿಗಿಂತ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ದೊಡ್ಡವರಿರುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸೇನು ?

5. ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 336 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಇಬ್ಬರು ಸ್ನೇಹಿತರು '*A*' ಮತ್ತು '*B*' ಜಂಟಿಯಾಗಿ ₹. 60000 ಬಂಡವಾಳ ಹೂಡಿ ವ್ಯಾಪಾರವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವರು. '*A*' ಯ ಪಾಲು '*B*' ಯ ಪಾಲಿನ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ತೊಡಗಿಸಿರುವ ಹಣವೆಷ್ಟು ?

7. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 40 ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ ಉತ್ತರ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

8. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆರನೇ ಭಾಗ, ಅದರ ಎಂಟನೇ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ಮೂರರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

9. ಒಂದು ಮನೆ ಮತ್ತು ಉದ್ಯಾನವನದ ಬೆಲೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ ₹. 8,40,000. ಉದ್ಯಾನವನದ ಬೆಲೆಯು ಮನೆಯ ಬೆಲೆಯ $\frac{5}{7}$ ರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಮನೆ ಮತ್ತು ಉದ್ಯಾನವನದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ರೈತರು ಶೇಖರಿಸಿದ ಧಾನ್ಯವನ್ನು ಭಾಗ ಮಾಡಿ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತಾರೆ. '*A*' ಯು 72 ಚೀಲ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. '*B*' ಯು 92 ಚೀಲ ಧಾನ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು '*A*' ಗೆ ₹.8000ಕೊಡುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಚೀಲದ ಬೆಲೆಯೇನು ?

11. ಒಬ್ಬ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು. 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅದು ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೂರು ಪಟ್ಟಾಗಿರುತ್ತದೆ. ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡು ಪಟ್ಟಾಗಲು ಇನ್ನೆಷ್ಟು ವರ್ಷ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ?

12. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು '7' ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅದು 132 ಕ್ಕಿಂತ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದೊ, ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ 132 ಕ್ಕಿಂತ ಅಷ್ಟೆ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯ 25 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ₹.250 ಕೊಟ್ಟು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಆತ '5' ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ತನಗಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ತಾನು ವ್ಯಯಿಸಿದ ಹಣ ಪಡೆಯಲು ಮಾರಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ಆಗುವುದು ?

14. ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ, ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 12. ಅದನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 18 ಜಾಸ್ತಿಯಾದರೆ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

15. ಎರಡು ನಿಲ್ದಾಣಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಅಂತರ 340 km ಎರಡು ರೈಲುಗಳು, ಎರಡು ನಿಲ್ದಾಣಗಳಿಂದ, ಒಂದೇ ಸಮಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಹಳಿಗಳ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಒಂದನ್ನೊಂದು ದಾಟುತ್ತವೆ. ಒಂದು ರೈಲಿನ ವೇಗ ಎರಡನೇ ರೈಲಿಗಿಂತ $5 km/h$ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಎರಡು ರೈಲುಗಳು ಚಲಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಎರಡು ಗಂಟೆಯ ನಂತರ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯದ ಅಂತರ 30 km ಆದರೆ ಎರಡೂ ರೈಲುಗಳ ವೇಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16 ಒಂದು ಉಗಿದೋಣಿ ಒಂದು ನದಿಯ ನೀರು ಹರಿಯುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ಬಂದರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು 4 ಗಂಟೆಯ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಅಂತರವನ್ನು ನೀರು ಹರಿಯುವ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿ ಚಲಿಸುವಾಗ '5' ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ನೀರಿನ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿ ಚಲಿಸುವಾಗ ಅದರ ವೇಗ 2 km/h ಇದ್ದರೆ, ನಿಂತ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ವೇಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

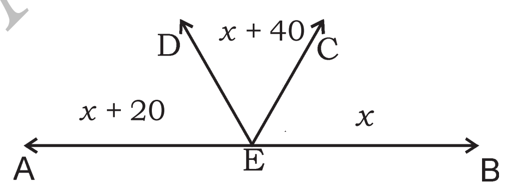
17. ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಅದರ ಛೇದಕ್ಕಿಂತ '3' ಕಡಿಮೆ ಅಂಶವು ಮೂರು ಪಟ್ಟಾದರೆ ಮತ್ತು ಛೇದಕ್ಕೆ 20 ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{8}$. ಹಾಗಾದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ದಶಮ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಅಂಕಿಯು, ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯ ಮೂರು ಪಟ್ಟಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಾಗೂ ಇದನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತವು 88 ಆದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು, ಪಾದದ $\frac{3}{5}$ ರಷ್ಟಿದ್ದು, ಎತ್ತರವನ್ನು 4 ರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಪಾದವನ್ನು 2 ರಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಬದಲಾಗದು. ಹಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪಾದ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅನುಪಾತ 4 : 5 ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಉತ್ತರಗಳು

1. (i) (*a*) ಬಿ. (*b*) ಎ. (*c*) ಬಿ. (*d*) ಬಿ. (*e*) ಬಿ. (*f*) ಬಿ. (*g*) ಎ. (*h*) ಬಿ. (*i*) ಬಿ.

2. (i) 10 (ii) $-\frac{47}{57}$

3. 21 ಮತ್ತು 24. 4. 10 ಮತ್ತು 40. 5. 100, 112, 114,

6. A ದ ಭಾಗ ₹ 40,000 ಮತ್ತು B ದ ಭಾಗ ₹ 20,000

7. 60. 8. 72.

9. ಕೈ ತೋಟ ₹ 35,000 ಮತ್ತು ಮನೆ ₹ 49,000.

10. ₹ 800. 11. 15 ವರ್ಷಗಳು 12. 33 13. ₹ 12.50

14. 57 15. 90 ಕಿ.ಮೀ ಮತ್ತು 95 ಕಿ.ಮೀ

16. 2.25 ಕಿ.ಮೀ 17. $\frac{1}{4}$ 18. 62

19. ಎತ್ತರ 20 cm ಮತ್ತು ಪಾದ 12 cm

20. 40^0, 50^0 ಮತ್ತು 90^0

21. $x = 40$